Exercice 1

Petit formulaire:

Dérivées et opérations sur les fonctions

u et v étant des fonctions dérivables sur un intervalle I, et, k étant un réel,
Somme $(u+v)= u'+v'$
Produit: $(ku)' = k\,u'$ $(uv)' = u'v + v'u$

Quotient: Sur les intervalles où v ne s'annule pas: $\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'v-v'u}{v^2}$

Dérivées et fonctions composées:

u étant une fonction dérivable sur un intervalle I, $n \in \mathbb{Z}^*$.

$(u^n)' = n\,u'\times u^{n-1}$ $(\sin\circ u)' = u'\times\cos\circ u$ $(\cos\circ u)' = -u'\times\sin\circ u$ $(e^u)' = u'e^u$

$u > 0$ sur I, $\sqrt{u}\;' = \dfrac{u'}{2\sqrt{u}}$

Sur les intervalles où u ne s'annule pas: $\left(\dfrac{1}{u}\right)' = \dfrac{-u'}{u^2}$

Questions:

1) Calculer les dérivées des fonctions suivantes définies et dérivables sur $\mathbb{R}$.
(***Ne pas chercher à réduire les expressions***, l'objectif étant de contrôler l'utilisation des formules)

$f : x \mapsto \sqrt{x^2+1}$ $f'(x) = \dfrac{2x}{2\sqrt{x^2+1}} = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}$

$g : x \mapsto \dfrac{2x-3}{\sqrt{x^2+1}}$

$$g'(x) = \frac{2\times\sqrt{x^2+1}-\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}\times(2x-3)}{x^2+1} = \frac{2(x^2+1)-x(2x-3)}{\sqrt{x^2+1}(x^2+1)} = \frac{3x+2}{\sqrt{x^2+1}(x^2+1)}$$

$h : x \mapsto \dfrac{\sin x+2}{\cos(x^2)+4}$

$$h'(x) = \frac{\cos x\times(\cos(x^2)+4)-(-2x\times\sin(x^2))(\sin x+2)}{(\cos(x^2)+4)^2} =$$
$$\frac{\cos x\times\cos(x^2)+4\cos x+2x\times\sin x\times\sin(x^2)+4x\times\sin(x^2)}{(\cos(x^2)+4)^2}$$

2) Vrai- Faux (Justifier la réponse)
La fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = xe^{2x^2+1}$ est une solution de l'équation différentielle $y' + 4y = (2x+1)^2\, e^{2x^2+1}$
f est le produit de $u: x \mapsto x$ et de $v: x \mapsto e^{2x^2+1}$

v est la composée de la forme e^w avec $w: x \mapsto 2x^2+1$

$f'(x) = 1\times e^{2x^2+1} + x\times 4x\, e^{2x^2+1} = (4x^2+1)\, e^{2x^2+1}$
$f'(x) + 4f(x) = (4x^2+1)\, e^{2x^2+1} + 4xe^{2x^2+1} = (4x^2+4x+1)\, e^{2x^2+1} = (2x+1)^2\, e^{2x^2+1}$

3) Vrai- Faux (Justifier la réponse)
La fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = xe^{2x^2+1}$ est décroissante sur $]-\infty; 0]$ et croissante sur $[0; +\infty[$

$f'(x) = (4x^2 + 1)\,e^{2x^2+1}$ est une expression strictement positive.
f est donc strictement croissante sur ℝ.

3) Vrai- Faux (Justifier la réponse)
La fonction f définie sur ℝ par $f(x) = xe^{2x^2+1}$ est négative sur $]-\infty; 0]$ et positive sur $[0; +\infty[$
e^{2x^2+1} étant strictement positif, $f(x)$ est du signe de x.

Exercice 2

Partie I- Restitution Organisée des Connaissances

Prérequis:

Le plan est rapporté à un repère orthonormal direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$.
a, b, c et d sont des nombres complexes.
$a \neq b$ et $c \neq d$, a, b, c et d étant les affixes respectives des points A, B, C, D , on a:
$\arg\left(\dfrac{b-a}{d-c}\right) = (\overrightarrow{CD}, \overrightarrow{AB})\ [2\pi]$, et $\left|\left(\dfrac{b-a}{d-c}\right)\right| = \dfrac{AB}{CD}$
Les nombres complexes z de module 1 et d'argument θ peuvent s'écrire $z = e^{i\theta}$

Question:

r est la rotation de centre Ω d'affixe ω et d'angle θ

Soit M un point d'affixe z et M' d'affixe z', démontrer que $z' = e^{i\theta}(z - \omega) + \omega$.

