Exercice 1 ***5 points*** ***France septembre 2010*** ***5 points***

Le plan complexe est rapporté au repère orthonormal direct $(O\,;\vec{u},\vec{v})$

1. *On considère le point I d'affixe i et le point A d'affixe* $z_A = \sqrt{3} + 2i$.

a. *Montrer que le point A appartient au cercle Γ de centre le point I et de rayon 2.*

$IA = |z_A - \mathrm{i}| = |\sqrt{3} + \mathrm{i}| = \sqrt{(\sqrt{3})^2 + 1^2} = 2$ CQFD

Sur une figure (unité graphique 1 cm), qu'on complètera au fur et à mesure de l'exercice, placer le point I, tracer le cercle Γ, puis construire le point A.

(Voir fin de l'exercice)

On construit le point A en construisant le point d'intersection de Γ et de la droite d'équation $y = 2$

b. *On considère la rotation r de centre le point I et d'angle* $\frac{\pi}{2}$.

Démontrer que le point B image du point A par la rotation r a pour affixe $z_B = -1 + i(\sqrt{3} + 1)$.

L'écriture complexe de la rotation r est donnée par: $z' = e^{i\frac{\pi}{2}}(z - z_I) + z_I = \mathrm{i}(z - \mathrm{i}) + \mathrm{i}$

$z_B = \mathrm{i}(z_A - \mathrm{i}) + \mathrm{i} = \mathrm{i}(\sqrt{3} + \mathrm{i}) + \mathrm{i} = ... = -1 + \mathrm{i}(\sqrt{3} + 1)$.

Justifier que le point B appartient au cercle Γ.

Puisque B est l'image de A par une rotation de centre I, on a: $IB = IA = 2$

c. *Calculer l'affixe du point C symétrique du point A par rapport au point I.*

I est par conséquent le milieu de $[AC]$, d'où, $\mathrm{i} = \dfrac{z_C + 2\sqrt{3} + 2\mathrm{i}}{2}$

$z_C = -\sqrt{3}$

ou encore

C est l'image de A dans la rotation de centre I et d'angle π, d'où,

puisque $e^{i\pi} = -1$

$z_C = -1(z_A - z_I) + z_I = ... = -\sqrt{3}$

d. Quelle est la nature du triangle ABC? Justifier.

Par symétrie de centre I, centre du cercle Γ, le point C est sur le cercle Γ et $[AC]$ est un diamètre.

Le triangle ABC inscrit dans le demi-cercle de diamètre $[AC]$ est rectangle en B.

D'autre part: D'après la rotation r, (IB) est perpendiculaire à $[AC]$ en son milieu I.

(IB) est donc la médiatrice de $[AC]$.

On a alors: $BA = BC$

Le triangle ABC est isocèle en B.

Conclusion: Le triangle ABC est rectangle et isocèle en B.

2. *Dans cette question, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.*

On considère les points E et F tels que : $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{IB}$ et $\overrightarrow{AF} = \overrightarrow{BI}$.

Que peut-on conjecturer pour les droites (BF) et (CE) ?

Il semble que les droites (BF) et (CE) sont perpendiculaires.

Valider cette conjecture à l'aide d'une démonstration.

Des idées:

Observations:

On a les égalités de longueur évidentes:

$AE = IB = AF = 2$

$IB = IA = IC = 2$

A est le milieu de [EF] puisque les vecteurs $\overrightarrow{AE}$ et $\overrightarrow{AF}$ sont opposés.

I, E, F sont sur le cercle de centre A et de rayon AI (de diamètre [EF]

Le triangle IEF est donc un triangle rectangle en I.

(AE) et (BI) sont parallèles, puisque $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{IB}$

....

avec la rotation r

A est le milieu de [EF] puisque les vecteurs $\overrightarrow{AE}$ et $\overrightarrow{AF}$ sont opposés.

(AE) et (BI) sont parallèles, puisque $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{IB}$

La droite (AC) étant perpendiculaire à (BI) est perpendiculaire à [EF] en son milieu A.

Le point I de (AC) est donc équidistant de E et de F.

Les triangles IAE et IAF sont des triangles rectangles et isocèles en A

Le triangle IEF est donc un triangle rectangle et isocèle en I.

C est l'image de B par r.

E est l'image de F par r.

