# Index



### *1 page 27*

Dans cet exercice $x > 0$ (Ce qui signifie que l'utilisation des variations de fonctions est faite **sur** $]0; +\infty[$

Les variations utiles:

(1) La fonction carrée est strictement croissante sur $]0; +\infty[$

(2) La fonction inverse est strictement décroissante sur $]0; +\infty[$

a) $x^2 > 10\,000$ si $x > 100$ d'après (1)

b) $x^2 < 0{,}000\,1$ si $0 < x < 0{,}01$ d'après (1)

c) $\dfrac{1}{x} > 10\,000$ si $0 < x < \dfrac{1}{10000}$ d'après (2)

d) $\dfrac{1}{x} > 0{,}001$ si $0 < x < 1000$ d'après (2)

e) $\dfrac{1}{x} < 10^6$ si $x > 10^{-6}$ d'après (2)

***Complément: (lien avec les définitions des limites en ...)***

Ces résultats sont valables en remplaçant par $10^n$ ou $10^{-n}$ ($n \in \mathbb{N}$) selon les cas

On a donc: Soit le réel $10^{2n}$.

Il existe un réel $x_0 = 10^n$ tel que $x > x_0$ implique $x^2 > 10^{2n}$

Ce qui correspond à la définition de: $\lim_{x \to +\infty} x^2 = +\infty$.

De même pour les autres définitions des limites:

Par exemple: $\lim_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \frac{1}{x} = +\infty$ est justifié par:

Soit le réel $10^n$

il existe un réel $\epsilon = 10^{-n}$, tel que $0 < x < \epsilon$ implique $\frac{1}{x} > 10^n$

---

***2 page 27***

Dans cet exercice $x < 0$ (Ce qui signifie que l'utilisation des variations de fonctions est faite **sur** $]-\infty; 0[$

Les variations utiles:

(1) La fonction carrée est strictement décroissante sur $]-\infty; 0[$.

(2) La fonction inverse est strictement décroissante sur $]-\infty; 0[$.

a) $x^2 > 10\,000$ si $x < -100$ d'après (1)

b) $x^2 < 0{,}000\,1$ si $-0{,}01 < x < 0$ d'après (1)

c) $\frac{1}{x} < -10\,000$ si $-\frac{1}{10000} < x < 0$d'après (2)

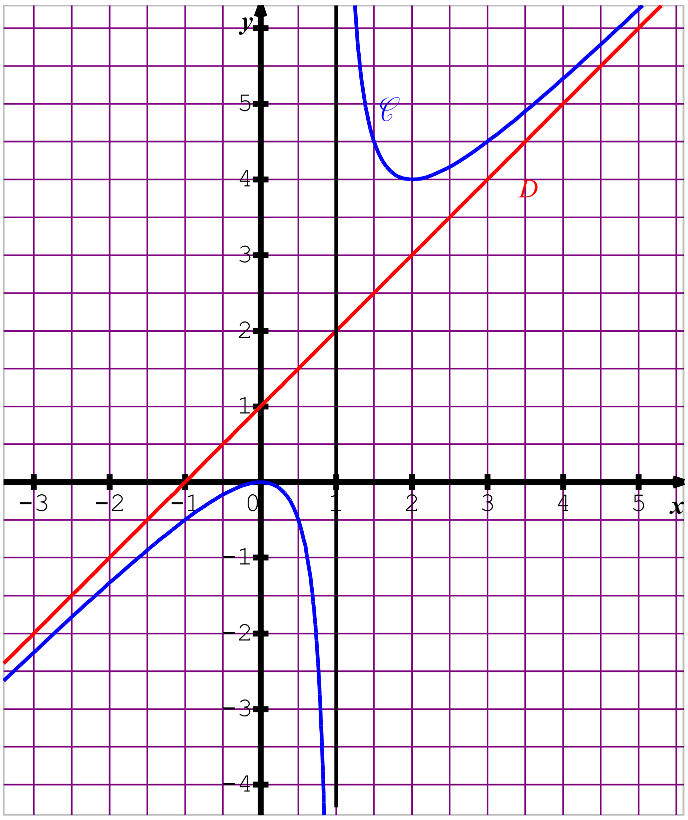
d) $\frac{1}{x} > -0{,}001$ si $x < -1000$ d'après (2)

e) $\frac{1}{x} > -10^{-4}$ si $x < -10^4$ d'après (2)

---

***6 page 27***

La courbe $\mathscr{C}$ représente une fonction $f$ telle que:




$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$

$\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x < 1}} f(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x > 1}} f(x) = +\infty$. Ce qui prouve que la droite d'équation $x = 1$ est une asymptote à $\mathscr{C}$.

Le tableau de variations est:

| $x$ | $-\infty$ | | $0$ | | $1$ | | $2$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | ‖ | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $f(x)$ | $-\infty$ | ↗ | $0$ | ↘ | $-\infty$ ‖ $+\infty$ | ↘ | $4$ | ↗ | $+\infty$ |

D'après l'allure de $\mathscr{C}$, la droite $D$ d'équation $y = x + 1$ est une asymptote à $\mathscr{C}$.

Remarque: $\mathscr{C}$ a pour équation $y = x + 1 + \dfrac{1}{x-1}$

---

### *7 page 27*

Objectif: comprendre une définition

$p$ est la fonction définie par $p(x) = -3x + 9$

On cherche $x$ pour que: $3 - 10^{-4} < p(x) < 3 + 10^{-4}$

Soit: (i) $3 - 10^{-4} < -3x + 9 < 3 + 10^{-4}$ On ajoute (–9) aux trois membres de l'inégalité, d'où, ...

(ii) $-6 - 10^{-4} < -3x < -6 + 10^{-4}$ On multiplie par($-\frac{1}{3}$) qui est strictement négatif les trois membres de l'inégalité, d'où,

(iii) $2 + \frac{1}{3}10^{-4} > x > 2 - \frac{1}{3}10^{-4}$ (On peut aussi écrire: $|x-2| < \frac{1}{3}10^{-4}$

Il suffit d'avoir (iii) pour que (i) soit vrai:

On peut donc écrire:

Si $2 - \frac{1}{3}10^{-4} < x < 2 + \frac{1}{3}10^{-4}$ alors $3 - 10^{-4} < p(x) < 3 + 10^{-4}$

La démarche est identique avec $10^{-n}$ pour tout $n\in\mathbb{N}$.

On a donc: $\lim_{x\to 2} f(x) = 3$ d'après la définition d'une limite finie quand $x$ tend vers un réel $a$.

$f(x)$ peut être rendu aussi que l'on veut de 3 à condition que $x$ soit suffisamment proche de 2.

***Rappel de vocabulaire***: Si ($p$) alors ($q$)
($p$) est une ***condition suffisante*** de ($q$) (il suffit d'avoir ($p$) pour que ($q$) soit vraie)
($q$) est une ***condition nécessaire*** de ($p$).

***13 page 28***

Limites à l'**infini** de

a) $f(x) = \frac{x-1}{x^4+1}$

On reconnaît une forme indéterminée ( $\frac{\infty}{\infty}$ ).

**Méthode:**

Pour lever l'indétermination, on factorise les termes (expressions) de plus haut degré et on réduit l'expression de façon à « éliminer » la cause de l'indétermination.

**Calculs**

Pour tout $x \neq 0, f(x) = \frac{x\left(1-\frac{1}{x}\right)}{x^4(1+\frac{1}{x^4})} = \frac{1-\frac{1}{x}}{x^3(1+\frac{1}{x^4})}$

On a ainsi: $\lim_{x\to+\infty} 1-\frac{1}{x} = 1$,

$$\left.\begin{array}{l}\lim_{x\to+\infty} x^3 = +\infty \\ \lim_{x\to+\infty} 1+\frac{1}{x^4} = 1\end{array}\right\}$$ donc (limite d'un produit), $\lim_{x\to+\infty} x^3(1+1/x^4) = +\infty$.

Finalement: (limite d'un quotient): $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$

On trouve de même: $\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0$

***Complément***: la droite d'équation $y = 0$ est une asymptote à $C_f$.

b) $g(x) = \frac{x^4-1}{x^4+1}$

Même remarque et même démarche:

Pour tout $x \neq 0$, $g(x) = \dfrac{x^4(1-1/x^4)}{x^4(1+1/x^4)} = \dfrac{1-\dfrac{1}{x^4}}{1+\dfrac{1}{x^4}}$

Voir ci-dessus.... Finalement: $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = 1$

On trouve de même: $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x) = 1$

***Complément***: la droite d'équation $y = 1$ est une asymptote à $C_g$.

---

### *15 page 28*

Limites à l'**infini** de

$f(x) = \left(\dfrac{3}{1-x}\right)(x^2+1)$

$f$ est le produit de deux fonctions.
On reconnaît une forme indéterminée ( $0\times\infty$ )
On peut utiliser la méthode précédente décrite au N°13.

Pour $x \neq 0$, $f(x) = \dfrac{3x^2(1+\dfrac{1}{x^2})}{x\left(\dfrac{1}{x}-1\right)} = \dfrac{3x\left(1+\dfrac{1}{x^2}\right)}{\dfrac{1}{x}-1}$

**En $+\infty$:**
Le numérateur tend vers $+\infty$ en $+\infty$,
Le dénominateur tend vers $-1$.
Le quotient tend vers $-\infty$. $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$.

**En $-\infty$:**
Le numérateur tend vers $-\infty$ en $-\infty$,
Le dénominateur tend vers $-1$.
Le quotient tend vers $+\infty$. $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$.

---

### *22 page 28*

Soit $f$ définie sur $\mathbb{R}\setminus\{-2; 1\}$ par $f(x) = \dfrac{2x^2-8x+6}{x^2+x-2}$.

**Limites en l'infini:**

Voir méthode du N° 13

En factorisant $x^2$ au numérateur et au dénominateur pour $x \neq 0$, on a:

$f(x) = \dfrac{2-\dfrac{8}{x}+\dfrac{6}{x^2}}{1+\dfrac{1}{x}-\dfrac{2}{x^2}}$.

On a donc: $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 2$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 2$

Complément: la droite d'équation $y = 2$ est asymptote à $C_f$.

**Limite en 1**

On reconnaît une forme indéterminée ( $\frac{0}{0}$ )

**Méthode:**

Pour lever l'indétermination, on factorise le **facteur** ($x$ – 1) qui annule le numérateur et le dénominateur.
On est certain de cette factorisation d'après une propriété des **polynômes:**
Si $\alpha$ est une racine d'un polynôme $P(x)$ (ou $P(\alpha) = 0$) alors le polynôme $P(x)$ est factorisable par $x - \alpha$.

**Calcul:**

$2x^2 - 8x + 6 = 2(x - 1)(x - 3)$
$x^2 + x - 2 = (x - 1)(x + 2)$

Pour tout $x \neq 1$, on a: $f(x) = \dfrac{2(x-1)(x-3)}{(x-1)(x+2)} = \dfrac{2(x-3)}{x+2}$

Comme $\lim\limits_{x\to 1} 2(x-3) = -4$ et $\lim\limits_{x\to 1} x+2 = 3$, il vient: $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = -\dfrac{4}{3}$

**Limites en –2**

Si le calcul précédent a été fait, on l'utilise ….
On a donc: $\lim\limits_{x\to -2} 2(x-3) = -10$ et $\lim\limits_{x\to -2} x+2 = 0$.
Il est nécessaire de déterminer le signe de $x + 2$ au voisinage de –2.
On a de façon évidente: $x + 2 > 0$ lorsque $x > -2$ et $x + 2 < 0$ lorsque $x < -2$.

Limite à gauche de –2: $\lim\limits_{\substack{x\to -2\\ x<-2}} f(x) = +\infty$,

limite à droite de –2: $\lim\limits_{\substack{x\to -2\\ x>-2}} f(x) = -\infty$.