Si $M = \Omega$ alors $M' = \Omega$, d'où, $z' = z = \omega$, l'égalité $z' = e^{i\theta}(z - \omega) + \omega$ est vérifiée.

Si $M \neq \Omega$, on a: $(\overrightarrow{\Omega M}, \overrightarrow{\Omega M'}) = \theta\ [2\pi]$ et $\Omega M = \Omega M'$, soit: $\dfrac{\Omega M'}{\Omega M} = 1$

D'après les prérequis, on a: $\arg\left(\dfrac{z'-\omega}{z-\omega}\right) = \theta\ [2\pi]$ et $\left|\dfrac{z'-\omega}{z-\omega}\right| = 1$

Le nombre $\dfrac{z'-\omega}{z-\omega}$ est donc le nombre complexe de module 1 et d'argument θ, d'où, $\dfrac{z'-\omega}{z-\omega} = e^{i\theta}$

En linéarisant, il vient: $z' - \omega = e^{i\theta}(z - \omega)$, soit, $z' = e^{i\theta}(z - \omega) + \omega$.

Partie II-

Le plan est rapporté à un repère orthonormal direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$. (unité graphique : 2cm)
Le point A a pour affixe $a = -2i$, le point B a pour affixe $b = -\sqrt{3} + i$, le point C a pour affixe $c = \sqrt{3} + i$
1) Donner les écritures exponentielles des nombres a, b et c.

$a = 2\,e^{i\frac{3\pi}{2}}$,

$|b| = \sqrt{3+1} = 2$, et, $\cos\theta_b = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ et $\sin\theta_b = \dfrac{1}{2}$, donc, $\theta_b = \dfrac{5\pi}{6}$ $[2\pi]$, on a donc: $b = 2\,e^{i\frac{5\pi}{6}}$

$|c| = \sqrt{3+1} = 2$, et, $\cos\theta_c = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ et $\sin\theta_c = \dfrac{1}{2}$, donc, $\theta_c = \dfrac{\pi}{6}$ $[2\pi]$, on a donc: $b = 2\,e^{i\frac{\pi}{6}}$

2) Montrer que les points A, B, C sont sur un cercle Γ dont on précisera le centre et le rayon.
Comme $|a| = |b| = |c| = 2$, les points A, B et C sont sur le cercle Γ de centre O et de rayon 2.

3) Faire une figure en plaçant A et Γ, puis construire B et C.
Les points B et C sont les points de Γ d'ordonnée 1. (On trace la droite d'équation $y = 1$ ...)

4) a) Montrer que $\dfrac{b-a}{c-a} = \dfrac{1+\sqrt{3}\,\mathrm{i}}{2}$.

$$\frac{b-a}{c-a} = \frac{-\sqrt{3}+3\,\mathrm{i}}{\sqrt{3}+3\,\mathrm{i}} = \frac{(-\sqrt{3}+3\,\mathrm{i})(\sqrt{3}-3\,\mathrm{i})}{3+9} = \frac{-3+6\sqrt{3}\,\mathrm{i}+9}{12} = \frac{1+\sqrt{3}\,\mathrm{i}}{2}$$

b) Interpréter géométriquement ce résultat en terme de rotation.

Or, $\dfrac{1+\sqrt{3}\,\mathrm{i}}{2} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}$, on obtient donc: $b - a = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}(c - a)$

Le point B est donc l'image de C dans la rotation de centre A et d'angle $\dfrac{\pi}{3}$.

c) Quelle est la nature du triangle ABC?

ABC est donc un triangle équilatéral puisque $AB = AC$ et $\widehat{BAC} = \dfrac{\pi}{3}$

5) Soit t la translation de vecteur $\overrightarrow{BA}$.

a) Déterminer l'affixe d du point image de C par t.