La droite (CE) image par r de la droite (BF) sont donc perpendiculaires (angle de la rotation vaut $\frac{\pi}{2}$)

Avec les affixes:

$z_{\overrightarrow{IB}} = -1 + \mathrm{i}\sqrt{3}$

On a donc: $z_E = z_A + z_{\overrightarrow{IB}} = \sqrt{3} + 2\mathrm{i} - 1 + \mathrm{i}\sqrt{3} = \sqrt{3} - 1 + \mathrm{i}(2 + \sqrt{3})$

$z_F = z_A - z_{\overrightarrow{IB}} = \sqrt{3} + 2\mathrm{i} + 1 - \mathrm{i}\sqrt{3} = \sqrt{3} + 1 + \mathrm{i}(2 - \sqrt{3})$

$z_F - z_B = \sqrt{3} + 1 + \mathrm{i}(2 - \sqrt{3}) - (-1 + \mathrm{i}(\sqrt{3} + 1)) = \sqrt{3} + 2 + \mathrm{i}(1 - 2\sqrt{3})$

$z_E - z_C = \sqrt{3} - 1 + \mathrm{i}(2 + \sqrt{3}) - (-\sqrt{3})) = 2\sqrt{3} - 1 + \mathrm{i}(2 + \sqrt{3})$

En multipliant par i l'affixe $z_E - z_C$, on trouve $z_F - z_B$. Ce qui prouve la conjecture.

Avec le produit scalaire:

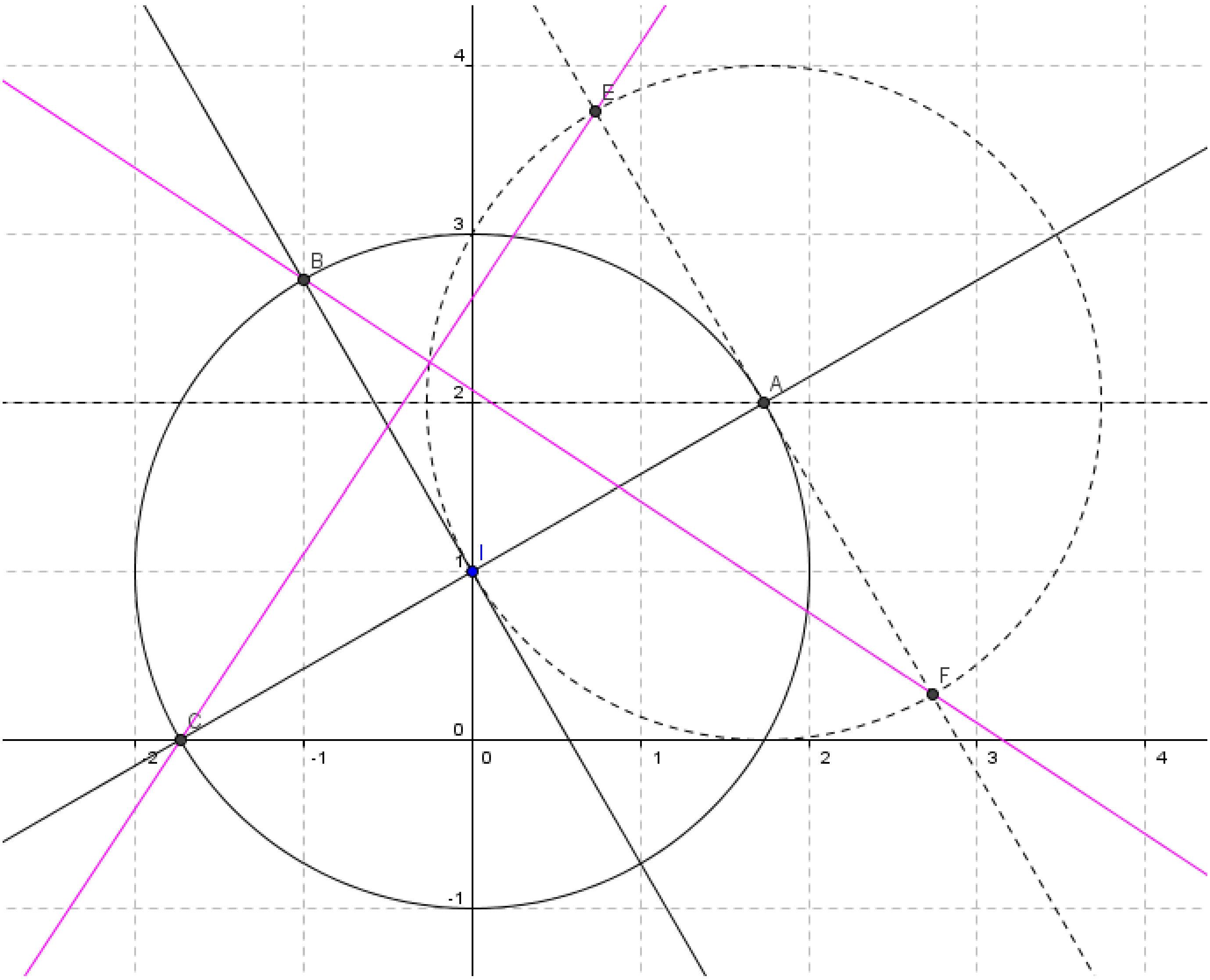
$\overrightarrow{BF}\begin{pmatrix}\sqrt{3}+1-(-1)\\2-\sqrt{3}-(\sqrt{3}+1)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\sqrt{3}+2\\1-2\sqrt{3}\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{CE}\begin{pmatrix}\sqrt{3}-1-(-\sqrt{3})\\2+\sqrt{3}-0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\sqrt{3}-1\\2+\sqrt{3}\end{pmatrix}$