Complément: La droite d'équation $x = -2$ est asymptote à $C_f$

Au cas où le calcul précédent n'est pas fait, on reconnaît les expressions du second degré.
On peut chercher $\Delta$ et établir un tableau de signes au **voisinage** de – 2.
Signe de $2x^2 - 8x + 6$ $\Delta = \ldots = 16$ deux racines: 1 et 3
$2x^2 - 8x + 6$ est donc du signe du coefficient 2 de $x^2$ à l'extérieur des racines …

Signe de $x^2 + x - 2$ $\Delta = \ldots = 9$ deux racines: –2 et 1
$x^2 + x - 2$ est donc du signe du coefficient 1 de $x^2$ à l'extérieur des racines …
Résumé dans un tableau:

| $x$ | $-\infty$ | | –2 | | 1 | | 3 | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $2x^2 - 8x + 6$ | | + | ‖ | + | ‖ | – | 0 | + | |
| $x^2 + x - 2$ | | + | ‖ | – | ‖ | + | | + | |
| $f(x)$ | | + | ‖ | – | ‖ | – | | + | |

On retrouve le signe positif à gauche de –2 et le signe négatif à droite de –2.

---

***24 page 28***

$g$ définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = \cos^2 x - x$.
1) Puisque la fonction cosinus n'a pas de limites en l'infini, les règles opératoires sur les limites ne peuvent pas

s'appliquer.
2) On sait que pour tout $x$ réel, $-1 \leqslant \cos x \leqslant 1$ et que si $-1 \leqslant X \leqslant 1$ alors $0 \leqslant X^2 \leqslant 1$.
On a donc: Pour tout $x$ réel, $0 \leqslant \cos^2 x \leqslant 1$, puis en ajoutant $(-x)$ à tous les membres de l'inégalité, il vient:
$-x \leqslant g(x) \leqslant -x+1$.


Comme $\lim\limits_{x\to-\infty} -x = +\infty$ et $g(x) \geqslant -x$, on a: $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x) = +\infty$.
Comme $\lim\limits_{x\to+\infty} (-x+1) = -\infty$ et $g(x) \leqslant -x+1$, on a: $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = -\infty$.

***25 page 28***

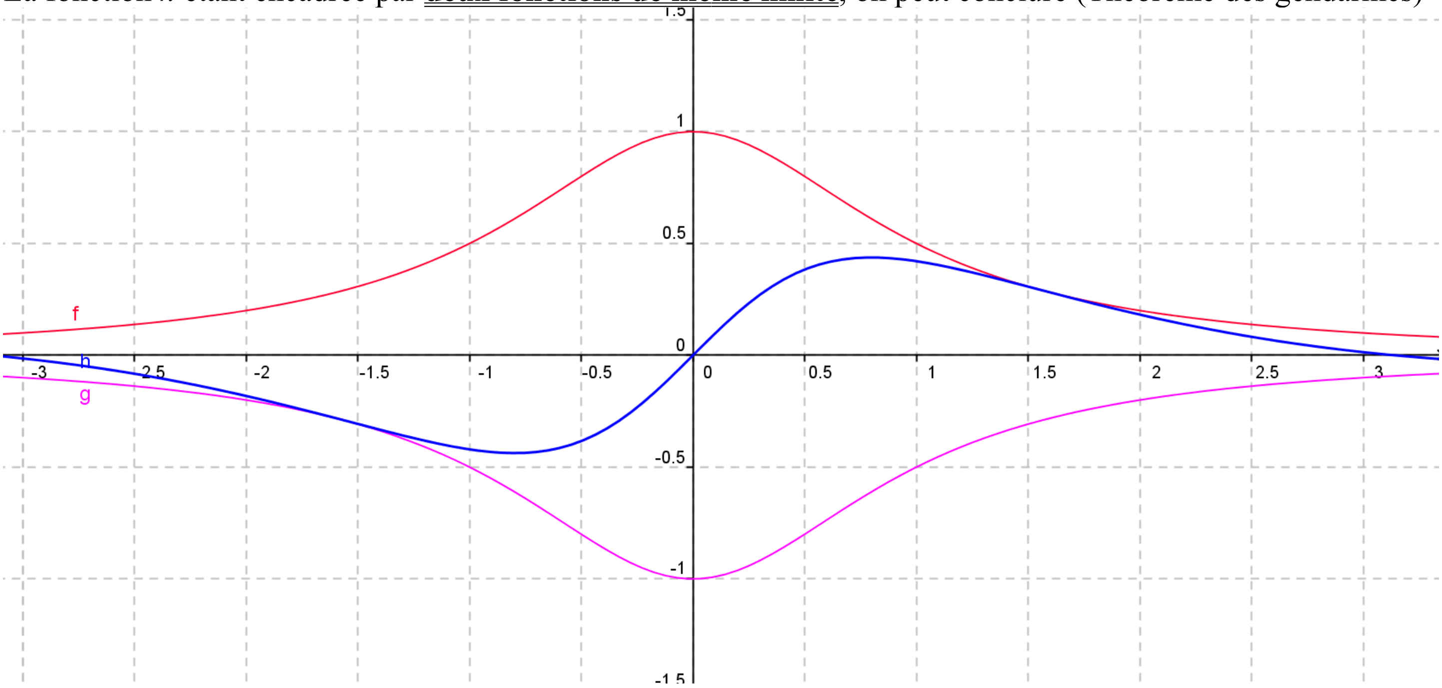
$h: x \mapsto \dfrac{\sin x}{x^2+1}$

On sait: pour tout $x$ réel, $-1 \leqslant \sin x \leqslant 1$

Comme $\dfrac{1}{x^2+1}$ est **strictement positif,** on obtient: $-\dfrac{1}{x^2+1} \leqslant \dfrac{\sin x}{x^2+1} \leqslant \dfrac{1}{x^2+1}$.

Comme $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2+1 = +\infty$, on a: $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x^2+1} = 0$.

La fonction $h$ étant encadrée par **deux fonctions de même limite**, on peut conclure (Théorème des gendarmes)




Finalement: $\lim\limits_{x\to+\infty} h(x) = 0$

De même en $-\infty$, $\lim\limits_{x\to-\infty} h(x) = 0$

---

*27 page 29*

**Fonctions composées:**

a) $u$: $x \mapsto 2x + 1$ est définie sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$

et $v : x \mapsto \sqrt{x}$ est définie sur $[0; +\infty[$ à valeurs dans $[0; +\infty[$,

d'où, $u \circ v$ est définie sur $[0; +\infty[$ par $u \circ v(x) = 2\sqrt{x} + 1$

et, $v \circ u$ est définie sur l'ensemble $\mathbb{D}$ tel que $2x + 1 \geqslant 0$. $\mathbb{D} = \left[\dfrac{-1}{2};+\infty\right[$ et $v \circ u(x) = \sqrt{2x+1}$.

et, $u \circ u$ est définie sur $\mathbb{R}$ par $u \circ u(x) = 2(2x + 1) + 1 = 4x + 3$

b) $u$: $x \mapsto x^2 + 1$ est définie sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ et $v : x \mapsto \sin x$ est définie sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $[-1; 1]$

d'où, $u \circ v$ est définie sur $\mathbb{R}$ par $u \circ v(x) = (\sin x)^2 + 1$

et, $v \circ u$ est définie sur $\mathbb{R}$ par $v \circ u(x) = \sin(x^2 +1)$

et, $u \circ u$ est définie sur $\mathbb{R}$ par $u \circ u(x) = (x^2 + 1)^2 + 1 = x^4 + 2x^2 + 2$

c) $u: x \mapsto \dfrac{1}{x}$ est définie sur $]-\infty; 0[ \cup ]0;+\infty[$ à valeurs dans $]-\infty; 0[ \cup ]0;+\infty[$

et $v : x \mapsto \cos x$ est définie sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $[-1; 1]$

d'où, $u \circ v$ est définie sur $\mathbb{D}$ tel que $\cos x \neq 0$.

$\mathbb{D} = \mathbb{R} \setminus \{ \dfrac{\pi}{2} + k\pi\ ;\ k \in \mathbb{Z}\}$ par $u \circ v(x) = \dfrac{1}{\cos x}$

et, $v \circ u$ est définie sur $]-\infty; 0[ \cup ]0;+\infty[$ par $v \circ u(x) = \cos \dfrac{1}{x}$

et, $u \circ u$ est définie sur $]-\infty; 0[ \cup ]0;+\infty[$ par $u \circ u\,(x) = x$

---

***30 page 29***

Soit $u$ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par: $u\,(x) = \dfrac{2x+1}{x^2+1}$.

$g$ est la fonction composée $\sin \circ\, u$.
Comme $\lim\limits_{x\to+\infty} u(x) = 0$ (voir N°13), et $\lim\limits_{x\to 0} \sin x = \sin 0 = 0$ (continuité du sinus en 0), on a: $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = 0$

$h$ est la fonction composée $\cos \circ\, u$.
Comme $\lim\limits_{x\to+\infty} u(x) = 0$ (voir N°13), et $\lim\limits_{x\to 0} \cos x = \cos 0 = 1$ (continuité du cosinus en 0), on a: $\lim\limits_{x\to+\infty} h(x) = 1$
M^me démarche pour $g$ et $h$ en $-\infty$.

---

***42 page 30***

$E$ désigne la fonction partie entière définie par:

Soit $x$ un réel.

On encadre $x$ par deux **entiers consécutifs.**

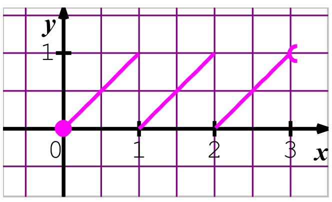
$n \leqslant x < n + 1$ avec $n \in \mathbb{Z}$. On pose $E(x) = n$

La fonction $f : x \mapsto x - E(x)$ définie sur $[0; 3[$ vérifie pour tout $x$ : $0 \leqslant f\,(x) < 1$ (On retranche $n$ à tous les membres de l'inégalité).

$f$ est la partie décimale de $x$.
Si $0 \leqslant x < 1$ alors $f\,(x) = x$ représenté par le segment semi-ouvert $[OA[$ avec $O(0; 0)$ et $A(1; 1)$

Si $1 \leqslant x < 2$ alors $f\,(x) = x - 1$ représenté par le segment semi-ouvert $[BC[$ avec $B(1; 0)$ et $C(2; 1)$

Si $2 \leqslant x < 3$ alors $f\,(x) = x - 2$ représenté par le segment semi-ouvert $[DE[$ avec $D(2; 0)$ et $E(3; 1)$

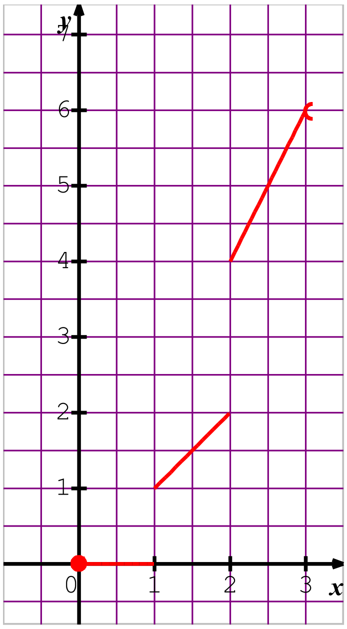


La fonction $g : x \mapsto x.E(x)$ définie sur [0; 3[ par:

Si $0 \leqslant x < 1$ alors $g(x) = 0$ représenté par le segment semi-ouvert $[OA[$ avec $O(0; 0)$ et $A(1; 0)$

Si $1 \leqslant x < 2$ alors $g(x) = x$ représenté par le segment semi-ouvert $[BC[$ avec $B(1; 1)$ et $C(2; 2)$

Si $2 \leqslant x < 3$ alors $g(x) = 2x$ représenté par le segment semi-ouvert $[DE[$ avec $D(2; 4)$ et $E(3; 6)$




Ces deux fonctions ne sont pas continues en 1 et en 2.

Elles sont continues sur l'intervalle ouvert ]1; 2[.

