Exercice 1 ***Pondichéry Avril 2010***

Une urne contient 10 boules blanches et n boules rouges, n étant un entier naturel supérieur ou égal à 2. On fait tirer à un joueur des boules de l'urne.

À chaque tirage, toutes les boules ont la même probabilité d'être tirées. Pour chaque boule blanche tirée, il gagne 2 euros et pour chaque boule rouge tirée, il perd 3 euros.

On désigne par X la variable aléatoire correspondant au gain algébrique obtenu par le joueur.

Les trois questions de l'exercice sont indépendantes.

1. Le joueur tire deux fois successivement et sans remise une boule de l'urne.

a. Démontrer que : $P(X=-1)=\dfrac{20n}{(n+10)(n+9)}$.

b. Calculer, en fonction de n la probabilité correspondant aux deux autres valeurs prises par la variable X.

c. Vérifier que l'espérance mathématique de la variable aléatoire X vaut : $E(X)=\dfrac{-6n^2-14n+360}{(n+10)(n+9)}$.

d. Déterminer les valeurs de n pour lesquelles l'espérance mathématique est strictement positive.

2. Le joueur tire 20 fois successivement et avec remise une boule de l'urne.

Les tirages sont indépendants. Déterminer la valeur minimale de l'entier n afin que la probabilité d'obtenir au moins une boule rouge au cours de ces 20 tirages soit strictement supérieure à 0,999.

3. On suppose que n = 1000. L'urne contient donc 10 boules blanches et 1 000 boules rouges.

Le joueur ne sait pas que le jeu lui est complètement défavorable et décide d' effectuer plusieurs tirages sans remise jusqu'à obtenir une boule blanche.

Le nombre de boules blanches étant faible devant celui des boules rouges, on admet que l'on peut modéliser le nombre de tirages nécessaires pour obtenir une boule blanche par une variable aléatoire Z suivant la loi :

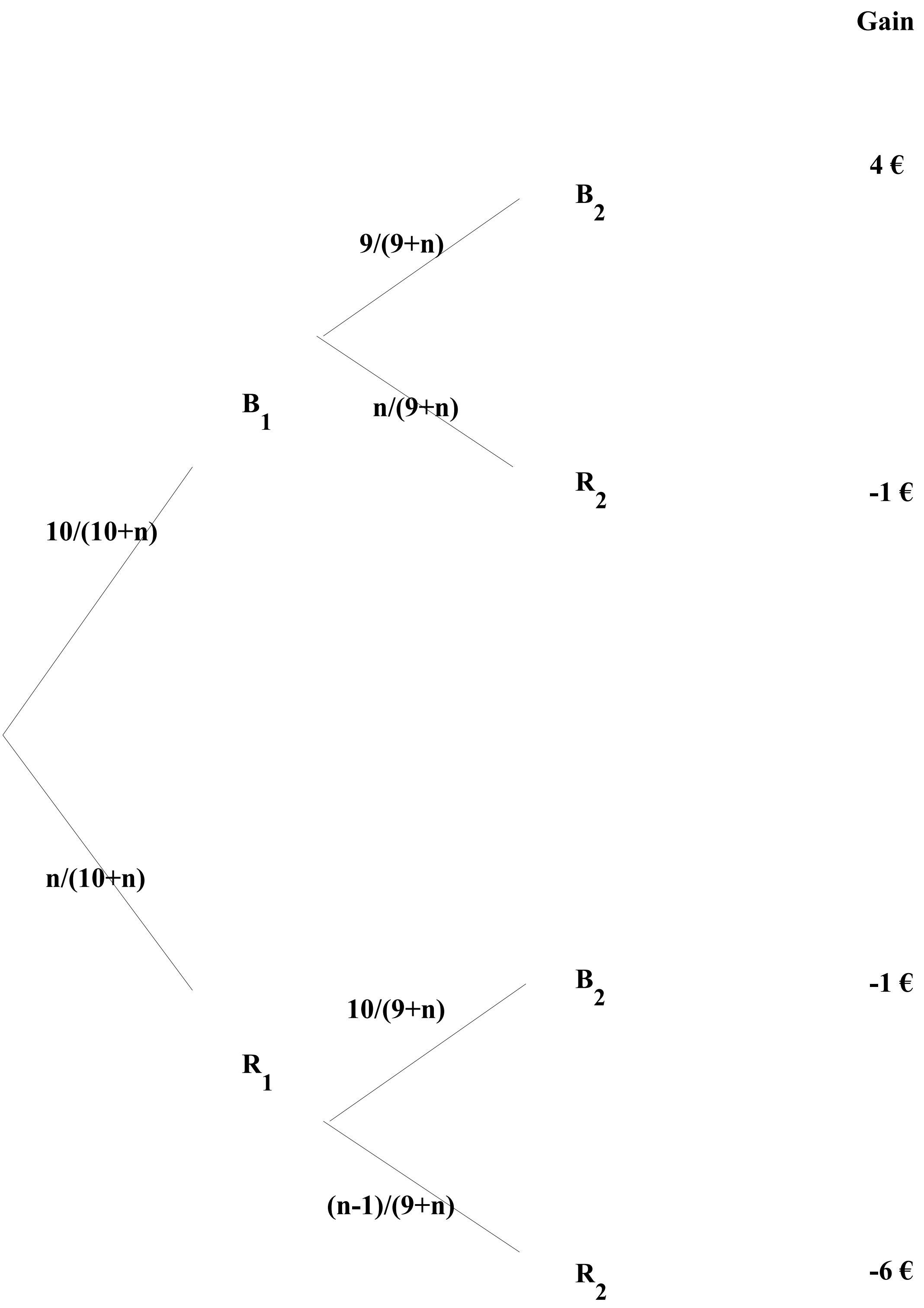
pour tout $k\in\mathbb{N}$, $P(Z\leqslant k)=\displaystyle\int_0^k 0{,}01\,\mathrm{e}^{-0{,}01x}\,\mathrm{d}x$.