Le produit scalaire $\overrightarrow{BF}\cdot\overrightarrow{CE}$ = ... = 0 puisque $1 - 2\sqrt{3}$ et $2\sqrt{3} - 1$ sont des nombres opposés.

Avec les coefficients directeurs des droites:

Soit $m = \dfrac{y_F - y_B}{x_F - x_B} = \dfrac{1-2\sqrt{3}}{\sqrt{3}+2}$ et $m' = \dfrac{y_E - y_C}{x_E - x_C} = \dfrac{2+\sqrt{3}}{2\sqrt{3}-1}$

Le produit mm ' = ... = –1, d'où, ...



Exercice 2 Polynésie septembre 2010 6 points

Partie 1

Soit g la fonction définie sur [0 ; +∞[par g (x) = $e^x - xe^x + 1$.

***1.** Déterminer la limite de g en +∞.*

***Remarque sur la méthode:** l'expression initiale de g (x) mène à une forme indéterminée qui ne permet pas de conclure.*

Or, les études vues en cours suggèrent une factorisation.

Deux " réécritures " possibles de g (x) qui permettent de conclure:

$g(x) = e^x\left(1 - x + \frac{1}{x}\right)$ ou $g(x) = (1 - x)e^x + 1$

En prenant $g(x) = (1 - x)e^x + 1$

$\lim\limits_{x \to +\infty} 1 - x = -\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} e^x = +\infty$, d'où, par produit: $\lim\limits_{x \to +\infty} (1 - x)e^x = -\infty$.

Conclusion: $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = -\infty$

***2.** Étudier les variations de la fonction g, et, donner le tableau de variations de g .*

Pour tout $x \geqslant 0$, $g'(x) = e^x - (1.\ e^x + x.\ e^x) = -x\ e^x$

Comme $e^x > 0$, le signe de $g'(x)$ est celui de $-x$, d'où, $g'(x) < 0$ sur $[0; +\infty[= D_g$

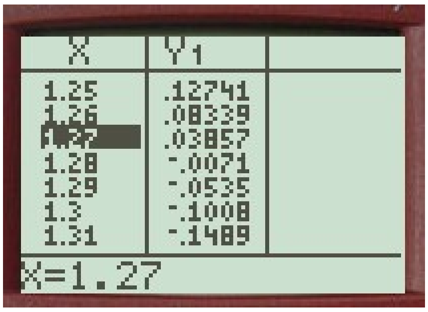
g est strictement décroissante sur D_g et $g(0) = 1 - 0 + 1 = 2$

x	0	$+\infty$
$g'(x)$	–	
$g(x)$	2 ↘	$-\infty$

***3. a.** Démontrer que l'équation g (x) = 0 admet sur [0 ; +∞[une unique solution. On note α cette solution.*

g est dérivable , donc, continue sur [0 ; +∞[
g est strictement décroissante sur [0 ; +∞[
$0 \in\ ]-\infty; 2]$
d'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires (ou théorème de la bijection), l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution α appartenant à [0; +∞[.