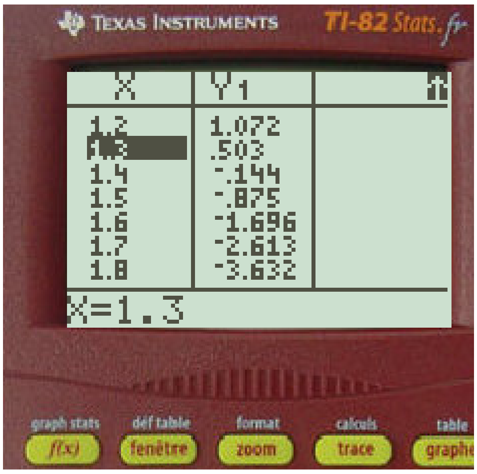
---

***44 page 30***

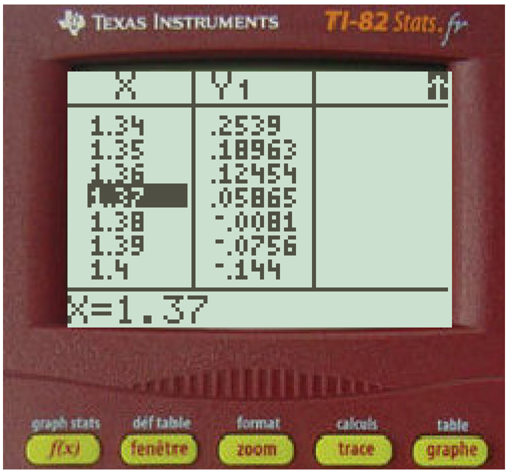
a) b) On pose $f(x) = -x^3 - x + 4$

$f$ est définie sur $\mathbb{R}$.
$f$ est continue sur $\mathbb{R}$. ($f$ est un polynôme et on sait que pour tout $a \in \mathbb{R}$, $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$)

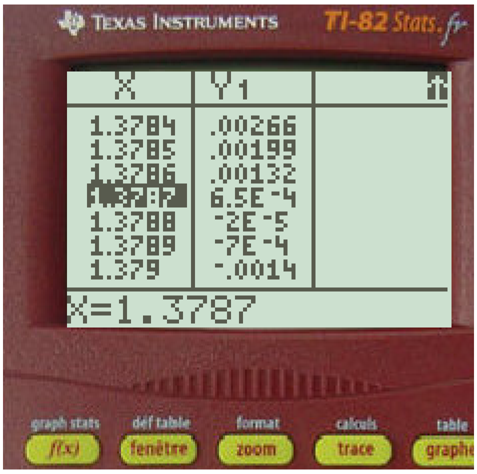
***Étude des variations:*** $f$, étant un polynôme, est dérivable sur $\mathbb{R}$, et, pour tout $x$ réel, $f'(x) = -3x^2 - 1$
La dérivée est de façon triviale (c-à-d. évidente) strictement négative, d'où, $f$ est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$.
***Étude de l'intervalle image:***
la limite à l'**infini** d'un polynôme est la limite de son terme de plus haut degré (la preuve en factorisant par le terme de plus haut degré).
On a donc: $\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} -x^3 = +\infty$ et $\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} -x^3 = -\infty$.
L'image de $\mathbb{R}$ par $f$ est en conséquence l'intervalle $]-\infty; +\infty[ = \mathbb{R}$.
Comme $0 \in \mathbb{R}$, l'équation $f(x) = 0$ possède une et une seule solution réelle $\alpha$.
Encadrement à la calculatrice:
Un tableau de valeurs à la calculatrice avec un pas de 0,1 donne:
On a donc: $1,3 < \alpha < 1,4$




Un tableau de valeurs à la calculatrice avec un pas de 0,01 donne:
1,37 < α < 1,38




Pour un encadrement à 0,0001, on a:
1,378 7 < α <  1,378 8




Pour tout réel $a$, l'équation $-x3 - x + 4 = a$ a une et une seule solution réelle, puisque $a \in f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$.

---

***45 page 30***

Le tableau de variations de la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $p: x \mapsto 2x^3 - 9x^2 + 12x - 4{,}5$

est :

| $x$ | $-\infty$ | | 1 | | 2 | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $p'(x)$ | | + | 0 | – | 0 | + | |
| $p(x)$ | $-\infty$ | $\nearrow$ | 0,5 | $\searrow$ | –0,5 | $\nearrow$ | $+\infty$ |

***Remarque:*** Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $p'(x) = 6x^2 - 18x + 12 = 6(x^2 - 3x + 2) = 6(x-1)(x-2)$

**Sur ]–∞; 1[,** le polynôme $p$ est continu, strictement croissant.

$p$ réalise donc une bijection de $]-\infty; 1[$ sur $]\lim\limits_{x\to-\infty} p(x); p(1)[ = ]-\infty; 0,5[$

Comme $0 \in ]-\infty; 0,5[$, l'équation $p(x) = 0$ a une et une seule solution $\alpha$ sur $]-\infty; 1[$

**Sur [1; 2],** le polynôme $p$ est continu, strictement décroissant.

$p$ réalise donc une bijection de $[1; 2]$ sur $[p(1); p(2)] = [-0,5; 0,5]$

Comme $0 \in [-0,5; 0,5]$, l'équation $p(x) = 0$ a une et une seule solution $\beta$ sur $[1; 2]$

**Sur [2; +∞[,** le polynôme $p$ est continu, strictement croissant.

$p$ réalise donc une bijection de $[2; +\infty[$ sur $[2; \lim\limits_{x\to+\infty} p(x)[ = [-0,5; +\infty[$

Comme $0 \in [-0,5; +\infty[$, l'équation $p(x) = 0$ a une et une seule solution $\gamma$ sur $[2; +\infty[$

Comme $p(1,5) = 2\times\left(\frac{3}{2}\right)^3 - 9\times\left(\frac{3}{2}\right)^2 + 12\times\frac{3}{2} - 4,5 = \frac{27}{4} - \frac{81}{4} + 18 - 4,5 = 0$ alors $\beta = 1,5$

Encadrement de $\alpha$: $0,633 < \alpha < 0,634$ et $2,366 < \gamma < 2,367$

---

***51 page 31***

***Remarque***: $\frac{1-\cos x}{x^2}$ est définie sur un voisinage de 0.

On choisit un voisinage de 0 tel que $1 + \cos x \neq 0$

C'est possible puisque $\cos x + 1 = 0$ pour $x = \pi\ [2\pi]$

$$\frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{(1-\cos x)(1+\cos x)}{x^2(1+\cos x)} = \frac{1-\cos^2 x}{x^2(1+\cos x)}$$

Or, $1 - \cos^2 x = \sin^2 x$

On a donc: $\frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{\sin^2 x}{x^2(1+\cos x)} = \left(\frac{\sin x}{x}\right)^2 \times \frac{1}{1+\cos x}$

On sait: $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ et $\lim\limits_{x\to 1} x^2 = 1$, d'où (limite d'une fonction composée), $\lim\limits_{x\to 0} \left(\frac{\sin x}{x}\right)^2 = 1$

D'autre part, $\lim\limits_{x\to 0} \cos x = \cos(0) = 1$, d'où, $\lim\limits_{x\to 0} 1+\cos x = 2$

On obtient: $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1}{1+\cos x} = \frac{1}{2}$.

Finalement: $\lim\limits_{x\to 0} \left(\frac{\sin x}{x}\right)^2 \times \frac{1}{1+\cos x} = \frac{1}{2}$

Conclusion: $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos x}{x^2} = \dfrac{1}{2}$

***52 page 31***

Étude de $u(x) = \dfrac{1-\cos x}{x}$ , de $v(x) = \dfrac{1-\cos x}{x^3}$ , de $w(x) = \dfrac{1-\cos x}{\sqrt{x}}$ au voisinage de 0.

D'après le n° 51 précédent, on sait qu'on peut écrire pour $x \neq 0$ et $x \neq \pi$ [2π]

$$\frac{1-\cos x}{x} = \frac{(1-\cos x)(1+\cos x)}{x(1+\cos x)} = \frac{1-\cos^2 x}{x(1+\cos x)} = \frac{\sin^2 x}{x(1+\cos x)} = \frac{\sin x}{x}\times\frac{\sin x}{1+\cos x}$$

Comme $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$ et $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1}{1+\cos x} = \dfrac{1}{2}$ et $\lim\limits_{x\to 0} \sin x = 0$, on obtient: $\lim\limits_{x\to 0} u(x) = 0$ (limites d'un produit)

$$\frac{1-\cos x}{x^3} = \frac{(1-\cos x)(1+\cos x)}{x^3(1+\cos x)} = \frac{1-\cos^2 x}{x^3(1+\cos x)} = \frac{\sin^2 x}{x^3(1+\cos x)} = \left(\frac{\sin x}{x}\right)^2\times\frac{1}{x(1+\cos x)}$$

On sait: $\lim\limits_{x\to 0} \left(\dfrac{\sin x}{x}\right)^2 = 1$

D'autre part: $\lim\limits_{x\to 0} 1+\cos x = 2$ et $\lim\limits_{x\to 0} x = 0$ d'où, $\lim\limits_{x\to 0} x(1+\cos x) = 0$

Deux cas pour l'étude du quotient.

***Premier cas,*** $x > 0$.

On a alors: $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \dfrac{1}{x(1+\cos x)} = +\infty$

$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} v(x) = +\infty$

***Deuxième cas***: $x < 0$

On a alors: $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}} \dfrac{1}{x(1+\cos x)} = -\infty$

$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}} v(x) = -\infty$.

On se place sur ]0; π[ pour que l'expression soit définie et ainsi $\sin x > 0$

$$\frac{1-\cos x}{\sqrt{x}} = \frac{(1-\cos x)(1+\cos x)}{\sqrt{x}(1+\cos x)} = \frac{1-\cos^2 x}{\sqrt{x}(1+\cos x)} = \frac{\sin^2 x}{\sqrt{x}(1+\cos x)} = \sqrt{\left(\frac{\sin x}{x}\right)}\times\frac{\sqrt{\sin x}\times\sin x}{1+\cos x}$$

On sait: $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$ et $\lim\limits_{x\to 1} \sqrt{x} = 1$, d'où (limite d'une fonction composée), $\lim\limits_{x\to 0} \sqrt{\left(\dfrac{\sin x}{x}\right)} = 1$

D'autre part, on a: $\lim_{x\to 0} 1+\cos x = 2$ et $\lim_{x\to 0} \sin x = 0$ d'où, $\lim_{x\to 0} \sqrt{\sin x} = 0$

Finalement: $\lim_{x\to 0} w(x) = 0$

---

### *53 page 31*

$g$ est définie sur ℝ par: $g(x) = \sqrt{x^2+1} - x$

**<u>En $-\infty$:</u>**

Les théorèmes usuels sur les opérations permettent de conclure.

On a successivement:

$\lim_{x\to -\infty} x^2+1 = +\infty$ et $\lim_{x\to +\infty} \sqrt{x} = +\infty$ , d'où, (limite de fonction composée), $\lim_{x\to -\infty} \sqrt{x^2+1} = +\infty$

$\lim_{x\to -\infty} -x = +\infty$

Finalement: (limite d'une somme de fonctions) $\lim_{x\to -\infty} g(x) = +\infty$

**<u>En $+\infty$:</u>**

Les théorèmes usuels ne permettent pas de conclure (F.I: " $+\infty-\infty$ ")

Il est nécessaire de chercher une autre écriture de $g(x)$.

**Méthode:** On multiplie et on divise par l'expression conjuguée.

$$g(x) = \frac{\sqrt{x^2+1}-x\sqrt{x^2+1}+x}{\sqrt{x^2+1}+x} = \frac{x^2+1-x^2}{\sqrt{x^2+1}+x} = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}+x}$$

Les théorèmes usuels sur les opérations permettent de conclure.

