Exercice 1 ***(Bac S septembre 2010 La Réunion)***

L'espace est rapporté au repère orthonormal $\left(O\,;\,\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$.

On considère les plans P et Q d'équations respectives : $x + y + z = 0$ et $2x + 3y + z - 4 = 0$

1) Montrer que l'intersection des plans P et Q est la droite D dont une représentation paramétrique est :

$\begin{cases} x=-4-2t \\ y=4+t \\ z=t \end{cases}$ où t est un nombre réel.

Un point $M(x\,;y\,;z)$ appartient à D si et seulement si $\begin{cases} x+y+z=0 \\ 2x+3y+z-4=0 \end{cases}$

En posant $z = t$, on a :

$\begin{cases} x+y+z=0 \\ 2x+3y+z-4=0 \end{cases}$ équivaut à $\begin{cases} x=-y-t \\ 2(-y-t)+3y+t-4=0 \\ z=t \end{cases}$ équivaut à $\begin{cases} x=-y-t \\ y=4+t \\ z=t \end{cases}$ équivaut à $\begin{cases} x=-4-2t \\ y=4+t \\ z=t \end{cases}$

D est la droite passant par $B(-4\,;4\,;0)$ et de vecteur directeur $\vec{u}\begin{pmatrix}-2\\1\\1\end{pmatrix}$

2) Soit λ un nombre réel. On considère le plan P_λ d'équation : $(1-\lambda)(x+y+z)+\lambda(2x+3y+z-4)=0$

a) Vérifier que le vecteur $\vec{n}\,(1+\lambda\;;1+2\lambda\;;1)$ est un vecteur normal du plan P_λ.

En écrivant sous la forme $ax + by + cz + d = 0$, il vient :

$(1+\lambda)x+(1+2\lambda)y+z-4\lambda=0$

le vecteur $\vec{n}\,(1+\lambda\;;1+2\lambda\;;1)$ est donc un vecteur normal du plan P_λ.

b) Donner une valeur du nombre réel λ pour laquelle les plans P et P_λ sont confondus.

Dans la combinaison linéaire des équations de P et Q, $(1-\lambda)(x+y+z)+\lambda(2x+3y+z-4)=0$, il suffit de faire $\lambda = 0$, pour obtenir l'équation de P.

P et P_0 sont confondus.

c) Existe-t-il un nombre réel λ pour lequel les plans P et P_λ sont perpendiculaires ?

P et P_λ sont perpendiculaires si et seulement si leurs vecteurs normaux sont orthogonaux.

Un vecteur normal de P est : $\vec{n_P}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$.

On résout donc : $1\times(1+\lambda)+1\times(1+2\lambda)+1\times 1=0$

ce qui donne : $\lambda = -1$

P et P_{-1} sont perpendiculaires

Une équation de P_{-1} est : $-y + z + 4 = 0$

3) Déterminer une représentation paramétrique de la droite D', intersection des plans P et P_{-1}.

Montrer que les droites D et D' sont confondues.

Un point $M(x ; y ; z)$ appartient à D' si et seulement si $\begin{cases} x+y+z=0 \\ -y+z+4=0 \end{cases}$.

En posant $z = t'$, on a :

$\begin{cases} x+y+z=0 \\ -y+z+4=0 \end{cases}$ équivaut à $\begin{cases} x=-y-t' \\ y=t'+4 \\ z=t' \end{cases}$ équivaut à $\begin{cases} x=-4-2t' \\ y=4+t' \\ z=t' \end{cases}$ où $t' \in \mathbb{R}$.

D' est la droite passant par $B(-4 ; 4 ; 0)$ et de vecteur directeur $\vec{u}$ $\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

On retrouve la caractérisation de D.

les droites D et D' sont confondues.

4) *Dans cette question, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.*

On considère le point $A(1 ; 1 ; 1)$.

Déterminer la distance du point A à la droite D, c'est-à-dire la distance entre le point A et son projeté orthogonal sur la droite D.

Une méthode :

Soit H le projeté orthogonal de A sur D.

Notons x, y et z les coordonnées de H.