***b.** À l'aide de la calculatrice, déterminer un encadrement d'amplitude 10^{-2} de α.*



Sur le tableur, on lit: $g(1{,}27) \approx 0{,}038$ d'où, $g(1{,}27) > g(\alpha)$

$g(1{,}28) \approx -0{,}007$ d'où, $g(1{,}28) < g(\alpha)$

$1,27 < \alpha < 1,28$

c. *Démontrer que* $e^{\alpha} = \dfrac{1}{\alpha - 1}$.

α est défini par l'égalité: $g(\alpha) = 0$,
soit: $(1 - \alpha)e^{\alpha} + 1 = 0$.

Comme $\alpha \neq 1$, il vient: $e^{\alpha} = \dfrac{1}{\alpha - 1}$.

4. *Déterminer le signe de g (x) suivant les valeurs de x.*

g étant strictement décroissante sur $[0; +\infty[$, et, comme $g(\alpha) = 0$, on a:
si $x \in [0; \alpha[$ alors $g(x) > 0$
Si $x > \alpha$ alors $g(x) < 0$

Partie 2

Soit A la fonction définie et dérivable sur [0 ; +∞[telle que $A(x) = \dfrac{4x}{e^x + 1}$.

1. *Démontrer que pour tout réel x positif ou nul, A ' (x) a le même signe que g (x), où g est la fonction définie dans la partie 1.*

sur $[0 ; +\infty[$, on a: $A(x) = \dfrac{4x}{e^x + 1} = 4 \times \dfrac{x}{e^x + 1}$

d'où, $A'(x) = 4 \times \dfrac{1 \times (e^x + 1) - e^x \times x}{(e^x + 1)^2} = 4 \times \dfrac{g'(x)}{(e^x + 1)^2}$ CQFD (puisque $\dfrac{4}{(e^x + 1)^2} > 0$)

2. *En déduire les variations de la fonction A sur [0 ; +∞[.*

D'après la conclusion de la **partie 1**/, on a: si $x \in [0; \alpha[$ alors $A'(x) > 0$ et si $x > \alpha$ alors $A'(x) < 0$

A strictement croissante sur $[0; \alpha]$ et A strictement décroissante sur $[\alpha; +\infty[$

(Retenir que la fonction A atteint son maximum A(α) en α.)

(Le maximum vaut $A(\alpha) = 4 \times \dfrac{\alpha}{e^{\alpha} + 1}$.

Or, $g(\alpha) = e^{\alpha} - \alpha e^{\alpha} + 1 = 0$, *d'où,* $e^{\alpha} + 1 = \alpha . e^{\alpha}$

$A(\alpha) = \dfrac{4}{e^{\alpha}} = 4(\alpha - 1))$

Partie 3

On considère la fonction f définie sur [0 ; +∞[par $f(x) = \dfrac{4}{e^x + 1}$.

On note (𝒞) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O ; \vec{i}, \vec{j})$.

La figure est donnée en annexe.

Pour tout réel x positif ou nul, on note :

M le point de (𝒞) de coordonnées (x ; f (x)),

P le point de coordonnées (x ; 0),

Q le point de coordonnées (0 ; f (x)).

***1.** Démontrer que l'aire du rectangle OPMQ est maximale lorsque M a pour abscisse α.*

On rappelle que le réel α a été défini dans la ***partie 1****.*

L'aire du rectangle est donnée par: $OP \times PM$

Comme $x \geqslant 0$ et $f(x) \geqslant 0$, on a: $OP = x$ et $PM = f(x)$, d'où, l'aire du rectangle vaut: $x \times f(x) = A(x)$ étudiée à la **partie 2/**

L'étude des variations de la fonction A montre que l'aire est maximale lorsque $x = \alpha$.

***2.** Le point M a pour abscisse α.*

La tangente (T) en M à la courbe (𝒞) est-elle parallèle à la droite (PQ) ?