On a successivement:

$\lim_{x\to +\infty} x^2+1 = +\infty$ et $\lim_{x\to +\infty} \sqrt{x} = +\infty$ , d'où, (limite de fonction composée), $\lim_{x\to +\infty} \sqrt{x^2+1} = +\infty$

$\lim_{x\to +\infty} x = +\infty$

(limite d'une somme de fonctions) $\lim_{x\to +\infty} \sqrt{x^2+1}+x = +\infty$ et $\lim_{x\to +\infty} \frac{1}{x} = 0$ (limite de fonction composée),

Finalement: $\lim_{x\to +\infty} g(x) = 0$

---

### *56 page 31*

Soit $f$ la fonction définie sur $]1; +\infty[$ par: $f(x) = \frac{\sqrt{x+3}-2}{x-1}$

Les théorèmes usuels ne permettent pas de conclure en $+\infty$ (F.I: " $\frac{\infty}{\infty}$ ") et en 1 (F.I: " $\frac{0}{0}$ " )

Méthode (Voir N°53)

$$f(x) = \frac{\sqrt{x+3}-2}{x-1} = \frac{\sqrt{x+3}-2\sqrt{x+3}+2}{(x-1)\sqrt{x+3}+2} = \frac{x+3-4}{(x-1)\sqrt{x+3}+2}$$

Comme $x \neq 1$, on obtient $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x+3}+2}$

Maintenant, les théorèmes usuels ne permettent pas de conclure

$\lim_{x\to 1} f(x) = \frac{1}{4}$ et $\lim_{x\to +\infty} f(x) = 0$ (Voir N°53)

---

***59 page 31***

$h$ est la fonction définie par $h(x) = \dfrac{x}{2-\sin x}$

Pour tout $x$ réel, $-1 \leqslant \sin x \leqslant 1$

d'où, $-1 \leqslant -\sin x \leqslant 1$

puis, $2-1 \leqslant 2-\sin x \leqslant 2+1$

On a donc: $1 \leqslant 2-\sin x \leqslant 3$

La fonction inverse étant strictement décroissante sur $]0;+\infty[$ (intervalle contenant $2-\sin x$), il vient:

$\dfrac{1}{3} \leqslant \dfrac{1}{2-\sin x} \leqslant \dfrac{1}{1}$ $\boxed{\dfrac{1}{3} \leqslant \dfrac{1}{2-\sin x} \leqslant 1}$

Pour encadrer $h(x)$, il suffit de multiplier par $x$ tous les membres de l'encadrement.

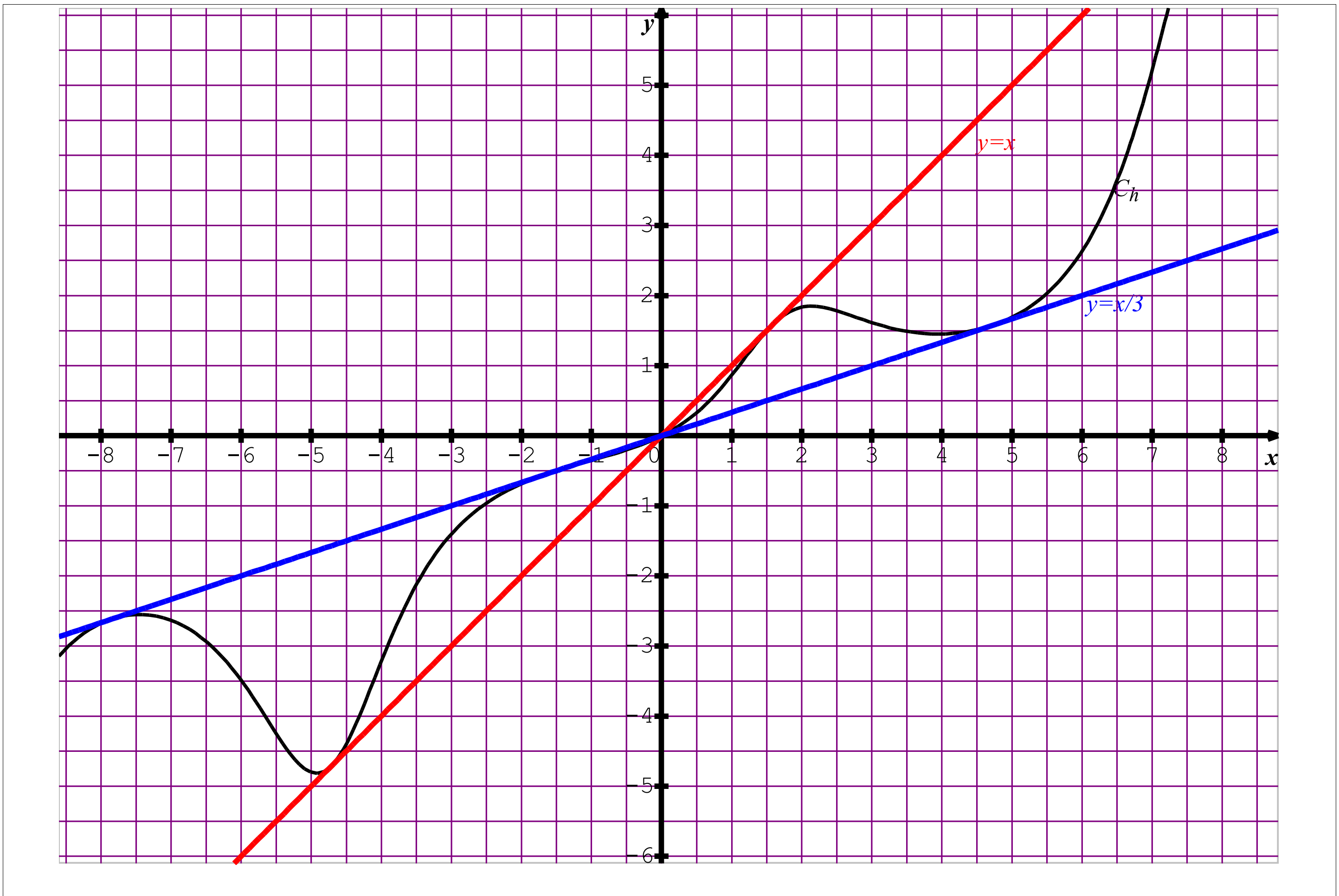
__**Deux cas:**__ 1) Si $x \geqslant 0$, alors $\dfrac{x}{3} \leqslant \dfrac{x}{2-\sin x} \leqslant x$ **Sur [0;+inf[,** $\boxed{\dfrac{x}{3} \leqslant h(x) \leqslant x}$

Comme $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x}{3} = +\infty$ et $\dfrac{x}{3} \leqslant h(x)$ alors $\lim\limits_{x \to +\infty} h(x) = +\infty$

2) Si $x \leqslant 0$, alors $x \leqslant \dfrac{x}{2-\sin x} \leqslant \dfrac{x}{3}$ **Sur ]–∞;0],** $\boxed{x \leqslant h(x) \leqslant \dfrac{x}{3}}$

Comme $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{x}{3} = -\infty$ et $h(x) \leqslant \dfrac{x}{3}$ alors $\lim\limits_{x \to -\infty} h(x) = -\infty$

**Remarque**: l'encadrement de la fonction $h$ se traduit graphiquement par $C_h$ comprise entre deux droites d'équations respectives: $y = x$ et $y = \dfrac{x}{3}$.




Index

***60 page 31***

*u* et *v* sont définies respectivement par $u: \mapsto x\cos\left(\frac{1}{x}\right)$ et $v: \mapsto \sqrt{x}\sin\left(\frac{1}{x}\right)$

***Étude en 0***

**Rappel**, *les fonctions trigonométriques n'ont pas de limite en l'infini.*
*Il n'est donc pas possible d'utiliser les théorèmes concernant limites et opérations.*
*En effet,* $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} \frac{1}{x} = +\infty$*, et, en utilisant la limite d'une fonction composée, il faudrait connaître la limite en* $+\infty$ *de la fonction cosinus ou de la fonction sinus.*

La fonction *u* est définie sur $]-\infty;0[ \cup ]0;+\infty[$. Il est donc nécessaire d'étudier la limite à gauche en 0 et la limite à droite en 0.
La fonction *v* est définie sur $]0;+\infty[$. On a donc nécessairement $x > 0$.
Comme pour tout réel $X$, on a: $-1 \leqslant \cos X \leqslant 1$ et $-1 \leqslant \sin X \leqslant 1$, on a:
pour tout $x$ réel non nul, $-1 \leqslant \cos \frac{1}{x} \leqslant 1$ et $-1 \leqslant \sin \frac{1}{x} \leqslant 1$
Sur $]0;+\infty[$, en multipliant par $x > 0$ (resp. $\sqrt{x} > 0$), on a: $-x \leqslant u(x) \leqslant x$ (resp. $-\sqrt{x} \leqslant v(x) \leqslant \sqrt{x}$ .)
Comme $\lim\limits_{x\to 0} x = \lim\limits_{x\to 0} -x = 0$, d'après le théorème des gendarmes, $\lim\limits_{x\to 0^+} u(x) = 0$
Comme $\lim\limits_{x\to 0} \sqrt{x} = \lim\limits_{x\to 0} -\sqrt{x} = 0$, d'après le théorème des gendarmes, $\lim\limits_{x\to 0} v(x) = 0$

Sur $]-\infty;0[$, en multipliant par $x < 0$, on a: $x \leqslant u(x) \leqslant -x$
Comme $\lim\limits_{x\to 0} x = \lim\limits_{x\to 0} -x = 0$, d'après le théorème des gendarmes, $\lim\limits_{x\to 0^-} u(x) = 0$
***Remarque***: Les courbes $C_u$ et $C_v$ sont encadrées respectivement par les droites d'équations $y=x$ et $y=-x$ , et, par les deux demi-paraboles d'équations $y=\sqrt{x}$ et $y=-\sqrt{x}$

***Étude en +∞***

$u(x) = x \cos \frac{1}{x}$

On sait: $\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{1}{x} = 0$ et $\lim\limits_{x\to 0} \cos x = 1$, d'où, (fonction composée), $\lim\limits_{x\to +\infty} \cos\frac{1}{x} = 1$
Or, $\lim\limits_{x\to +\infty} x = +\infty$, d'où, (limite d'un produit), $\lim\limits_{x\to +\infty} u(x) = +\infty$.

**La méthode n'est pas possible avec *v* (*x*), car, cela mène à la forme indéterminée "+∞×0"**
**Mais, en remarquant que dans la forme $\frac{\sin x}{x}$ en 0, cela revient à considérer le produit $\sin x \times \frac{1}{x}$ , on cherche à "transformer" l'écriture de *v* (*x*) pour mettre en évidence cette limite de référence.**
**La quantité qui tend vers 0 est $\frac{1}{x}$ .**
**Pour faciliter l'écriture, on pose *t* = $\frac{1}{x}$ (Ainsi, on a une recherche à faire quand *t* tend vers 0), et, on cherche l'expression équivalente en fonction de *t*.**
Si $t = \frac{1}{x}$ avec $x > 0$, on a: $\sqrt{x} = \sqrt{\frac{1}{t}} = \frac{1}{\sqrt{t}}$
L'écriture de $v(x) = \sqrt{x} \times \sin\frac{1}{x}$ devient alors: $\frac{1}{\sqrt{t}} \times \sin t$.

Or, ce qu'il faut obtenir est $\dfrac{\sin t}{t}$.

On multiplie donc le numérateur et le dénominateur par $\sqrt{t}$.

Si $t = \dfrac{1}{x}$ alors $\sqrt{x} \times \sin\dfrac{1}{x} = \dfrac{1}{\sqrt{t}} \times \sin t = \sqrt{t} \times \dfrac{\sin t}{t}$

La limite en $+\infty$ de $v(x)$ est celle de $\sqrt{t} \times \dfrac{\sin t}{t}$ en 0.

