### *Exercice 1*

Une urne contient 10 boules blanches et $n$ boules rouges, $n$ étant un entier naturel supérieur ou égal à 2. On fait tirer à un joueur des boules de l'urne.

À chaque tirage, toutes les boules ont la même probabilité d'être tirées. Pour chaque boule blanche tirée, il gagne 2 euros et pour chaque boule rouge tirée, il perd 3 euros.

On désigne par $X$ la variable aléatoire correspondant au gain algébrique obtenu par le joueur.

Les trois questions de l'exercice sont indépendantes.

1. Le joueur tire deux fois successivement et sans remise une boule de l'urne.

   a. Démontrer que : $P(X=-1) = \dfrac{20\,n}{(n+10)(n+9)}$.

   b. Calculer, en fonction de $n$ la probabilité correspondant aux deux autres valeurs prises par la variable $X$.

   c. Vérifier que l'espérance mathématique de la variable aléatoire $X$ vaut : $E(X) = \dfrac{-6n^2-14n+360}{(n+10)(n+9)}$.

   d. Déterminer les valeurs de $n$ pour lesquelles l'espérance mathématique est strictement positive.

2. Le joueur tire 20 fois successivement et avec remise une boule de l'urne.

Les tirages sont indépendants. Déterminer la valeur minimale de l'entier $n$ afin que la probabilité d'obtenir au moins une boule rouge au cours de ces 20 tirages soit strictement supérieure à 0,999.

3. On suppose que $n$ = 1000. L'urne contient donc 10 boules blanches et 1 000 boules rouges.

Le joueur ne sait pas que le jeu lui est complètement défavorable et décide d' effectuer plusieurs tirages sans remise jusqu'à obtenir une boule blanche.

Le nombre de boules blanches étant faible devant celui des boules rouges, on admet que l'on peut modéliser le nombre de tirages nécessaires pour obtenir une boule blanche par une variable aléatoire $Z$ suivant la loi :

pour tout $k \in \mathbb{N}$, $P(Z \leqslant k) = \displaystyle\int_0^k 0{,}01\,e^{-0{,}01x}\,dx$ .

On répondra donc aux questions suivantes à l'aide de ce modèle.

   a. Calculer la probabilité que le joueur ait besoin de tirer au plus 50 boules pour avoir une boule blanche, soit $P(Z \leqslant 50)$.

   b. Calculer la probabilité conditionnelle de l'événement : « le joueur a tiré au maximum 60 boules pour tirer une boule blanche » sachant l'événement « le joueur a tiré plus de 50 boules pour tirer une boule blanche ».

---

### *Exercice 2*

Soit $v = (v_n)_{n>0}$ une suite.

On considère la suite $u$ définie pour tout entier naturel $n$ par $u_n = e^{-v_n} + 1$.

**Partie A**

*Pour chacune des questions, quatre propositions sont proposées dont une seule est exacte.*

*Pour chacune des questions donner, sans justification, la bonne réponse sur votre copie.*

*Une bonne réponse donne 0,75 point, une mauvaise réponse enlève 0,25 point et l'absence de réponse est comptée 0 point.*

*Tout total négatif est ramené à zéro.*

1. $a$ est un réel strictement positif et ln désigne la fonction logarithme népérien.

Si $v_0 = \ln a$ alors :

a. $u_0 = \dfrac{1}{a} + 1$ b. $u_0 = \dfrac{1}{1+a}$ c. $u_0 = -a + 1$ d. $u_0 = e^{-a} + 1$

2. Si $v$ est strictement croissante, alors :

a. $u$ est strictement décroissante et majorée par 2

b. $u$ est strictement croissante et minorée par 1

c. $u$ est strictement croissante et majorée par 2

d. $u$ est strictement décroissante et minorée par 1

3. Si $v$ diverge vers $+\infty$, alors :

a. $u$ converge vers 2

b. $u$ diverge vers $+\infty$

c. $u$ converge vers 1

d. $u$ converge vers un réel $\ell$ tel que $\ell > 1$

4. Si $v$ est majorée par 2, alors :

a. $u$ est majorée par $1+e^{-2}$

b. $u$ est minorée par $1+e^{-2}$

c. $u$ est majorée par $1+e^2$

d. $u$ est minorée par $1+e^2$

***En bonus, si vous avez traité toutes les autres questions du devoir***

**Partie B (1 point)**

Démontrer que pour tout entier naturel non nul, on a $\ln(u_n)+v_n > 0$.

---

***Exercice 3***

*Cet exercice est un questionnaire à choix multiple (QCM).*

*Pour chaque question une seule des propositions est exacte. Le candidat portera sur la copie, sans justification, la lettre correspondant à la réponse choisie. Il est attribué un point si la réponse est exacte, aucun point n'est enlevé pour une réponse inexacte ou une absence de réponse.*

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct $(O;\vec{u},\vec{v})$.

1. Soit (E) l'ensemble des points $M$ d'affixe $z$ vérifiant : $z = 1-2i+e^{i\theta}$, $\theta$ étant un nombre réel.

a. (E) est une droite passant par le point d'affixe $2-2i$.

b. (E) est le cercle de centre d'affixe $-1 + 2i$ et de rayon 1.

c. (E) est le cercle de centre d'affixe $1 - 2i$ et de rayon 1.

d. (E) est le cercle de centre d'affixe $1 - 2i$ et de rayon $\sqrt{5}$.

