Exercice 1 ***5 points***

Le plan complexe est rapporté au repère orthonormal direct $(O\,;\vec{u},\vec{v})$

1. On considère le point I d'affixe i et le point A d'affixe $z_A = \sqrt{3} + 2i$.

a. Montrer que le point A appartient au cercle Γ de centre le point I et de rayon 2.

Sur une figure (unité graphique 1 cm), qu'on complètera au fur et à mesure de l'exercice, placer le point I, tracer le cercle Γ, puis construire le point A.

b. On considère la rotation r de centre le point I et d'angle $\dfrac{\pi}{2}$.

Démontrer que le point B image du point A par la rotation r a pour affixe $z_B = -1 + i(\sqrt{3} + 1)$.

Justifier que le point B appartient au cercle Γ.

c. Calculer l'affixe du point C symétrique du point A par rapport au point I.

d. Quelle est la nature du triangle ABC? Justifier.

2. *Dans cette question, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.*

On considère les points E et F tels que : $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{IB}$ et $\overrightarrow{AF} = \overrightarrow{BI}$.

Que peut-on conjecturer pour les droites (BF) et (CE) ?

Valider cette conjecture à l'aide d'une démonstration.

Exercice 2 ***6 points***

Partie 1

Soit g la fonction définie sur $[0\,;+\infty[$ par $g(x) = e^x - xe^x + 1$.

1. Déterminer la limite de g en $+\infty$.

2. Étudier les variations de la fonction g, et, donner le tableau de variations de g.

3. a. Démontrer que l'équation $g(x) = 0$ admet sur $[0\,;+\infty[$ une unique solution. On note α cette solution.

b. À l'aide de la calculatrice, déterminer un encadrement d'amplitude 10^{-2} de α.

c. Démontrer que $e^{\alpha} = \dfrac{1}{\alpha - 1}$.

4. Déterminer le signe de $g(x)$ suivant les valeurs de x.

Partie 2

Soit A la fonction définie et dérivable sur $[0\,;+\infty[$ telle que $A(x) = \dfrac{4x}{e^x + 1}$.

1. Démontrer que pour tout réel x positif ou nul, $A'(x)$ a le même signe que $g(x)$, où g est la fonction définie dans la partie 1.

2. En déduire les variations de la fonction A sur $[0\,;+\infty[$.

Partie 3

On considère la fonction f définie sur $[0\,;+\infty[$ par $f(x) = \dfrac{4}{e^x+1}$.

On note $(\mathscr{C})$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O\,;\vec{i},\vec{j})$.

La figure est donnée en annexe.

Pour tout réel x positif ou nul, on note :

M le point de $(\mathscr{C})$ de coordonnées $(x\,;f(x))$,

P le point de coordonnées $(x\,;0)$,

Q le point de coordonnées $(0\,;f(x))$.

1. Démontrer que l'aire du rectangle $OPMQ$ est maximale lorsque M a pour abscisse α.

On rappelle que le réel α a été défini dans la ***partie 1****.*

2. Le point M a pour abscisse α.

La tangente (T) en M à la courbe $(\mathscr{C})$ est-elle parallèle à la droite (PQ) ?

Dans cette question, toute trace de recherche,même incomplète, ou d'initiative, même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.

Exercice 3 ***5 points***

PARTIE A - Restitution organisée des connaissances

On suppose connues la dérivée de la fonction exponentielle et la formule de dérivation de $u \circ v$ ainsi que ses conditions d'utilisation.

On suppose savoir que la fonction ln est dérivable sur $]0\,;+\infty[$ et que pour tout x de $]0\,;+\infty[$ on a : $\exp(\ln x) = x$.

À partir de ces quatre arguments, montrer que la dérivée de la fonction ln est la fonction définie sur $]0\,;+\infty[$ qui à x associe $\dfrac{1}{x}$.

PARTIE B - Étude de fonction

On considère la fonction f définie sur $]0\,;+\infty[$ par $f(x) = x + \dfrac{\ln x}{x}$.

On note $\mathscr{C}$ la courbe représentative de la fonction f dans le plan muni d'un repère orthonormal $(O\,;\vec{i},\vec{j})$ d'unité graphique 3 cm.

I - Étude d'une fonction auxiliaire

On considère la fonction g définie sur $]0\,;+\infty[$ par $g(x) = x^2 + 1 - \ln x$.

1. Étudier les variations de g sur $]0\,;+\infty[$.

2. En déduire le signe de g sur $]0\,;+\infty[$.

II - Étude de la fonction f et tracé de sa courbe représentative $\mathscr{C}$

1. Déterminer la limite en 0 de la fonction f. Quelle est l'interprétation graphique de ce résultat ?

2. Déterminer la limite en $+\infty$ de f, puis montrer que la droite D d'équation $y = x$ est asymptote à la courbe $\mathscr{C}$.

3. Soit f' la fonction dérivée de la fonction f .Calculer $f'(x)$ pour tout réel x de $]0 ; +\infty[$.

4. En déduire le sens de variation de f sur $]0 ; +\infty[$ puis dresser le tableau de variations de la fonction f .

5. Déterminer le point A de la courbe $\mathscr{C}$ en lequel la tangente T est parallèle à la droite D.

6. Dans le repère $(O;\vec{i},\vec{j})$ tracer les droites D et T et la courbe $\mathscr{C}$.

Exercice 5 ***4 points***

Cet exercice est un questionnaire à choix multiple (QCM).
Pour chaque question une seule des quatre propositions est exacte. Le candidat portera sur la copie, sans justification, le numéro de la question et la réponse choisie.

Il est attribué un point si la réponse est exacte, aucun point n'est enlevé pour une réponse inexacte ou une absence de réponse.

Dans une fête foraine, Luc décide de participer à un jeu qui se déroule de la manière suivante :

Luc tire au hasard un jeton dans une urne contenant quatre jetons rouges et deux jetons bleus.

• Si le jeton tiré est bleu. Luc gagne et le jeu s'arrête ; sinon, sans remettre dans l'urne le premier jeton tiré, il tire au hasard un deuxième jeton dans l'urne.

• Si le deuxième jeton tiré est bleu, Luc gagne et le jeu s'arrête ; sinon, sans remettre dans l'urne les deux jetons précédents, il tire au hasard un troisième jeton dans l'urne.

• Si le troisième jeton est bleu, Luc gagne et le jeu s'arrête ; sinon, le jeu s'arrête et Luc a perdu.

1. La probabilité que Luc gagne à ce jeu à l'issue du deuxième tirage est :

• $\frac{19}{15}$ • $\frac{2}{5}$ • $\frac{11}{15}$ • $\frac{4}{15}$

2. La probabilité que Luc gagne à ce jeu à l'issue du troisième tirage est :

• $\frac{1}{5}$ • $\frac{1}{2}$ • $\frac{2}{15}$ • $\frac{1}{9}$

3. La probabilité que Luc gagne à ce jeu après avoir effectué au moins deux tirages est :

• $\frac{3}{5}$ • $\frac{4}{15}$ • $\frac{7}{15}$ • $\frac{1}{3}$

4. La probabilité que Luc gagne à ce jeu, sachant qu'il a obtenu un jeton rouge au premier tirage est :

• $\frac{7}{10}$ • $\frac{7}{15}$ • $\frac{11}{15}$ • $\frac{5}{9}$

Annexe de l'exercice 2