$d = c + z_{\overrightarrow{BA}} = \sqrt{3} + \mathrm{i} - 2\mathrm{i} + \sqrt{3} - \mathrm{i} = 2\sqrt{3} - 2\mathrm{i}$

b) Quelle est la nature du quadrilatère $ABCD$?

Puisque $\overrightarrow{BA} = \overrightarrow{CD}$, le quadrilatère $ABCD$ est un parallélogramme
Puisque $AB = AC$, ce quadrilatère est un losange.

c) Sans aucun calcul, prouver que $\dfrac{c-a}{d-b}$ est un imaginaire pur.

Les diagonales (AC) et (BD) sont donc perpendiculaires et par conséquent un argument de $\dfrac{c-a}{d-b}$ est $\dfrac{\pi}{2}$ $[\pi]$.

$\dfrac{c-a}{d-b}$ est un imaginaire pur.

Exercice 3

Une urne contient 5 boules indiscernables au toucher: deux vertes et trois rouges.

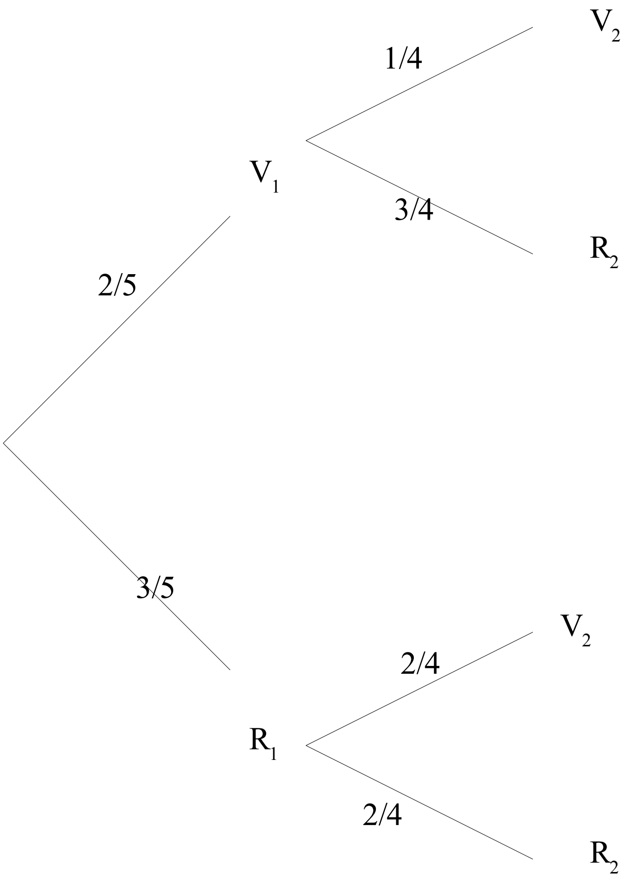
(Dans chacune des parties, un arbre pondéré sera suffisant pour justifier les résultats)

Partie I-

On tire successivement et sans remise deux boules de l'urne.

On note X la variable aléatoire égale au nombre de boules vertes figurant dans le tirage.

1- Vérifier que $P(X = 0) = \dfrac{3}{10}$ et déterminer la loi de probabilité de X.



L'indice indique le n° du tirage

$P(X = 0) = P(R_1 \cap R_2) = P(R_1) \times P_{R1}(R_2) = \dfrac{3}{5} \times \dfrac{2}{4} = \dfrac{3}{10}$

Les valeurs prises par X sont 0, 1 et 2.

x_i	0	1	2	Total
$P(X = x_i) = p_i$	$\dfrac{3}{10}$	$\dfrac{3}{5} \times \dfrac{2}{4} + \dfrac{2}{5} \times \dfrac{3}{4} = \dfrac{6}{10}$	$\dfrac{2}{5} \times \dfrac{1}{4} = \dfrac{1}{10}$	1
$p_i x_i$	0	$\dfrac{6}{10}$	$\dfrac{2}{10}$	$E(X) = \dfrac{8}{10} = \dfrac{4}{5}$

2) Calculer $E(X)$

3) Sachant que l'on a tiré exactement une boule verte, quelle est la probabilité que cette boule verte soit la première tirée ?