Dans cette question, toute trace de recherche,même incomplète, ou d'initiative, même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.

le coefficient directeur de la tangente T est $f'(\alpha)$

Or, $f = \dfrac{1}{u}$ avec $u(x) = e^x$ d'où, $f' = \dfrac{-u'}{u^2}$

$$f'(x) = 4 \times \frac{-e^x}{(e^x+1)^2}$$

On a donc: $f'(\alpha) = 4 \times \dfrac{-e^\alpha}{(e^\alpha+1)^2}$

Le coefficient directeur de la droite (PQ) est: $m = \dfrac{y_Q - y_P}{x_Q - x_P} = \dfrac{f(\alpha)}{-\alpha}$

La différence $f'(\alpha) - m = 4 \times \dfrac{-e^\alpha}{(e^\alpha+1)^2} + \dfrac{4}{\alpha(e^\alpha+1)} = \dfrac{4\alpha((-e^\alpha)+(e^\alpha+1))}{\alpha(e^\alpha+1)^2} = \dfrac{4g(\alpha)}{\alpha(e^\alpha+1)^2} = 0$

Les coefficients directeurs étant égaux, les droites T et (PQ)sont parallèles.
Selon les égalités que vous avez déjà obtenues aux questions précédentes, la rédaction de cette dernière égalité sera plus ou moins longue, mais, dans tous les cas, vous devez avoir conscience de ce qu'il faut démontrer et vous lancez dans les calculs de la dérivée de f et ceux du coefficient directeur de la droite (PQ)

Exercice 3 ***Antilles septembre 2010 (sans la partie 3)*** ***5 points***

PARTIE A - Restitution organisée des connaissances

On suppose connues la dérivée de la fonction exponentielle et la formule de dérivation de u ∘ v ainsi que ses conditions d'utilisation.

On suppose savoir que la fonction ln est dérivable sur]0 ; +∞[et que pour tout x de]0 ; +∞[on a : exp(lnx) = x.

À partir de ces quatre arguments, montrer que la dérivée de la fonction ln est la fonction définie sur]0 ; +∞[qui à x associe $\dfrac{1}{x}$.

On pose: pour tout $x > 0$, $f(x) = \exp(\ln(x))$ et $g(x) = x$

L'égalité sur $]0; +\infty[$ des fonctions f et g implique l'égalité des fonctions f' et g'.

Pour tout $x > 0, f'(x) = \ln'(x) \times \exp'(\ln(x) = \ln'(x) \times \exp(\ln(x) = \ln'(x) \times x$

et $g'(x) = 1$

L'égalité, pour tout $x > 0, f'(x) = g'(x)$ amène le résultat: pour tout $x > 0$, $\ln'(x) = \dfrac{1}{x}$

PARTIE B - Étude de fonction

On considère la fonction f définie sur]0 ; +∞[par $f(x) = x + \dfrac{\ln x}{x}$.

On note $\mathscr{C}$ *la courbe représentative de la fonction f dans le plan muni d'un repère orthonormal* $(O ; \vec{i}, \vec{j})$ *d'unité graphique 3 cm.*

I - Étude d'une fonction auxiliaire

On considère la fonction g définie sur]0 ; +∞[par $g(x) = x^2 + 1 - \ln x$.

1. *Étudier les variations de g sur]0 ; +∞[.*

$$g'(x) = 2x + 0 - \frac{1}{x} = \frac{2x^2-1}{x} = \frac{2\left(x-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(x+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)}{x}$$

Rappel: $\dfrac{1}{\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

Comme $x > 0$, le signe de $g'(x)$ est celui de $x - \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

Sur $]0; \dfrac{\sqrt{2}}{2}]$, g est strictement décroissante

Sur $[\dfrac{\sqrt{2}}{2} ; +\infty[$, g est strictement croissante.

2. En déduire le signe de g sur $]0 ; +\infty[$.

Le minimum de g est atteint en $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ et vaut $g(\dfrac{\sqrt{2}}{2}) = \dfrac{1}{2} + 1 - \ln\dfrac{1}{\sqrt{2}} = \dfrac{3}{2} + \dfrac{1}{2}\ln 2$

Or, $1 < 2$ d'où, $0 < \ln 2$

Le minimum de g est strictement positif, d'où, g est strictement positive sur $]0; +\infty[$

II - Étude de la fonction f et tracé de sa courbe représentative $\mathscr{C}$

1. *Déterminer la limite en 0 de la fonction f . Quelle est l'interprétation graphique de ce résultat ?*

$\lim\limits_{x\to 0} \ln x = -\infty$ et $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \dfrac{1}{x} = +\infty$, d'où, $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \dfrac{\ln x}{x} = -\infty$.

Comme $\lim\limits_{x\to 0} x = 0$, par somme, on a: $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = -\infty$.