On répondra donc aux questions suivantes à l'aide de ce modèle.

a. Calculer la probabilité que le joueur ait besoin de tirer au plus 50 boules pour avoir une boule blanche, soit $P(Z\leqslant 50)$.

b. Calculer la probabilité conditionnelle de l'événement : « le joueur a tiré au maximum 60 boules pour tirer une boule blanche » sachant l'événement « le joueur a tiré plus de 50 boules pour tirer une boule blanche ».

1) Ne pas hésiter à faire un arbre de probabilités.



a) La variable aléatoire prend la valeur –1 dans le cas où le tirage des deux boules donne une noire et une blanche.

En notant B (boule blanche) et R (boule rouge) , et, en numérotant 1 et 2 dans l'ordre des tirages

$P(X = -1) = P(B_1R_2 \text{ ou } R_1B_2)$

$= P(B_1R_2) + P(R_1B_2) = P(B_1)\times P_{B1}(R_2) + P(R_1)\times P_{R1}(B_2)$

$$= \frac{10}{10+n} \times \frac{n}{9+n} + \frac{n}{10+n} \times \frac{10}{9+n} = \frac{20n}{(10+n)(9+n)}$$

b) Dans le cas où les deux boules sont blanches, on a:

$P(X = 4) = P(B_1B_2) = \frac{10}{10+n} \times \frac{9}{9+n} = \frac{90}{(10+n)(9+n)}$

Dans le cas où les deux boules sont noires, on a:

$P(X = -6) = P(R_1R_2) = \frac{n}{10+n} \times \frac{n-1}{9+n} = \frac{n(n-1)}{(10+n)(9+n)}$

c) $E(X) = (-6)\times \frac{n(n-1)}{(10+n)(9+n)} + (-1)\times \frac{20n}{(10+n)(9+n)} + 4\times \frac{90}{(10+n)(9+n)}$

$$= \frac{-6n^2+6n-20n+360}{(10+n)(9+n)} = \frac{-6n^2-14n+360}{(10+n)(9+n)}$$

d) n étant un entier naturel supérieur ou égal à 2, le dénominateur est strictement positif.

Le signe de $E(X)$ est celui du numérateur (second degré).

Ce numérateur est positif (signe contraire de -6 coefficient de n^2) pour les valeurs de n entre les racines.

discriminant $\Delta = b^2 - 4ac = (-14)^2 - 4\times(-6)\times 360 = 8\,836 = 94^2$

Les racines sont $n_1 = \frac{-(-14)-94}{2\times(-6)} = \frac{20}{3}$ et $n_2 = \frac{-(-14)+94}{2\times(-6)} = -9$

$E(X) > 0$ pour $n \in \{2; 3; 4; 5; 6\}$

Remarque: on peut contrôler en traçant la courbe représentative de la fonction $x \mapsto -6x^2 - 14x + 360$

2) Soit Y la variable aléatoire donnant le nombre de boules rouges obtenues lors de ces vingt tirages.
Les tirages successifs avec remise et indépendants correspondent au modèle donné par la loi binomiale de paramètre $n = 20$ et $p = P(R) = \frac{n}{10+n}$.