La droite (AH) est la droite passant par A et orthogonale à D.

On a donc : $\overrightarrow{AH} \cdot \vec{u} = 0$, soit : $(x-1)\times(-2) + (y-1)\times 1 + (z-1)\times 1 = 0$

Comme H appartient à D, on a : $\begin{cases} x=-4-2t \\ y=4+t \\ z=t \end{cases}$

On en déduit : $(-4-2t-1)\times(-2) + (4+t-1)\times 1 + (t-1)\times 1 = 0$

On en tire $6t = -12$, soit $t = -2$.

Le point H a pour coordonnées : $\begin{pmatrix} x=-4+4 \\ y=4+(-2) \\ z=-2 \end{pmatrix}$, soit $H(0 ; 2 ; -2)$

On a alors $\overrightarrow{AH}$ $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$, d'où, $AH = \sqrt{(-1)^2+1^2+(-3)^2} = \sqrt{11}$

Autre méthode :

Soit H le projeté orthogonal de A sur D.

Soit K et L les projetés orthogonaux de A sur P et P_{-1}.

On a : (AK) perpendiculaire à P et (AL) perpendiculaire à P_{-1} .

Comme P et P_{-1} sont perpendiculaires, (AK) et (AL) sont perpendiculaires.

le quadrilatère *AKHL* est un rectangle.

La distance *AK* est égale à $AK = \dfrac{|1+1+1|}{\sqrt{1^2+1^2+1^2}} = \sqrt{3}$

La distance *AL* est égale à $AL = \dfrac{|-1+1+4|}{\sqrt{0^2+(-1)^2+1^2}} = \dfrac{4}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{2}$

On a alors : $AH^2 = AK^2 + AL^2 = 3 + 8 = 11$

$AH = \sqrt{11}$

Exercice 2

On se place dans un repère orthogonal $(O\,;\vec{i},\vec{j})$. (Une unité d'aire, notée *u.a ,* est $\|\vec{i}\| \times \|\vec{j}\|$)

I) Restitution organisée des connaissances.

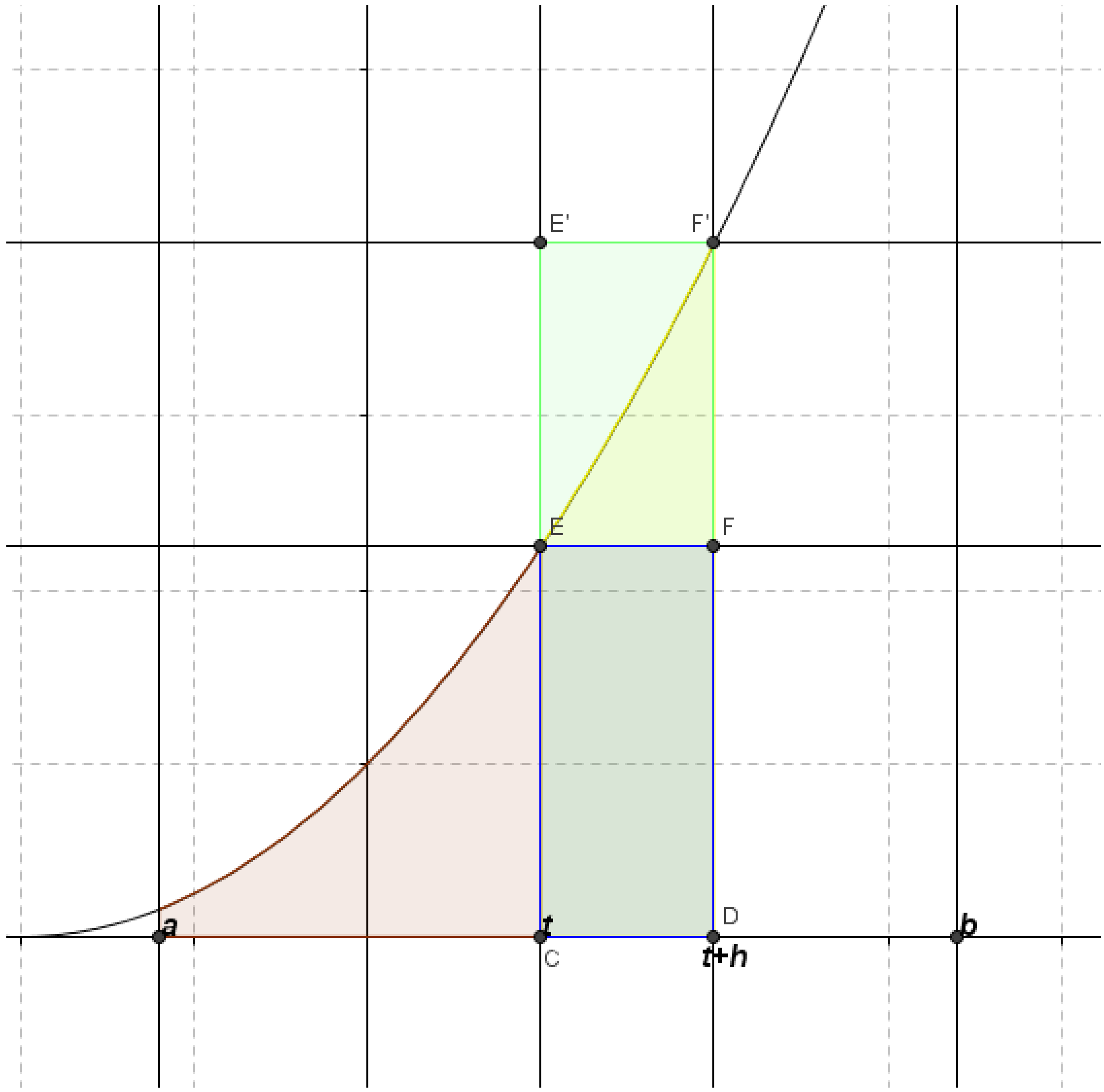
C_f est la représentation dans ce repère d'une fonction *f* continue, croissante et positive sur un intervalle *I*.