La droite d'équation $x = 0$ (axe des ordonnées est une asymptote à ($\mathscr{C}$).

2. *Déterminer la limite en +∞ de f, puis montrer que la droite D d'équation y = x est asymptote à la courbe* $\mathscr{C}$.

On sait (cours): $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{\ln x}{x} = 0$.

Comme $\lim\limits_{x\to +\infty} x = +\infty$, par somme, on a: $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = +\infty$.

D'autre part: $\lim\limits_{x\to+\infty} (f(x) - x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln x}{x} = 0.$

Par conséquent, la droite D d'équation $y = x$ est asymptote à la courbe $\mathscr{C}$

3. *Soit f' la fonction dérivée de la fonction f. Calculer $f'(x)$ pour tout réel x de $]0\,;+\infty[$.*

$$f'(x) = 1 + \frac{\frac{1}{x}\times x - 1\times \ln x}{x^2} = 1 + \frac{1-\ln x}{x^2} = \frac{x^2+1-\ln x}{x^2} = \frac{g(x)}{x^2}$$

4. *En déduire le sens de variation de f sur $]0\,;+\infty[$ puis dresser le tableau de variations de la fonction f.*

Comme $g(x) > 0$ (Voir I-2/), $f'(x) > 0$ et f est une fonction strictement croissante sur $]0; +\infty[$

5. *Déterminer le point A de la courbe $\mathscr{C}$ en lequel la tangente T est parallèle à la droite D.*

T est parallèle à D si et seulement si le coefficient directeur de T vaut 1.

On résout donc: $f'(x) = 1$

soit: $1 - \ln x = 0$

$f'(x) = 1$ si et seulement si $1 - \ln x = 0$ si et seulement si $x = \mathrm{e}$

Il existe un et un seul point A de coordonnées $(\mathrm{e}; f(\mathrm{e}))$ en lequel la tangente T est parallèle à la droite D.

$f(\mathrm{e}) = \mathrm{e} + \dfrac{1}{\mathrm{e}}$

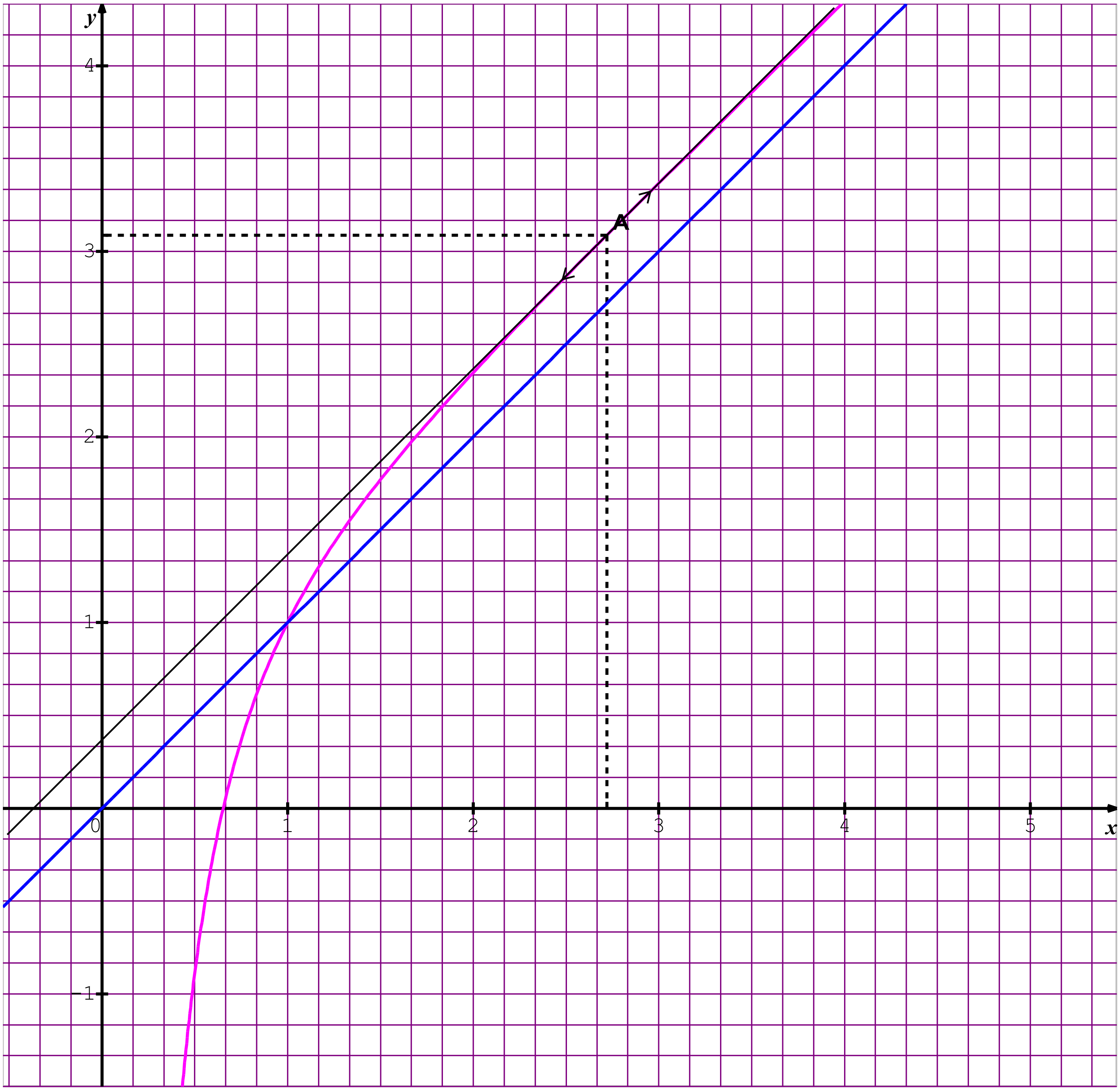
6. Dans le repère $(O;\vec{i},\vec{j})$ tracer les droites D et T et la courbe $\mathscr{C}$.