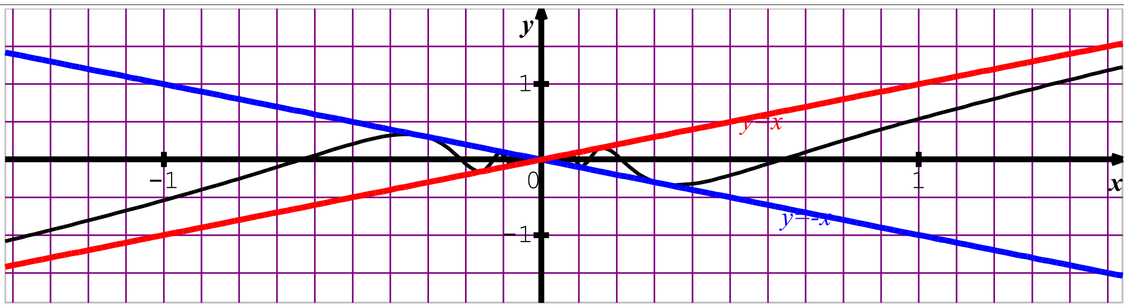
Or, $\lim\limits_{t\to 0} \dfrac{\sin t}{t} = 1$ et $\lim\limits_{t\to 0} \sqrt{t} = 0$, d'où, (limite d'un produit), $\lim\limits_{t\to 0} \sqrt{t}\times\dfrac{\sin t}{t} = 0$

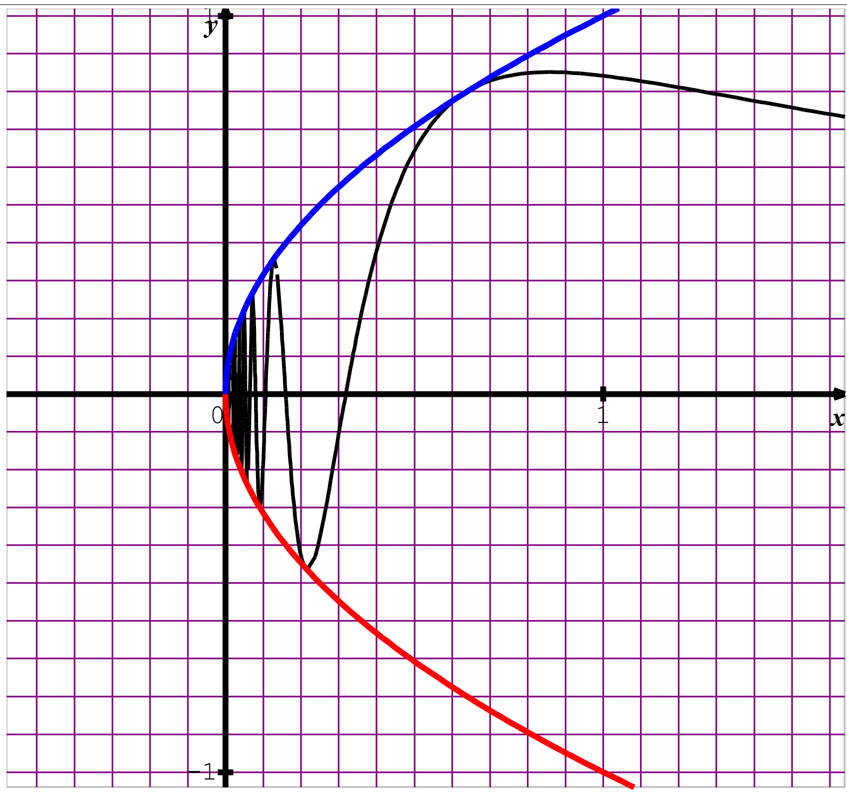
***Conclusion***: $\lim\limits_{x\to+\infty} v(x) = 0$

***Remarque:*** *Puisque $t > 0$ et puisqu'on cherche la limite en 0, on peut se placer sur l'intervalle* $\left]0\,;\dfrac{\pi}{2}\right]$ *de façon à avoir $\sin t > 0$.*

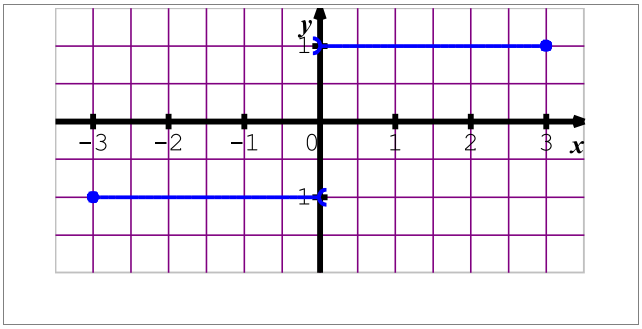
*On peut alors écrire $\sin t = \sqrt{\sin t} \times \sqrt{\sin t}$ et considérer l'écriture:* $\sqrt{\dfrac{\sin t}{t}} \times \sqrt{\sin t}$.

*Comme* $\lim\limits_{t\to 0} \dfrac{\sin t}{t}$ *et* $\lim\limits_{t\to 1} \sqrt{t} = 1$*, on a: (fonction composée)* $\lim\limits_{t\to 0} \sqrt{\dfrac{\sin t}{t}} = 1$*, etc, ...*



Index




### *63 page 32*

$f(x) = \dfrac{x}{|x|}$ . Si $x < 0$, on a: $|x| = -x$ et $f(x) = -1$

Si $x > 0$, on a: $|x| = x$ et $f(x) = 1$

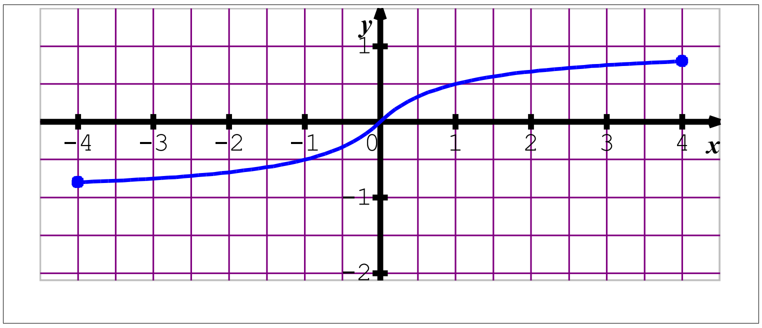
$f$ n'est pas définie en 0

$f$ n'est pas continue en 0

Index

---

### *64 page 32*




$f(x) = \dfrac{x}{|x|+1}$ $\quad$ $f$ est définie sur [–4; 4]

( $|x| \geqslant 0$, donc, $|x| + 1 \geqslant 1$)

Si $x \geqslant 0$ alors $f(x) = \dfrac{x}{x+1}$

Si $x < 0$ alors $f(x) = \dfrac{x}{-x+1}$

Le seul point à étudier est 0. Or, $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \dfrac{x}{x+1} = 0$ et $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}} \dfrac{x}{-x+1} = 0$.

$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}} f(x) = 0 = f(0)$. $\quad$ ***f* est continue sur [–4; 4].** **Index**

---

### *67 page 32*

$f$ telle que $f(x) = 2\sin x - x$

1) $f$ est la somme de fonctions dérivables sur ℝ, d'où, $f$ est dérivable sur ℝ et, pour tout $x$ réel, $f'(x) = 2\cos x - 1$

***Étude du signe de f ' (x) sur [0; π].***

$2\cos x - 1 = 0$ si et seulement si $\cos x = \dfrac{1}{2}$

Or la fonction cosinus est strictement décroissante sur $[0; \pi]$ et $\cos \dfrac{\pi}{3} = \dfrac{1}{2}$

d'où, si $0 \leqslant x < \dfrac{\pi}{3}$ alors $\cos x > \dfrac{1}{2}$ et $2\cos x - 1 > 0$

si $\dfrac{\pi}{3} < x \leqslant \pi$ alors $\cos x < \dfrac{1}{2}$ et $2\cos x - 1 < 0$

$f(0) = 0$, $\quad f\left(\dfrac{\pi}{3}\right) = 2\times\dfrac{\sqrt{3}}{2} - \dfrac{\pi}{3} = \sqrt{3} - \dfrac{\pi}{3}$, $\quad f(\pi) = -\pi$

On a donc:

| $x$ | $0$ | $\frac{\pi}{3}$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $f(x)$ | $0$ ↗ | $\sqrt{3}-\frac{\pi}{3}$ | ↘ $-\pi$ |

Comme $f$ est continue sur $[0; \pi]$, (somme de fonctions continues), on peut appliquer le théorème des valeurs intermédiaires sur chacun des intervalles $[0; \frac{\pi}{3}]$ et $[\frac{\pi}{3}; \pi]$.

sur $[0; \frac{\pi}{3}]$, $f$ est continue strictement croissante, donc, $f$ réalise une bijection de $[0; \frac{\pi}{3}]$ sur $[f(0); f(\frac{\pi}{3})]$

Comme $f(0) = 0$, 0 est la seule solution sur $[0; \frac{\pi}{3}]$ à l'équation $f(x) = 0$.

sur $[\frac{\pi}{3}; \pi]$, $f$ est continue strictement décroissante, donc, $f$ réalise une bijection de $[\frac{\pi}{3}; \pi]$ sur $[f(\pi), f(\frac{\pi}{3})]$.

Comme $f(\pi) < 0 < f(\frac{\pi}{3})$, il existe une et une seule solution sur $[\frac{\pi}{3}; \pi]$ à l'équation $f(x) = 0$..

Or, $f(x) = 0$ équivaut à $\sin x = \frac{x}{2}$

L'équation $\sin x = \frac{x}{2}$ possède exactement deux solutions sur $[0; \pi]$, 0 et $\alpha$ dans $[\frac{\pi}{3}; \pi]$

Comme $f(-x) = -f(x)$ (fonction impaire), l'équation $\sin x = \frac{x}{2}$ possède exactement deux solutions sur $[-\pi; 0]$, 0 et $-\alpha$ dans $[-\pi; -\frac{\pi}{3}]$

2) Si $x > \pi$ alors $-x < -\pi$.

Or, pour tout $x$ réel, $2\sin x \leqslant 2$, d'où, si $x > \pi$, $f(x) < 2 - \pi$.

Comme $2 - \pi < 0$, l'équation $f(x) = 0$ n'a aucune solution sur $]\pi; +\infty[$

Si $x < -\pi$ alors $-x > \pi$.
Or, pour tout $x$ réel, $-2 \leqslant 2\sin x$, d'où, si $x < -\pi$, $-2 + \pi < f(x)$

Comme $-2 + \pi > 0$, l'équation $f(x) = 0$ n'a aucune solution sur $]-\infty; -\pi[$

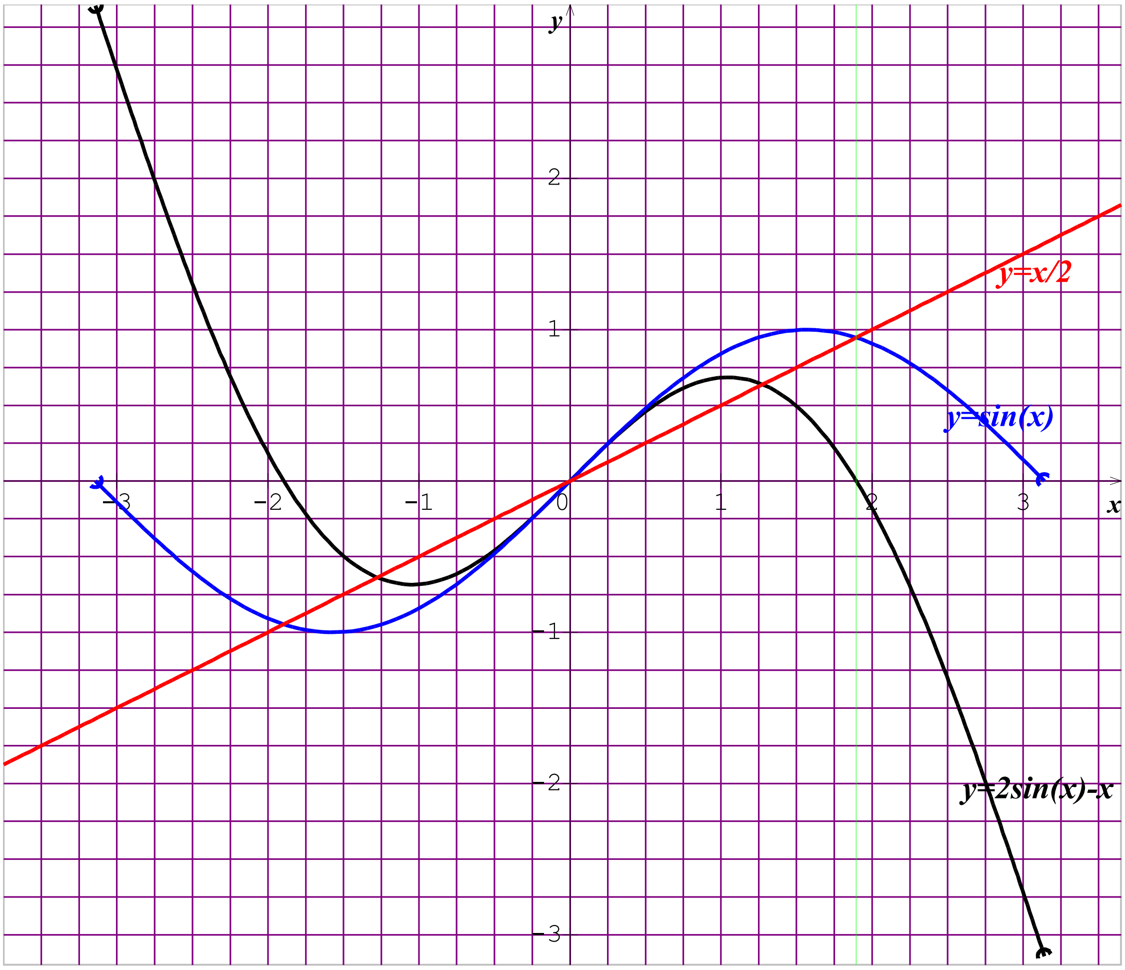
Finalement, l'équation $\sin x = \frac{x}{2}$ a trois solutions sur $\mathbb{R}$; $-\alpha$, 0 et $\alpha$ avec $\alpha \in [\frac{\pi}{3}; \pi]$

***Observation graphique:***

La courbe représentative de $f$ sur $[-\pi; \pi]$ admet l'origine du repère pour centre de symétrie.