On a tiré exactement une boule verte: $P(X = 1) = \dfrac{6}{10}$

La première est verte et on a tiré une seule boule verte est l'événement: $V_1 \cap R_2$ de probabilité:

$P(V_1 \cap R_2) = \dfrac{2}{5} \times \dfrac{3}{4} = \dfrac{3}{10}$

$P_{(X=1)}(V_1) = \dfrac{3}{10} \times \dfrac{10}{6} = \dfrac{1}{2}$

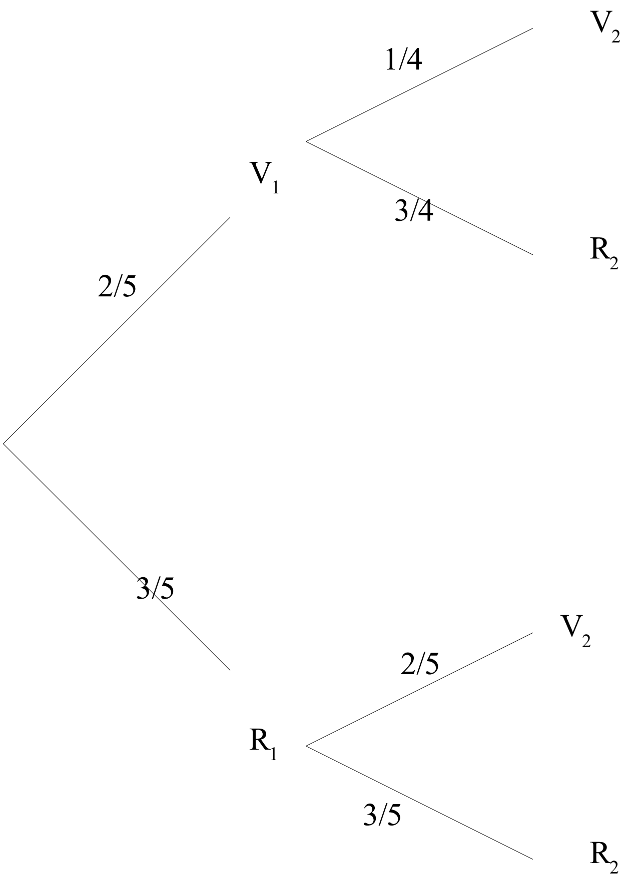
Partie II-

On effectue deux tirages successifs d'une boule en respectant la règle suivante :

si la boule tirée est rouge, on la remet dans l'urne ; si elle est verte, on ne la remet pas.

On note Y la variable aléatoire égale au nombre de boules vertes figurant dans le tirage.

1- Déterminer la loi de probabilité de Y.



2) Calculer $E(Y)$

Les valeurs prises par X sont 0, 1 et 2.

y_i	0	1	2	Total
$P(Y = y_i) = p_i$	$\frac{3}{5} \times \frac{3}{5} = \frac{9}{25} = \frac{18}{50}$	$\frac{3}{5} \times \frac{2}{5} + \frac{2}{5} \times \frac{3}{4} = \frac{27}{50}$	$\frac{2}{5} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{10} = \frac{5}{50}$	1
$p_i y_i$	0	$\frac{27}{50}$	$\frac{10}{50}$	$E(Y) = \frac{37}{50}$

3) Sachant que l'on a tiré exactement une boule verte, quelle est la probabilité que cette boule verte soit la première tirée ?

On a tiré exactement une boule verte: $P(Y = 1) = \frac{27}{50}$

La première est verte et on a tiré une seule boule verte est l'événement: $V_1 \cap R_2$ de probabilité:

$P(V_1 \cap R_2) = \frac{2}{5} \times \frac{3}{4} = \frac{3}{10}$

$P_{(X=1)}(V_1) = \frac{3}{10} \times \frac{50}{27} = \frac{5}{9}$

DM5 à rendre le lundi 6 janvier 2011

A et B page 102; C page 222; E page 317

Tous ces exercices sont de es exercices type bac ... à travailler sérieusement ...