a et *b* sont deux réels de *I* tels que $a < b$.

Soit *t* un réel de $]a\,;b[$.

On note $\mathscr{A}(t)$ l'aire du domaine $\mathscr{D}$ délimité par les droites d'équations $x = a$, $x = t$, $y = 0$ et par la courbe C_f.

1) Faire une figure représentant ces données. (Vous pouvez annoter cette figure pour répondre à la question suivante).



2) a) Soit h un réel strictement positif tel que $t + h \in]a\,;b[$.

Montrer que $f(t) \leqslant \dfrac{\mathscr{A}(t+h) - \mathscr{A}(t)}{h} \leqslant f(t+h)$

L'aire $\mathscr{A}(t+h) - \mathscr{A}(t)$ est supérieure à celle du rectangle $CDFE$ et inférieure à celle du rectangle $CDF'E'$

Comme f est positive et h positive, on a :

Aire($CDFE$) $= f(t)\times h$ et Aire($CDF'E'$) $= f(t+h)\times h$

$f(t)\times h \leqslant \mathscr{A}(t+h) - \mathscr{A}(t) \leqslant f(t+h)\times h$

Comme $h > 0$, on a : $f(t) \leqslant \dfrac{\mathscr{A}(t+h) - \mathscr{A}(t)}{h} \leqslant f(t+h)$

b) Donner un encadrement de $\dfrac{\mathscr{A}(t) - \mathscr{A}(t+h)}{h}$ lorsque $h < 0$ et $t + h \in]a\,;b[$.

Une méthode (en reprenant la figure):

Il suffit sur la figure d'échanger t et $t + h$. Comme $h < 0$, $-h > 0$, et, on a :

Aire($CDFE$) $= f(t+h)\times(-h)$ et Aire($CDF'E'$) $= f(t)\times(-h)$

$f(t+h)\times(-h) \leqslant \mathscr{A}(t) - \mathscr{A}(t+h) \leqslant f(t)\times(-h)$

En divisant par $-h$ qui est positif, on a : $f(t+h) \leqslant \dfrac{\mathscr{A}(t+h)-\mathscr{A}(t)}{h} \leqslant f(t)$

Une autre méthode en analysant la relation du 2a) :

Dans le 2a), le raisonnement est valable pour $h > 0$.