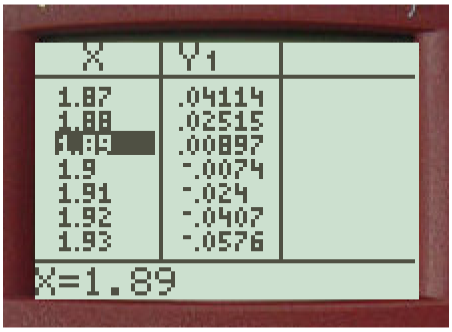
La courbe $C_f$ coupe l'axe des abscisses en trois points d'abscisses $-\alpha$; 0 et $\alpha$.

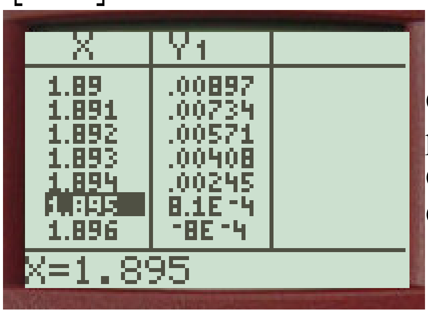
La courbe représentative du sinus (en bleu) et la droite d'équation $y = \frac{x}{2}$ ont trois points d'intersection d'abscisses respectives $-\alpha$; 0 et $\alpha$.




***Encadrement de α***

À la calculatrice, on peut graphiquement observer que α se situe dans l'intervalle [1,8: 2]
On peut créer la table à partir de 1,8 avec un pas de 0,1 pour un encadrement d'amplitude 0,1.
On lit alors : $1{,}8 < \alpha < 1{,}9$
On met ensuite un pas de 0,01
On lit alors : $f(1{,}89) \approx 0{,}008\,9\,7$ et $f(1{,}9) \approx -0{,}007\,4$
Comme $f(1{,}9) < 0 < f(1{,}89)$ et que $f$ est strictement décroissante sur $\left[\frac{\pi}{3};\pi\right]$, on a: $1{,}89 < \alpha < 1{,}90$




On crée la table à partir de 1,89 avec un pas de 0,001 pour un encadrement d'amplitude 0,001.
On lit alors : $f(1{,}895) \approx 0{,}000\,8$ et $f(1{,}896) \approx -0{,}000\,8$
Comme $f(1{,}896) < 0 < f(1{,}895)$ et que $f$ est strictement décroissante sur $\left[\frac{\pi}{3};\pi\right]$, on a: $1{,}895 < \alpha < 1{,}896$

***70 page 32***

Soit $n$ un entier naturel supérieur à 1

On pose $f(x) = \sqrt[n]{x}$ avec $x \in \mathbb{R}^+$.

(pour tout $x \geqslant 0$, $y = f(x)$ équivaut à $y^n = x$)

1) Le taux d'accroissement de *f* entre *a* et *b* est: $\tau = \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$

2) On pose $f(a) = c$ et $f(b) = d$. On a donc: $a = c^n$ et $d = b^n$ ($a \neq b$ et $a \in \mathbb{R}^+$ et $b \in \mathbb{R}^+$)

On en déduit: $\tau = \dfrac{d-c}{d^n-c^n}$

3) Or, la fonction $g: x \mapsto x^n$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$, d'où, $\dfrac{d^n-c^n}{d-c} > 0$

Son inverse $\dfrac{d-c}{d^n-c^n}$ est donc strictement positif.

Le taux d'accroissement de *f* entre *a* et *b* étant strictement positif, *f* est une fonction strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$.

---

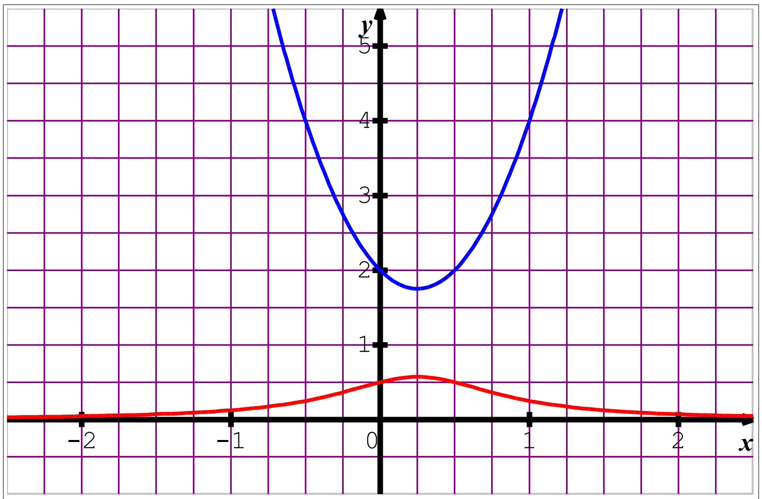
***74 page 33***

1) $p : x \mapsto ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$) est représentée par la parabole en bleue et la fonction $h = \dfrac{1}{p}$ est représentée par la courbe en rouge.

2) Tableau de variations de *p*

| $x$ | $-\infty$ | | $0{,}25$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $p'(x)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $p(x)$ | $+\infty$ | ↘ | $1{,}75$ | ↗ | $+\infty$ |

On en déduit que les réels $p(x)$ sont strictement positifs. On peut donc calculer leur inverse et comme *h* est la fonction composée $p \circ \text{inv}$ (où inv est la fonction inverse),
on en déduit que *h* est définie sur $]-\infty;+\infty[$.




***a* > 0 et Δ < 0**

Les variations de $h$.

Comme $p$ strictement décroissante sur $]-\infty;0,25]$ à valeurs dans $]0;+\infty[$ et la fonction inv strictement décroissante sur $]0;+\infty[$ alors $h$ est strictement croissante sur $]-\infty;0,25]$.

Comme $p$ strictement croissante sur $[0,25;+\infty[$ à valeurs dans $]0;+\infty[$ et la fonction inv strictement décroissante sur $]0;+\infty[$ alors $h$ est strictement décroissante sur $[0,25;+\infty[$.

D'après la limite d'une fonction composée: $\lim\limits_{x\to-\infty} h(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} h(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0$

| $x$ | $-\infty$ | | $0,25$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $h(x)$ | | | $4/7$ | | |
| | $0$ | $\nearrow$ | | $\searrow$ | $0$ |

D'après le "sens" de la parabole, on a: $a > 0$

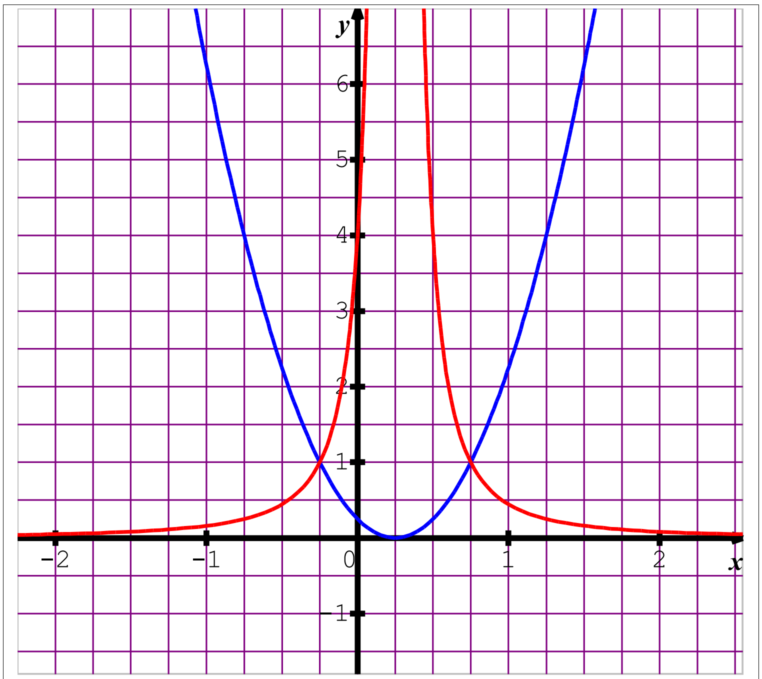
Comme la parabole ne coupe pas l'axe des abscisses, on a: $\Delta < 0$ (aucune racine)

3) ***a* > 0 et Δ = 0**

(On peut écrire $p(x)=a(x-\alpha)^2$ ).

Les variations de $p$ ne sont pas modifiées, mais, comme $p$ s'annule en α, on a:

***h n'est pas définie en α***




***a* > 0 et Δ = 0**

D'autre part: $\lim\limits_{\substack{x\to\alpha\\x>\alpha}} h(x) = \lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}} \frac{1}{x} = +\infty$ et $\lim\limits_{\substack{x\to\alpha\\x<\alpha}} h(x) = \lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}} \frac{1}{x} = +\infty$

$C_h$ a deux asymptotes: l'une horizontale, l'axe des abscisses et l'autre verticale d'équation x=α

Résumé:

| $x$ | $-\infty$ | | $\alpha$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $h(x)$ | $0$ | $\nearrow$ | $+\infty$ ‖ $+\infty$ | $\searrow$ | $0$ |

***a* > 0 et Δ > 0**

(On peut écrire $p(x)=a(x-x_1)(x-x_2)$ ).

Les variations de *p* ne sont pas modifiées, mais, comme *p* s'annule en $x_1$ et $x_2$, alors, *h* n'est pas définie en en $x_1$ et $x_2$.

D'autre part, *p* est strictement négatif sur $]x_1;x_2[$ et atteint son minimum en $\frac{x_1+x_2}{2}=-\frac{b}{2a}$ = α

d'où,

*p* est strictement décroissante sur ]–∞; $x_1$ [ et à valeurs **strictement positives**.

Comme la fonction inv est strictement décroissante sur ]0;+∞[, on a:

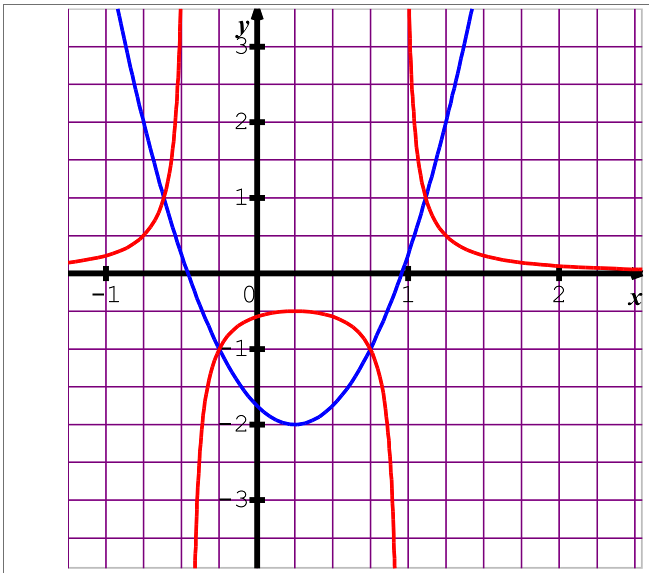
*h* est strictement croissante sur ]–∞; $x_1$ [

*p* est strictement décroissante sur ] $x_1$ ; α] et à valeurs **strictement négatives**.

Comme la fonction inv est strictement décroissante sur ]–∞;0[, on a: *h* est strictement croissante sur ] $x_1$ ; α]

*p* est strictement croissante sur [α; $x_2$ [ et à valeurs **strictement négatives**.

Comme la fonction inv est strictement décroissante sur ]–∞;0[, on a: *h* est strictement décroissante sur [α; $x_2$ [




***a* > 0 et Δ > 0**

*p* est strictement croissante sur ] $x_2$ ; +∞[ et à valeurs **strictement positives**.