On n'oublie pas les unités données ...

On trace D et T ...

On n'oublie pas les asymptotes,

on affine par la recherche de quelques points ... notamment: si $x = 1$, $f(1) = 1$ et $f'(1) = 2$



Exercice 5 La Réunion septembre 2010 4 points

Cet exercice est un questionnaire à choix multiple (QCM).

Pour chaque question une seule des quatre propositions est exacte. Le candidat portera sur la copie, sans justification, le numéro de la question et la réponse choisie.

Il est attribué un point si la réponse est exacte, aucun point n'est enlevé pour une réponse inexacte ou une absence de réponse.

Dans une fête foraine, Luc décide de participer à un jeu qui se déroule de la manière suivante :

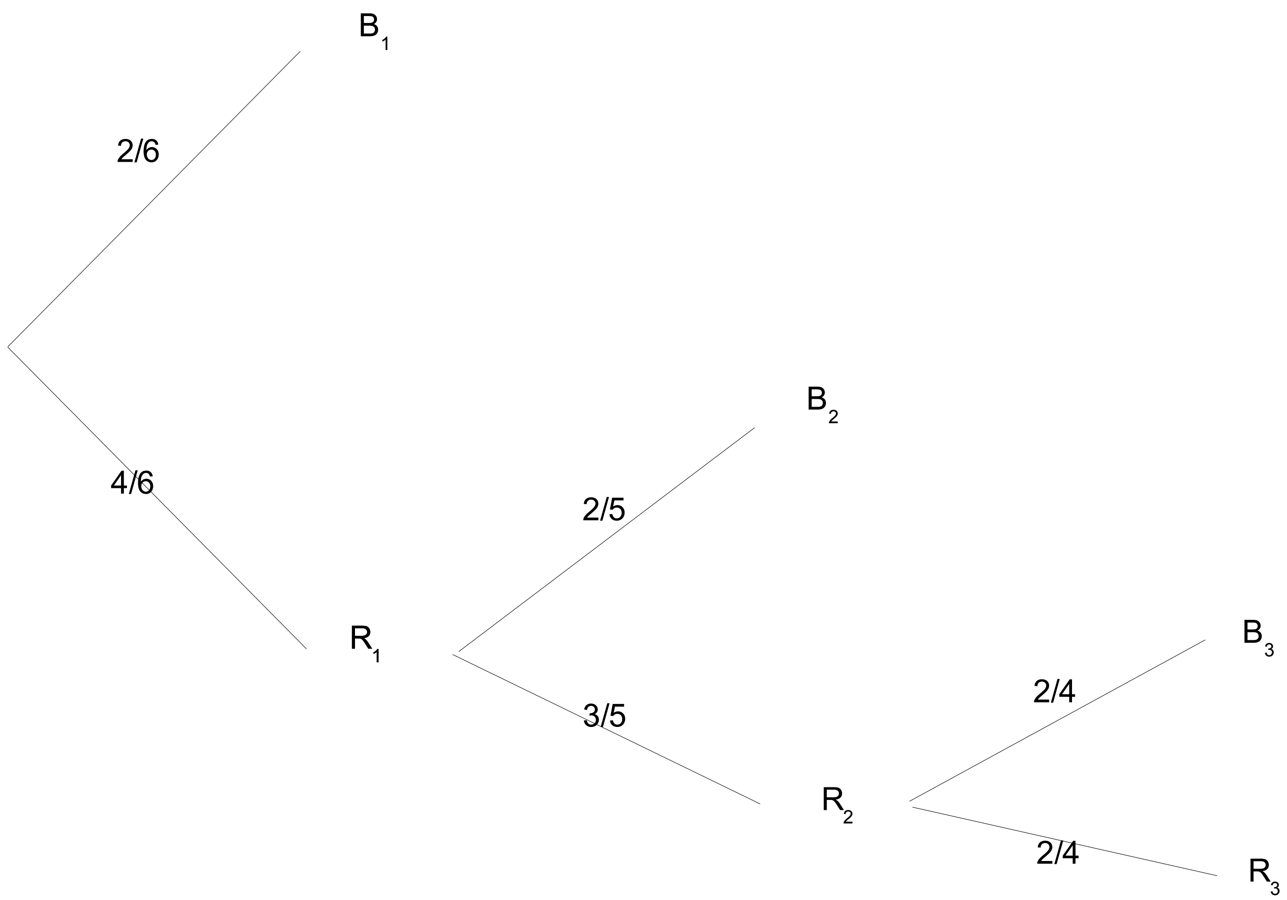
Luc tire au hasard un jeton dans une urne contenant quatre jetons rouges et deux jetons bleus.

• Si le jeton tiré est bleu. Luc gagne et le jeu s'arrête ; sinon, sans remettre dans l'urne le premier jeton tiré, il tire au hasard un deuxième jeton dans l'urne.

• Si le deuxième jeton tiré est bleu, Luc gagne et le jeu s'arrête ; sinon, sans remettre dans l'urne les deux jetons précédents, il tire au hasard un troisième jeton dans l'urne.