$P(Y \geqslant 1) = 1 - P(Y = 0) = 1 - \binom{20}{0}\left(\frac{n}{10+n}\right)^0\left(1-\frac{n}{10+n}\right)^{20} = 1 - \left(\frac{10}{10+n}\right)^{20}$

$1 - \left(\frac{10}{10+n}\right)^{20} > 0{,}999 \Leftrightarrow \left(\frac{10}{10+n}\right)^{20} < 0{,}001$ (on applique ln strictement croissante)

$\Leftrightarrow 20 \ln \frac{10}{10+n} < \ln 0{,}001$

$\Leftrightarrow \ln \frac{10}{10+n} < \frac{1}{20} \ln 0{,}001$ (on applique les propriétés du ln)

$\Leftrightarrow \ln \frac{10}{10+n} < \ln\left(\frac{1}{1000^{1/20}}\right)$ (on applique exp strictement croissant)e)

$\Leftrightarrow \frac{10}{10+n} < \left(\frac{1}{1000^{1/20}}\right)$ $1000^{1/20} = 10^{3/20}$ et $10 = 10^{20/20}$

$\Leftrightarrow 10 + n > 10^{23/20}$

$\Leftrightarrow n > 10^{23/20} - 10$

La calculatrice donne 4,12 comme valeur approchée de $10^{23/20} - 10$

La valeur minimale de n est 5.

3) a) $P(Z \leqslant 50) = \int_0^{50} 0{,}01\,e^{-0{,}01x}\,dx = \left[-e^{-0{,}01x}\right]_0^{50} = -e^{-0{,}5} + 1 = 1 - \dfrac{1}{\sqrt{e}}$ $(\approx 0{,}39)$

b) On reconnaît une loi exponentielle (loi de durée de vie sans vieillissement),

d'où, $P_{Z\geqslant 50}(Z \leqslant 60) = P(Z \leqslant 10) = \int_0^{10} 0{,}001\,e^{-0{,}01}\,dx = \left[-e^{-0{,}01x}\right]_0^{10} = -e^{-0{,}1} + 1 = 1 - e^{-0{,}1}$ $(\approx 0{,}095)$

ou encore

$$P_{Z\geqslant 50}(Z \leqslant 60) = \frac{P((Z\geqslant 50)\cap(Z\leqslant 60))}{P(Z\geqslant 50)} = \frac{\int_{50}^{60} 0{,}01\,e^{-0{,}01x}\,dx}{1-\int_0^{50} 0{,}01\,e^{-0{,}01x}\,dx} = \frac{\left[-e^{-0{,}01x}\right]_{50}^{60}}{1-\left[-e^{-0{,}01x}\right]_0^{50}} = \frac{-e^{-0{,}6}+e^{-0{,}5}}{1-(e^{-0{,}5}-1)} = 1 - e^{-0{,}1}$$

Exercice 2 ***Antilles-Guyanne septembre 2007***

Soit $v = (v_n)_{n>0}$ une suite.

On considère la suite u définie pour tout entier naturel n par $u_n = e^{-v_n} + 1$.

Partie A

Pour chacune des questions, quatre propositions sont proposées dont une seule est exacte.

Pour chacune des questions donner, sans justification, la bonne réponse sur votre copie.

Une bonne réponse donne 0,75 point, une mauvaise réponse enlève 0,25 point et l'absence de réponse est comptée 0 point.

Tout total négatif est ramené à zéro.

1. a est un réel strictement positif et ln désigne la fonction logarithme népérien.

Si $v_0 = \ln a$ alors :

a. $u_0 = \dfrac{1}{a} + 1$ b. $u_0 = \dfrac{1}{1+a}$ c. $u_0 = -a + 1$ d. $u_0 = e^{-a} + 1$

On a : $u_0 = e^{-\ln a} + 1 = e^{\ln\frac{1}{a}} + 1 = \dfrac{1}{a} + 1$

2. Si v est strictement croissante, alors :

a. u est strictement décroissante et majorée par 2

b. u est strictement croissante et minorée par 1

c. u est strictement croissante et majorée par 2

d. u est strictement décroissante et minorée par 1

On a : v strictement croissante, donc, $-v$ strictement décroissante.

Comme la fonction exponentielle est strictement croissante la composée e^{-v} est strictement décroissante.