Comme la fonction inv est strictement décroissante sur ]0;+∞[, on a:

*h* est strictement décroissante sur ] $x_2$ ; +∞[

Limites à l'infini: même démarche et même résultat que dans les cas précédents.

Limite à gauche en $x_1$ et limite à droite en $x_2$ : même démarche que pour α au cas précédent et même résultat.

Limite à droite en $x_1$ et limite à gauche en $x_2$ :

le signe de $p(x)$ est négatif, d'où, les limites obtenues sont $-\infty$.
$C_h$ a trois asymptotes: l'axe des abscisses et deux asymptotes verticales d'équations: $x=x_1$ et $x=x_2$
Résumé:

| $x$ | $-\infty$ | | $x_1$ | | $\alpha$ | | $x_2$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $p'(x)$ | | $-$ | | $-$ | $0$ | $+$ | | $+$ | |
| $p(x)$ | $+\infty$ ↘ | | $0$ | | $\min<0$ | | $0$ | ↗ | $+\infty$ |
| $p(x)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | | $-$ | $0$ | $+$ | |

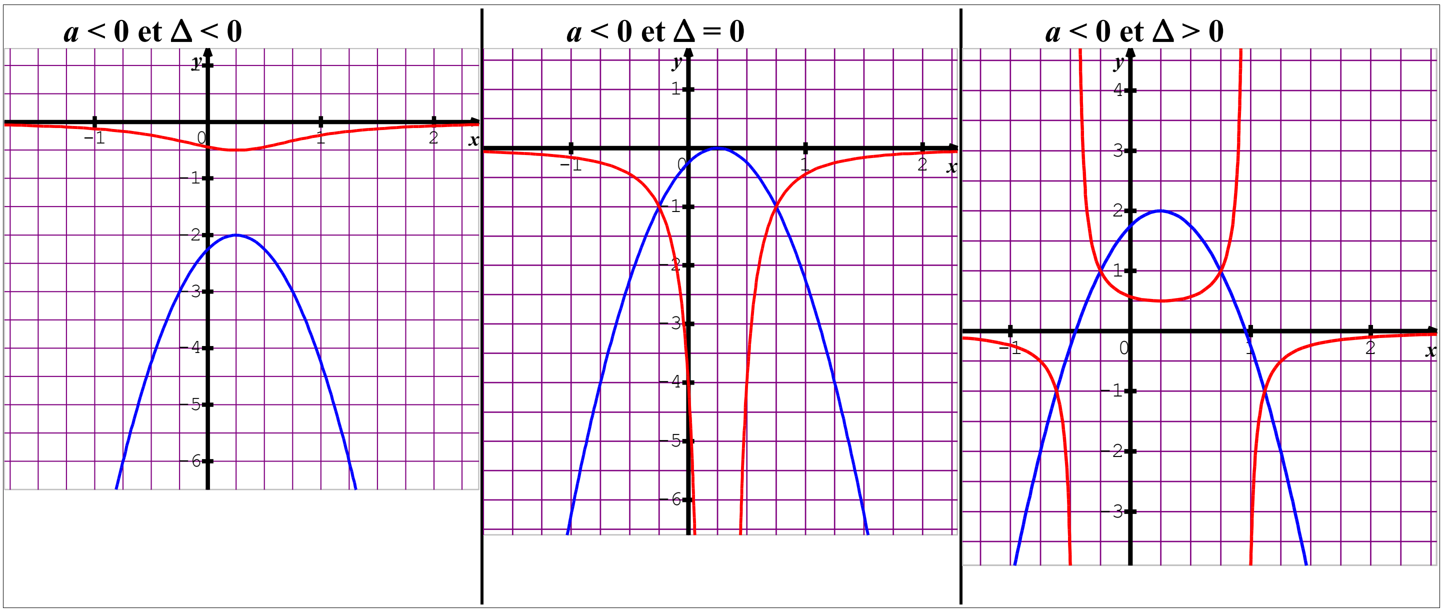
| $x$ | $-\infty$ | $x_1$ | $\alpha$ | $x_2$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $h(x)$ | $0$ ↗ | $+\infty$ ‖ $-\infty$ ↗ | $\max<0$ ↘ | $-\infty$ ‖ $+\infty$ ↘ | $0$ |

4) Premier cas: ***a* < 0 et Δ < 0** (aucune racine et $p(x) < 0$)
Comme $p$ strictement croissante sur $]-\infty;\alpha]$ à valeurs dans $]-\infty;0[$ et la fonction inv strictement décroissante sur $]-\infty;0[$ alors $h$ est strictement décroissante sur $]-\infty;\alpha]$ .
Comme $p$ strictement décroissante sur $[\alpha;+\infty[$ à valeurs dans $]-\infty;0[$ et la fonction inv strictement décroissante sur $]-\infty;0[$ alors $h$ est strictement croissante sur $[\alpha;+\infty[$ .
D'après la limite d'une fonction composée: $\lim_{x\to-\infty} h(x) = \lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x} = 0$ et $\lim_{x\to+\infty} h(x) = \lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x} = 0$

Deuxième cas: ***a* < 0 et Δ = 0**
On peut écrire $p(x)=a(x-\alpha)^2$ ).
$p$ s'annule en α, on a: $h$ n'est pas définie en α.
D'autre part: $\lim_{\substack{x\to\alpha\\ x>\alpha}} h(x) = \lim_{\substack{x\to 0\\ x<0}}\frac{1}{x} = -\infty$ et $\lim_{\substack{x\to\alpha\\ x<\alpha}} h(x) = \lim_{\substack{x\to 0\\ x<0}}\frac{1}{x} = -\infty$

Troisième cas: ***a* < 0 et Δ > 0**
Même démarche, mais, les signes et les variations sont inversées.

Illustration




Tableaux de variations

**$a < 0$ et $\Delta < 0$**

| $x$ | $-\infty$ | | $\alpha$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $p(x)$ | $-\infty$ | ↗ | max<0 | ↘ | $-\infty$ |

| $x$ | $-\infty$ | | $\alpha$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $h(x)$ | 0 | ↘ | min<0 | ↗ | 0 |

**$a < 0$ et $\Delta = 0$**

| $x$ | $-\infty$ | | $\alpha$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $p(x)$ | $-\infty$ | ↗ | 0 | ↘ | $-\infty$ |

| $x$ | $-\infty$ | | $\alpha$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $h(x)$ | 0 | ↘ | $-\infty$ ‖ $-\infty$ | ↗ | 0 |

**$a < 0$ et $\Delta < 0$**

| $x$ | $-\infty$ | | $x_1$ | | $\alpha$ | | $x_2$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $p(x)$ | $-\infty$ | ↗ | 0 | ↗ | max>0 | ↘ | 0 | ↘ | $-\infty$ |

| $x$ | $-\infty$ | | $x_1$ | | $\alpha$ | | $x_2$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $h(x)$ | 0 | ↘ | $-\infty$ ‖ $+\infty$ | ↘ | min> 0 | ↗ | $+\infty$ ‖ $-\infty$ | ↗ | 0 |

5) Calcul des coefficients $a$, $b$, $c$ en admettant que la parabole $P$ a un minimum en $\Omega(\frac{1}{4}\,;\,\frac{7}{4})$ et passe par le point $A(0; 2)$.

On a: $a.0^2 + b.0 + c = 2$, d'où, $c = 2$

Comme Ω est le sommet de *P*, la dérivée de la fonction *p* s'annule en $\frac{1}{4}$ , d'où, $p'(\frac{1}{4}) = 0$ et $p(\frac{1}{4}) = \frac{7}{4}$

Or, $p'(x) = 2ax + b$.

On obtient le système: $\begin{cases} \frac{1}{2}a+b=0 \\ \frac{1}{16}a+\frac{1}{4}b+2=\frac{7}{4} \end{cases}$

La première équation mène à: $a = -2b$ et en substituant dans la deuxième, il vient: $-\frac{1}{8}b + \frac{1}{4}b + 2 = \frac{7}{4}$

On en tire: $b = -2$, puis $a = 4$

Une équation de (*P*) est: $y = 4x^2 - 2x + 2$

Index

---

***75 page 33***

1) Prendre *a* réel non nul

Lorsque $x = 0$, le point *H* qui est le point d'intersection de *d* et $(x'x)$ est en *O*.

Comme $P \in d$ et $P \notin (y'y)$, les droites *d* et $(y'y)$ sont sécantes en *O*. Par conséquent le point *K* est en *O* et $y = 0$

*H*, *K*, *M* et *O* sont donc confondus.

2) Lorsque *x* tend vers *a* avec $x > a$, le point *K* est envoyé de plus en plus bas, d'où, *y* tend vers $-\infty$

Lorsque *x* tend vers *a* avec $x < a$, le point *K* est envoyé de plus en plus haut, d'où, *y* tend vers $+\infty$

Lorsque *x* tend vers $+\infty$ ou $-\infty$, la droite d est de plus en plus « horizontale ». L'ordonnée de *K* est de plus en plus proche de celle de *P*, et le nombre *y* vers *b*.

3) Si *y* tend vers *b* avec $y < b$ le point *H* est envoyé de plus en plus loin sur l'axe réel positif, *x* tend vers $+\infty$

Si *y* tend vers *b* avec $y > b$ le point *H* est envoyé de plus en plus loin sur l'axe réel négatif, *x* tend vers $-\infty$

4) Avec un logiciel de géométrie le point *M* décrit deux arcs ressemblant à des arcs d'hyperbole.

construction

5) $P(-1;2)$

a) On note *m* la pente de la droite *d*. On a alors pour tout point $M(x;y)$ de *d* distinct de *P*, $\frac{y-2}{x-(-1)}=m$

Ce qui donne: $y = mx + m + 2$

b) Si $m \neq 0$, le point *H* étant le point de *d* d'ordonnée nulle, on a: $0=mx_H+m+2$ . On en déduit, $x_H=-\frac{m+2}{m}$

Le point *K*, étant le point de *d* d'abscisse nulle, on a: $y_K=m\times 0+m+2$ . On en déduit $y_K=m+2$

Or, $M(x_H;y_K)$ , CQFD

c) En éliminant *m* des relations trouvées au 5b), il vient: $m=y-2$, puis, $x=-\frac{y}{y-2}$ avec y ≠ 2 (car, $m\neq 0$)

On en tire successivement: $xy - 2x = -y$, puis, $y(x+1) = 2x$ et pour x ≠ -1, $y=\frac{2x}{x+1}$

6) Le lieu géométrique du point *M* est donc la courbe représentative de la fonction *f* définie sur $\mathbb{R}\setminus\{-1\}$ par $f(x)=\frac{2x}{x+1}$

L'étude des limites en $-1$ donne:

$\lim\limits_{\substack{x\to -1\\ x>-1}} f(x) = -\infty$ , car, $2x$ tend vers –2, $x$+1 tend vers 0 et $x$+1>0

$\lim\limits_{\substack{x\to -1\\ x<-1}} f(x) = +\infty$ , car, $2x$ tend vers –2, $x$+1 tend vers 0 et $x$+1<0

L'étude des limites en $\pm\infty$ donne:

$\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = 2$ , car, $f(x) = \dfrac{2}{1+\dfrac{1}{x}}$

$f$ est dérivable sur les intervalles ]–∞;–1[ et ]–1;+∞[.

$f'(x) = \dfrac{2\times(x+1)-1\times 2x}{(x+1)^2} = \dfrac{2}{(x+1)^2}$ qui est un nombre strictement positif.

La fonction $f$ est strictement croissante sur chacun des intervalles ]–∞;–1[ et ]–1;+∞[.