• Si le troisième jeton est bleu, Luc gagne et le jeu s'arrête ; sinon, le jeu s'arrête et Luc a perdu.

Un arbre pondéré



Les réponses correctes sont surlignées:

***1.** La probabilité que Luc gagne à ce jeu à l'issue du deuxième tirage est :*

• $\frac{19}{15}$ • $\frac{2}{5}$ • $\frac{11}{15}$ • $\frac{4}{15}$

Preuve: On cherche $P(R_1 \cap B_2) = \frac{4}{6} \times \frac{2}{5} = \frac{4}{15}$

***2.** La probabilité que Luc gagne à ce jeu à l'issue du troisième tirage est :*

• $\frac{1}{5}$ • $\frac{1}{2}$ • $\frac{2}{15}$ • $\frac{1}{9}$

Preuve: On cherche $P(R_1 \cap R_2 \cap B_3) = \frac{4}{6} \times \frac{3}{5} \times \frac{2}{4} = \frac{1}{5}$

***3.** La probabilité que Luc gagne à ce jeu après avoir effectué au moins deux tirages est :*

• $\frac{3}{5}$ • $\frac{4}{15}$ • $\frac{7}{15}$ • $\frac{1}{3}$

Preuve: On fait donc la somme des deux résultats précédents: $\frac{4}{15} + \frac{1}{5} = \frac{7}{15}$

4. *La probabilité que Luc gagne à ce jeu, sachant qu'il a obtenu un jeton rouge au premier tirage est :*

- $\frac{7}{10}$
- $\frac{7}{15}$
- $\frac{11}{15}$
- $\frac{5}{9}$

Preuve: On cherche: $P_{R1}(\text{Bleu}) = \dfrac{P(\text{ effectuer au moins deux tirages })}{P(R_1)} = \frac{7}{15} \times \frac{6}{4} = \frac{7}{10}$