D'autre part la fonction exponentielle est minorée par 0, d'où, $u = e^{-v} + 1$ est minorée par 1.

3. Si v diverge vers $+\infty$, alors :

a. u converge vers 2

b. u diverge vers $+\infty$

c. u converge vers 1

d. u converge vers un réel ℓ tel que $\ell > 1$

v diverge $+\infty$, d'où $-v$ diverge vers $-\infty$, comme $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0$, par propriété de limite de fonction composée, puis, par somme, $\lim\limits_{n\to+\infty} e^{-v_n}+1 = 1$

4. Si v est majorée par 2, alors :

a. u est majorée par $1+e^{-2}$

b. u est minorée par $1+e^{-2}$

c. u est majorée par $1+e^2$

d. u est minorée par $1+e^2$

v étant majorée par 2 alors $-v$ est minorée par 2.
puisque la fonction exp est strictement croissante, e^{-v} est minorée par e^{-2}, et, finalement, $u = e^{-v} + 1$ est minorée par $1+e^{-2}$

Partie B (1 point)

Démontrer que pour tout entier naturel non nul, on a $\ln(u_n)+v_n > 0$.

On a de façon évidente $e^{-v_n} + 1 > e^{-v_n} > 0$. La fonction ln est strictement croissante sur $]0 ; +\infty[$,

d'où, $\ln(e^{-v_n} + 1) > \ln(e^{-v_n})$

soit : $\ln(u_n) > -v_n$ En ajoutant v_n aux deux membres de l'inégalité,
il vient : $\ln(u_n) + v_n > 0$. CQFD

Exercice 3 ***La Réunion juin 2009***

Cet exercice est un questionnaire à choix multiple (QCM).

Pour chaque question une seule des propositions est exacte. Le candidat portera sur la copie, sans justification, la lettre correspondant à la réponse choisie. Il est attribué un point si la réponse est exacte, aucun point n'est enlevé pour une réponse inexacte ou une absence de réponse.

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct $(O ; \vec{u}, \vec{v})$.

1. Soit (E) l'ensemble des points M d'affixe z vérifiant : $z = 1-2i+e^{i\theta}$, θ étant un nombre réel.

a. (E) est une droite passant par le point d'affixe $2-2i$.

b. (E) est le cercle de centre d'affixe $-1+2i$ et de rayon 1.

c. (E) est le cercle de centre d'affixe $1-2i$ et de rayon 1.

d. (E) est le cercle de centre d'affixe $1-2i$ et de rayon $\sqrt{5}$.

$z = 1-2i+e^{i\theta}$ équivaut à $z-(1-2i) = e^{i\theta}$

Rappel :

Pour tout réel θ, $e^{i\theta}$ est un complexe de module 1 et tout nombre complexe de module 1 peut s'écrire $e^{i\theta}$

Soit $\Omega(1-2\mathrm{i})$. $z-(1-2\mathrm{i})$ est l'affixe du vecteur $\overrightarrow{\Omega M}$

On a donc : $|z-(1-2\mathrm{i})| = 1$, $M \in$ cercle de centre Ω et de rayon 1.

Réciproquement : Si M est un point de cercle, on a $\Omega M = 1$ et par conséquent, il existe un réel θ tel que :
$z-(1-2\mathrm{i}) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$

2. Soit f l'application du plan qui, à tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixe z' tel que $z' = -\mathrm{i}z - 2\mathrm{i}$.

a. f est une homothétie.

b. Le point d'affixe $-1-2\mathrm{i}$ est un antécédent du point d'affixe i.

c. f est la rotation de centre le point d'affixe $1+\mathrm{i}$ et d'angle $-\frac{\pi}{2}$.

d. f est la rotation de centre le point d'affixe $-1-\mathrm{i}$ et d'angle $-\frac{\pi}{2}$.

$-\mathrm{i} = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{2}}$

$z' = z$ équivaut à $z = -\mathrm{i}z - 2\mathrm{i}$ équivaut à $(1+\mathrm{i})z = -2\mathrm{i}$

équivaut à $z = \dfrac{-2\mathrm{i}}{1+\mathrm{i}} = \dfrac{(-2\mathrm{i})(1-\mathrm{i})}{2} = -1-\mathrm{i}$

Par conséquent : $z' = -\mathrm{i}z - 2\mathrm{i}$ équivaut à $z' - (-1-\mathrm{i}) = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{2}}(z - (-1-\mathrm{i})$ qui est l'écriture complexe de la rotation de centre $\Omega(-1-\mathrm{i})$ et d'angle $-\frac{\pi}{2}$.