Lorsque $h < 0$, la relation s'applique aussi en échangeant t et $t + h$ et en remplaçant h par $(-h)$

On a alors : $f(t+h) \leqslant \dfrac{\mathscr{A}(t)-\mathscr{A}(t+h)}{-h} \leqslant f(t)$ et comme $\dfrac{\mathscr{A}(t)-\mathscr{A}(t+h)}{-h} = \dfrac{\mathscr{A}(t+h)-\mathscr{A}(t)}{h}$

on a : $f(t+h) \leqslant \dfrac{\mathscr{A}(t+h)-\mathscr{A}(t)}{h} \leqslant f(t)$

c) En déduire que la fonction $\mathscr{A}$ est dérivable sur $]a\ ;b[$ et donner sa dérivée.
Comme f est continue, on a : $\lim\limits_{h\to 0} f(t+h) = 0$, d'où, en appliquant le théorème des gendarmes, on a dans les deux cas ($h > 0$ ou $h < 0$), $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{\mathscr{A}(t+h)-\mathscr{A}(t)}{h} = f(t)$.
La fonction $\mathscr{A}$ est donc dérivable pour tout réel $t \in\ ]a\ ;b[$, et, $\mathscr{A}'(t) = f(t)$

II) Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x\mathrm{e}^{2x}$
1) Vérifier que pour tout x réel, $f'(x) - \mathrm{e}^{2x} = 2f(x)$
$f'(x) = 1\times\mathrm{e}^{2x} + x\times(2\mathrm{e}^{2x})$
On a bien : $f'(x) - \mathrm{e}^{2x} = 2f(x)$

2) Étudier la variation de f sur $\mathbb{R}$.
$f'(x) = \mathrm{e}^{2x}(2x+1)$
Comme $\mathrm{e}^{2x} > 0$, le signe de $f'(x)$ est celui de $2x + 1$, soit :

x	$-\infty$		$-1/2$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
f		$\searrow$		$\nearrow$	

3) a) À partir du II-1/, déterminer une primitive F de f.

Comme $f'(x) - \mathrm{e}^{2x} = 2f(x)$, on a :
$f(x) - \dfrac{1}{2}\mathrm{e}^{2x} = 2\,F(x)$, d'où, $F(x) = \dfrac{1}{2}f(x) - \dfrac{1}{4}\mathrm{e}^{2x}$
b) Calculer en *u.a.* l'aire du domaine $\mathscr{D}$ ensemble des points $M(x\ ;y)$ tels que $0 \leqslant x \leqslant 1$ et $0 \leqslant y \leqslant f(x)$.

L'aire de $\mathscr{D}$ est égale à $F(1) - F(0) = \dfrac{1}{2}f(1) - \dfrac{1}{4}\mathrm{e}^2 - \left(\dfrac{1}{2}f(0) - \dfrac{1}{4}\right) = \dfrac{1}{4}\mathrm{e}^2 + \dfrac{1}{4}$

4) À l'aide d'une intégration par parties, calculer $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$ et comparer le résultat avec le 3b/

On pose $u(x) = x$ et $v'(x) = \mathrm{e}^{2x}$

d'où, $u'(x) = 1$ et $v(x) = \frac{1}{2}\ \mathrm{e}^{2x}$

$$\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}\,x = \left[x\times\frac{1}{2}\mathrm{e}^{2x}\right]_0^1 - \int_0^1 1\times\frac{1}{2}\times\mathrm{e}^{2x}\,\mathrm{d}\,x = \frac{1}{2}\ \mathrm{e}^2 - \frac{1}{2}\ \left[\frac{1}{2}\mathrm{e}^{2x}\right]_0^1 = \frac{1}{2}\ \mathrm{e}^2 - \frac{1}{4}\ \mathrm{e}^2 + \frac{1}{4} = \frac{1}{4}\ \mathrm{e}^2 + \frac{1}{4}$$