Quelques définitions et propriétés qui peuvent être utiles

$(O\,;\,\vec{i}\,,\vec{j}\,,\vec{k})$ étant un repère orthonormal de l'espace,

- Une équation (cartésienne) du plan $\mathscr{P}$ est de la forme $ax + by + cz + d = 0$ où au moins un des coefficients a, b, c, d est non nul.

Le vecteur $\vec{n}\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$ est un vecteur normal au plan $\mathscr{P}$.

- Une représentation paramétrique d'une droite est la traduction en géométrie analytique de l'égalité vectorielle donnant la colinéarité des vecteurs;

Pour tout point M d'une droite passant par A et de vecteur directeur $\vec{u}$, on a: $\overrightarrow{AM} = t\,\vec{u}$ où $t \in \mathbb{R}$.

- Une représentation paramétrique d'un plan est la traduction en géométrie analytique de l'égalité vectorielle donnant l'appartenance à un plan

Pour tout point M d'un plan passant par A et de vecteurs directeurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$, on a: $\overrightarrow{AM} = \alpha\vec{u} + \beta\vec{v}$ où $\alpha \in \mathbb{R}$ et $\beta \in \mathbb{R}$.

- $\vec{u}\cdot\vec{v} = \begin{cases} xx'+yy'+zz' \\ \|\vec{u}\|.\|\vec{v}\|.\cos(\vec{u}\,,\vec{v}) \\ \vec{u}.\overrightarrow{v'} \end{cases}$ où $\overrightarrow{v'}$ est le projeté orthogonal de $\vec{v}$ sur $\vec{u}$.

- G est le barycentre du système $\{(A, \alpha), (B, \beta), (C, \gamma)\}$ $\begin{cases} \alpha\overrightarrow{GA}+\beta\overrightarrow{GB}+\gamma\overrightarrow{GC}=\vec{0} \\ \alpha\overrightarrow{MA}+\beta\overrightarrow{MB}+\gamma\overrightarrow{MC}=(\alpha+\beta+\gamma)\overrightarrow{MG} \end{cases}$

<u>**Énoncé:**</u>

L'espace est rapporté à un repère orthonormal $(O\,;\,\vec{i}\,,\vec{j}\,,\vec{k})$.
Soit $\mathscr{P}$ le plan d'équation $3x + y - z - 1 = 0$

et $\mathscr{D}$ la droite dont une représentation paramétrique est: $\begin{cases} x=-t+1 \\ y=2t \\ z=-t+2 \end{cases}$ où $t \in \mathbb{R}$.

1) a) Donner un vecteur directeur $\vec{u}$ de la droite $\mathscr{D}$.
   b) Donner un vecteur normal $\vec{n}$ à $\mathscr{P}$.
   c) Montrer que $\vec{n}$ et $\vec{u}$ sont orthogonaux.
2) Montrer que tout point M de $\mathscr{D}$ est un point de $\mathscr{P}$.
3) Soit $C(1; 3; 2)$
   a) Le point C est-il un point de $\mathscr{P}$? Justifier.
   b) Déterminer une équation du plan Q orthogonal à $\mathscr{D}$ et passant par C.
   c) Démontrer que le point I, point d'intersection de $\mathscr{D}$ et Q, a pour coordonnées $I(0; 2; 1)$
4) Soit M un point de $\mathscr{D}$. (Les coordonnées de M sont $(-t + 1; 2t; -t + 2)$
   a) Vérifier que $CM^2 = 6t^2 - 12t + 9$
   b) Justifier que CI est la valeur minimale de CM lorsque t parcourt $\mathbb{R}$.
5) Soit $A(1; 0; 2)$, déterminer la nature du triangle ACI.
6) Calculer le réel $f(t) = \|\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MI}\|$ où M est le point défini à la question 4/