3. Soit (F) l'ensemble des points M d'affixe z vérifiant $|z-1+\mathrm{i}| = |z+1+2\mathrm{i}|$.

Soient les points A, B et C d' affixes respectives $1-\mathrm{i}$, $-1+2\mathrm{i}$ et $-1-2\mathrm{i}$.

a. C est un point de (F).

b. (F) est la médiatrice du segment [AB].

c. (F) est la médiatrice du segment [AC].

d. (F) est le cercle de diamètre [AB].

$|z-1+\mathrm{i}| = |z+1+2\mathrm{i}|$ équivaut à $AM = CM$

M est donc l'ensemble des points équidistants de A et C

4. On considère dans l'ensemble des nombres complexes l'équation $z + |z|^2 = 7+\mathrm{i}$.

Cette équation admet :

a. Deux solutions distinctes qui ont pour partie imaginaire 1.

b. Une solution réelle.

c. Deux solutions dont une seule a pour partie imaginaire 1.

d. Une solution qui a pour partie imaginaire 2.

On pose $z = x + iy$ où x et y sont réels.

l'équation $z + |z|^2 = 7 + i$ est alors équivalente à : $x + iy + x^2 + y^2 = 7 + i$ où x et y sont réels.

Deux nombres complexes sont égaux si et seulement si ils ont la même partie imaginaire et la même partie réelle.

On obtient le système : $\begin{cases} x^2 + y^2 + x = 7 \\ y = 1 \end{cases}$

La partie imaginaire y vaut 1.

L'équation du second degré : $x^2 + 1^2 + x = 7$, soit : $x^2 + x - 6 = 0$ a deux solutions réelles distinctes 2 et –3

Les solutions sont donc les nombres $2 + i$ et $-3 + i$.

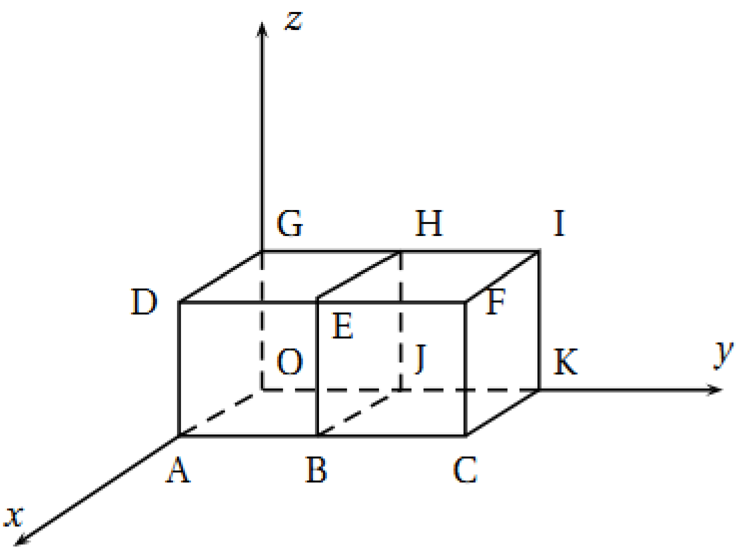
Exercice 4 ***Asie juin 2010***

*Cet exercice est un QCM qui comporte 8 questions, numérotées de 1 à 8. À chaque question, une seule des trois réponses notée **a**, **b** ou **c** est exacte. On demande au candidat d'indiquer sur sa copie, pour chaque question, quelle est la bonne réponse. Aucune justification n'est demandée.*

Une réponse exacte rapporte 0,5 point. Une réponse fausse ou une absence de réponse n'enlèvent pas de point.

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormal $(O ; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, on considère les points :

$A(1, 0, 0)$, $B(1, 1, 0)$, $C(1, 2, 0)$, $D(1, 0, 1)$, $E(1, 1, 1)$, $F(1, 2, 1)$, $G(0, 0, 1)$, $H(0, 1, 1)$, $I(0, 2, 1)$, $J(0, 1, 0)$, $K(0, 2, 0)$ comme indiqués sur la figure ci -contre :



1. Question 1 : Le triangle GBI est :

Réponse a : isocèle. Réponse b : équilatéral. Réponse c : rectangle.