2. Soit $f$ l'application du plan qui, à tout point $M$ d'affixe $z$ associe le point $M'$ d'affixe $z'$ tel que $z' = -iz - 2i$.

a. $f$ est une homothétie.

b. Le point d'affixe $-1-2i$ est un antécédent du point d'affixe i.

c. $f$ est la rotation de centre le point d'affixe $1+i$ et d'angle $-\dfrac{\pi}{2}$.

d. $f$ est la rotation de centre le point d'affixe $-1-i$ et d'angle $-\dfrac{\pi}{2}$.

3. Soit (F) l'ensemble des points $M$ d'affixe $z$ vérifiant $|z - 1 + i| = |z + 1 + 2i|$.

Soient les points $A$, $B$ et $C$ d' affixes respectives $1 - i$, $-1 + 2i$ et $-1 - 2i$.

a. $C$ est un point de (F).

b. (F) est la médiatrice du segment $[AB]$.

c. (F) est la médiatrice du segment $[AC]$.

d. (F) est le cercle de diamètre $[AB]$.

4. On considère dans l'ensemble des nombres complexes l'équation $z + |z|^2 = 7+i$.

Cette équation admet :

a. Deux solutions distinctes qui ont pour partie imaginaire 1.

b. Une solution réelle.

c. Deux solutions dont une seule a pour partie imaginaire 1.

d. Une solution qui a pour partie imaginaire 2.

---

***Exercice 4***

*Cet exercice est un QCM qui comporte 8 questions, numérotées de 1 à 8. À chaque question, une seule des trois réponses notée **a**, **b** ou **c** est exacte. On demande au candidat d'indiquer sur sa copie, pour chaque question, quelle est la bonne réponse. Aucune justification n'est demandée.*

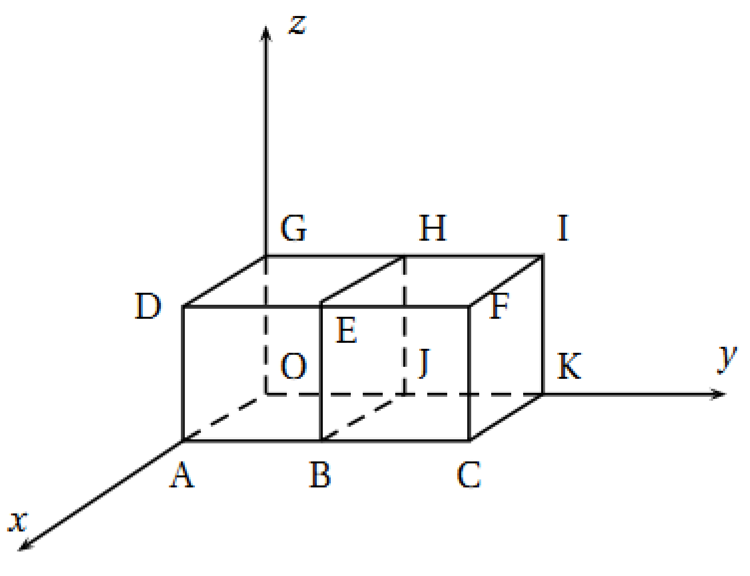
*Une réponse exacte rapporte 0,5 point. Une réponse fausse ou une absence de réponse n'enlèvent pas de point.*

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, on considère les points :

$A(1, 0, 0)$, $B(1, 1, 0)$, $C(1, 2, 0)$, $D(1, 0, 1)$,

$E(1, 1, 1)$, $F(1, 2, 1)$, $G(0, 0, 1)$, $H(0, 1, 1)$,

$I(0, 2, 1)$, $J(0, 1, 0)$, $K(0, 2, 0)$ comme indiqués



sur la figure ci -contre :

**1. Question 1** : Le triangle *GBI* est :

Réponse a : isocèle. Réponse b : équilatéral. Réponse c : rectangle.

**2. Question 2** : Le barycentre du système de points pondérés $\{(O, 2), (A, -1), (C, 1)\}$ est :

Réponse a : le point *K*. Réponse b : le point *I*. Réponse c : le point *J*.

**3. Question 3** : Le produit scalaire $\overrightarrow{AH}\cdot\overrightarrow{FC}$ est égal à :

Réponse a : 1. Réponse b : −1. Réponse c : 2.

**4. Question 4** : Les points *B*, *C*, *I*, *H* :

Réponse a : sont non coplanaires. Réponse b : forment un rectangle. Réponse c : forment un carré.

**5. Question 5** : Une représentation paramétrique de paramètre *t* de la droite (*KE*) est :

Réponse a : $\begin{cases} x=t \\ y=2+t \\ z=t \end{cases}$ Réponse b : $\begin{cases} x=3+4t \\ y=t \\ z=4t \end{cases}$ Réponse c : $\begin{cases} x=1-t \\ y=1+t \\ z=1-t \end{cases}$

**6. Question 6** : Une équation cartésienne du plan (*GBK*) est :

Réponse a : $2x+2y-z-2=0$. Réponse b : $x+y-3=0$. Réponse c : $x+y+2z=2$.

**7. Question 7 :** La distance du point *C* au plan (*ADH*) est :

Réponse a : $\sqrt{2}$ 2. Réponse b : 2. Réponse c : $\frac{1}{2}$ .

**8. Question 8** : Le volume du tétraèdre *HJKB* est égal à :

Réponse a : $\frac{1}{2}$. Réponse b : $\frac{1}{6}$. Réponse c : $\frac{1}{3}$.

---

**Prochain devoir :**

Mardi 21 juin 2011

8 h - 12 h à Blain