En choisissant l'unité du repère, on a :

Dans un cube d'arête 1, la grande diagonale a pour longueur $\sqrt{3}$, d'où, $GB = BI = \sqrt{3}$

$GI = 2$ Le triangle n'est pas équilatéral

$GI^2 = 4$ $GB^2 + BI^2 = 6$ Le triangle n'est pas rectangle

2. Question 2 : Le barycentre du système de points pondérés $\{(O, 2), (A, -1), (C, 1)\}$ est :

Réponse a : le point K. Réponse b : le point I. Réponse c : le point J.

On cherche le point M tel que : $2\ \overrightarrow{MO} - \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MC} = \vec{0}$, soit : $2\ \overrightarrow{MO} + \overrightarrow{AC} = \vec{0}$

ou encore : $\overrightarrow{OM} = \frac{1}{2}\ \overrightarrow{AC}$

Comme $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{OK}$, on obtient le milieu de $[OK]$

3. Question 3 : Le produit scalaire $\overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{FC}$ est égal à

Réponse a : 1. Réponse b : −1. Réponse c : 2.

$\overrightarrow{AH} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BE} + \overrightarrow{EH}$

$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{FC} = 0$

$\overrightarrow{BE} \cdot \overrightarrow{FC} = -1$

$\overrightarrow{EH} \cdot \overrightarrow{FC} = 0$

$\overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{FC} = 0 - 1 + 0 = -1$

4. Question 4 : Les points B, C, I, H :

Réponse a : sont non coplanaires. Réponse b : forment un rectangle. Réponse c : forment un carré.

Puisque (BC) et (IH) -sont parallèles, les points B, C, I, H sont coplanaires.

$\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{HI}$ donc $BCIH$ est un parallélogramme.

$(BC) \perp$ plan$(CFIK)$ donc $(BC) \perp (CI)$

$BC = 1$ et $CI = \sqrt{2}$.

$BCIH$ est un rectangle non carré.

5. Question 5 : Une représentation paramétrique de paramètre t de la droite (KE) est :

Réponse a : $\begin{cases} x=t \\ y=2+t \\ z=t \end{cases}$ Réponse b : $\begin{cases} x=3+4t \\ y=t \\ z=4t \end{cases}$ Réponse c : $\begin{cases} x=1-t \\ y=1+t \\ z=1-t \end{cases}$

$\overrightarrow{EK} \begin{pmatrix} 0-1 \\ 2-1 \\ 0-1 \end{pmatrix}$, d'où $\overrightarrow{EK} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

$M \in (EK)$ si et seulement si, il existe un réel t tel que $\overrightarrow{EM} = t\,\overrightarrow{EK}$, soit: $\begin{cases} x-1=-t \\ y-1=t \\ z-1=-t \end{cases}$

Le système $\begin{cases} x=t \\ y=2+t \\ z=t \end{cases}$ définit la droite passant par K dirigée par $\overrightarrow{OE}$.

6. Question 6 : Une équation cartésienne du plan (GBK) est :

Réponse a : $2x+2y-z-2 = 0$. Réponse b : $x + y - 3 = 0$. Réponse c : $x + y + 2z = 2$.

Les coordonnées de G, de B et de K sont solutions de l'équation: $x + y + 2z = 2$

7. Question 7 : La distance du point C au plan (ADH) est :

Réponse a : $\sqrt{2}$ 2. Réponse b : 2. Réponse c : $\frac{1}{2}$.

Le segment [CJ] est perpendiculaire en J au plan (ADH), car, $(CJ) \perp ((JH)$ et $(CJ) \perp (AJ)$

$CJ = \sqrt{2}$ (diagonale d'un carré de côté 1)

Autre méthode: Soit $ax + by + cz + d = 0$ une équation du plan (ADH).

On a: Point A, Point D, Point H $\begin{cases} a+d=0 \\ a+c+d=0 \\ b+c+d=0 \end{cases}$ soit: $a = -d$; $c = 0$; $b = -d$

Une équation du plan (ADH) est: $x + y - 1 = 0$

La distance de C à ce plan est : $d(C, (ADH)) = \dfrac{|1+2-1|}{\sqrt{1^2+1^2+0^2}} = \sqrt{2}$

8. Question 8 : Le volume du tétraèdre $HJKB$ est égal à :

Réponse a : $\frac{1}{2}$. Réponse b : $\frac{1}{6}$. Réponse c : $\frac{1}{3}$.

La base JKB est un demi carré d'aire $\frac{1}{2}$.

La hauteur est $JH = 1$

Le volume $\mathcal{V} = \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \times 1 = \frac{1}{6}$