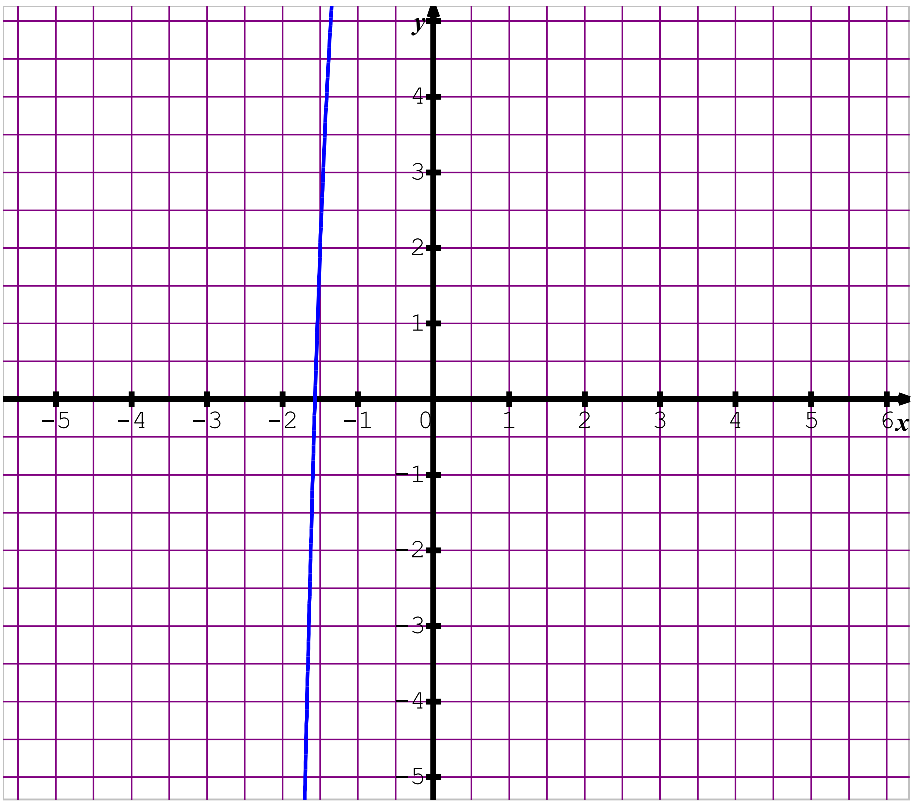
Construction de l'hyperbole sans oublier les asymptotes d'équations respectives: $x = -1$ et $y = 2$ Index

---

***A page 34***

a) $f$ est définie par $f(x) = x^5 + 3x^3 + 7x^2 + 2x + 7$

**Lecture graphique**:




La limite d'un polynôme à l'infini est la limite du terme de plus haut degré, d'où,

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} x^5 = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} x^5 = -\infty$.

**Conjecture:**

Il semble que l'équation $f(x) = 0$ admet une seule solution.

b) $f(-2) = (-2)^5 + 3(-2)^3 + 7(-2)^2 + 2(-2) + 7 = \ldots = -25$

$f(-1) = \ldots = 8$

Puisque $f(-2) < 0$ et $f(1) > 0$ et que la **fonction est continue** (on peut tracer sa représentation graphique sans lever le crayon), l'équation $f(x) = 0$ a une solution comprise entre $-2$ et $-1$.
Un balayage à la calculatrice donne:
$f(-1{,}569) \approx -0{,}0017$ et $f(-1{,}568) \approx 0{,}0307$
On a donc: $-0{,}0017 < \alpha < -1{,}568$ où $\alpha$ est la solution de l'équation $f(x) = 0$ (c'est-à-dire: $\alpha$ est le réel tel que $f(\alpha) = 0$)

c) En développant $(x^2 + 1)(x^3 + 2x + 7)$, on a:
... = $x^5 + 3x^3 + 7x^2 + 2x + 7 = f(x)$
Or, un produit est nul si et seulement si ...
d'où, $f(x) = 0$ si et seulement si $x^2 + 1 = 0$ ou $x^3 + 2x + 7 = 0$
Comme $x^2 + 1 > 0$, $f(x) = 0$ si et seulement si $x^3 + 2x + 7 = 0$
Posons $g(x) = x^3 + 2x + 7$
On sait: $g'(x) = 3x^2 + 2$.
La dérivée de $g$ est strictement positive, d'où la fonction $g$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
De plus $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} x^3 = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} x^3 = +\infty$
D'autre part, un polynôme est continu.
Ces trois conditions prouvent que l'équation $g(x) = 0$ a une et une seule solution dans $\mathbb{R}$.

---

### *Exercice C page 34*

$g$ définie par: $g(x) = \dfrac{-2x^2+6x-3}{x-2}$ sur les intervalles $]-\infty; 2[$ et $]2; +\infty[$

a) $-2x^2 + 6x - 3 = -2x^2 + 4x + 2x - 4 + 1 = -2x(x-2) + 2(x-2) + 1$

Pour $x \neq 2$, on peut diviser tous les membres par $x - 2$ non nul, on obtient: $g(x) = -2x + 2 + \dfrac{1}{x-2}$

b) $g$ est la somme de deux fonctions $x \mapsto -2x + 2$ et $x \mapsto \dfrac{1}{x-2}$

$x \mapsto -2x + 2$ est une fonction affine strictement décroissante sur $\mathbb{R}$

$x \mapsto \dfrac{1}{x-2}$ est composée de $x \mapsto x - 2$ suivie de la fonction inverse.

Comme $x \mapsto x - 2$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ et que la fonction inverse est strictement décroissante sur les intervalles $]-\infty; 2[$ et $]2; +\infty[$, alors, la composée est strictement décroissante sur chaque intervalle où $x - 2$ garde un signe constant, soit, les intervalles $]-\infty; 2[$ et $]2; +\infty[$
Ces deux fonctions étant strictement décroissantes sur chacun des intervalles $]-\infty; 2[$ et $]2; +\infty[$, leur somme est strictement décroissante sur $]-\infty; 2[$ et sur $]2; +\infty[$.

c) $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{1}{x-2} = 0$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} (-2x+2) = +\infty$, d'où, d'après les propriétés des limites d'une somme de fonctions, $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x) = +\infty$

La même démarche en $+\infty$ donne: $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = -\infty$.

**Limite à gauche en 2**

Comme $\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ x<2}} x-2 = 0$ et $x - 2 < 0$, on a: $\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ x<2}} \dfrac{1}{x-2} = -\infty$, de plus, $\lim\limits_{x\to 2} -2x+2 = -2$,

d'où, d'après les propriétés des limites d'une somme de fonctions, $\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ x<2}} g(x) = -\infty$

La même démarche donne pour la limite à droite en 2: $\lim\limits_{\substack{x \to 2 \\ x > 2}} g(x) = +\infty$ car, $x - 2 > 0$

d) Puisque $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{1}{x-2} = 0$, la droite $d$ d'équation $y = -2x + 2$ est asymptote à la courbe $C$ de $g$.
Puisque $\lim\limits_{x \to 2} g(x) = \pm\infty$, la droite $d'$ d'équation $x = 2$ est asymptote à $C$ de $g$.
Le point d'intersection $A$ de $d$ et $d'$ a donc pour abscisse 2 et pour ordonnée $y = -2 \times 2 + 2 = -2$.
$A(2; -2)$.
e) $g(0) = \dfrac{3}{2}$, $g(3) = -3$, $g(1) = -1$

$g$, étant une fonction rationnelle, est **continue** sur l'intervalle $]-\infty; 2[$, en particulier sur $]0; 1[$.
Comme **$g(0) > 0 > g(1)$**, l'équation $g(x) = 0$ a au moins une solution sur $]0; 1[$
Comme $g$ est **strictement décroissante** sur $]0; 1[$, cette solution est unique.

$g$, étant une fonction rationnelle, est **continue** sur l'intervalle $]2; +\infty[$, en particulier sur $]2; 3[$.
Comme $\lim\limits_{\substack{x \to 2 \\ x > 2}} g(x) = +\infty$, $g(3) = -3$ et $0 \in ]-3; +\infty[$, l'équation $g(x)=0$ a au moins une solution sur $]2; 3[$
Comme g est **strictement décroissante** sur $]2; 3[$, cette solution est unique.
f) $g(x) = 0$ si et seulement si $x \neq 2$ et $-2x^2 + 6x - 3 = 0$.
Or, le discriminant $\Delta = b^2 - 4ac = \ldots = 12 = 4 \times 3$.
D'où, les deux racines sont: $\dfrac{3-\sqrt{3}}{2}$ et $\dfrac{3+\sqrt{3}}{2}$
g) Le point $M$ d'abscisse 3 de la courbe de $g$ a pour ordonnée $g(3)$. D'où $M(3;-3)$
$M'$ symétrique de $M$ par rapport à $A$ équivaut à $A$ milieu de $[MM']$

$$\text{équivaut à } \begin{cases} x_A = \dfrac{x_M + x_{M'}}{2} \\ y_A = \dfrac{y_M + y_{M'}}{2} \end{cases}$$

On en déduit: $x_{M'} = 2 \times 2 - 3 = 1$ et $y_{M'} = 2 \times (-2) + 3 = -1$
$M'(1; -1)$
Or, $g(1) = -1$, donc $M' \in C$.

Plus généralement:
Soit $M(x; g(x))$ un point de $C$.
Le symétrique $M'$ de $M$ par rapport à $A$ a pour coordonnées $(4 - x; -4 - g(x))$.
Or, $g(4-x) = \dfrac{-2(4-x)^2+6(4-x)-3}{4-x-2} = \dfrac{-2x^2+10x+11}{2-x} = \dfrac{2x^2-10x-11}{x-2}$
et $-4 - g(x) = -4 - \dfrac{-2x^2+6x-3}{x-2} = \dfrac{-2x^2+10x+11}{2-x} = \dfrac{2x^2-10x-11}{x-2}$
Comme $g(4-x) = -4 - g(x)$, le point $M'$ est un point de $C$.
$A$ est donc un centre de symétrie de $C$

---

### *D page 34*

| Propositions | Vraie | FAUX et contre-exemple |
|---|---|---|
| Si<br>$a$ est un réel et $f$ une fonction définie et strictement décroissante | | La fonction inverse est définie sur |

| Propositions | Vraie | FAUX et contre-exemple |
|---|---|---|
| sur [$a$; +∞[ alors $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$ | | ]0; +∞[ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0$ Tout graphique représentant une fonction décroissante avec une asymptote horizontale est un bon contre-exemple |
| Soit $f$ et $g$ deux fonctions définies sur [0;+∞[ et $g$ ne s'annulant pas. Si $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$ et si $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$ alors $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = -1$ | | $f(x) = -x^3$ $g(x) = x^2 + 1$ vérifient les conditions $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{-x^3}{x^2+1} = \lim\limits_{x\to+\infty} -x = -\infty$ |
| Si $f$ est une fonction définie sur [0; +∞[ telle que $0 \leqslant f(x) \leqslant \sqrt{x}$ sur [0; +∞[ alors $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$ | Pour $x > 0$, on a l'implication suivante: $0 \leqslant f(x) \leqslant \sqrt{x} \Rightarrow 0 \leqslant \frac{f(x)}{x} \leqslant \frac{1}{\sqrt{x}}$ puis, théorème des gendarmes | |

***Exercice G page 35***

1) Le polynôme $P$ défini sur ℝ par $x \mapsto 2x^3 - 3x^2 - 1$

a) Le polynôme $P$ est dérivable sur ℝ et, $P'(x) = 2\times 3x^2 - 3\times 2x = 6x(x-1)$

| $x$ | $-\infty$ | | 0 | | 1 | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| x | | – | 0 | + | | + | |
| x–1 | | – | | – | 0 | + | |
| $f'(x)$ | | + | 0 | – | 0 | + | |
| $f(x)$ | $-\infty$ | ↗ | $-1$ | ↘ | $-2$ | ↗ | $+\infty$ |

Les limites en l'infini sont les limites des termes de plus haut degré.

b) Sur ]–∞; 0], $P$ est croissante et $f(0) = -1$, d'où, pour tout $x \leqslant 0$ alors $P(x) \leqslant -1$

Sur [0; 1], $P$ est décroissante et $f(0) = -1$, d'où, pour $0 \leqslant x \leqslant 1$, $P(x) \leqslant -1$

L'équation $P(x) = 0$ n'a aucune solution sur ]–∞; 1]

Sur [1; +∞[, $P$ est continue, strictement croissante et l'intervalle image [–2; +∞[ contient 0.

L'équation $P(x) = 0$ possède donc une solution α sur [1; +∞[

Un balayage à la calculatrice permet de préciser:

$P(1,6) < 0 < P(1,7)$, d'où, $\alpha \in \,]1,6; 1,7[$

2) $D = \,]-1; +\infty[$

$f : x \mapsto \dfrac{1-x}{1+x^3}$ définie sur $D$.

($\mathscr{C}$) courbe dans un repère orthonormal (unité: 4 cm)

a) $f$ est le quotient de .... et de .... dérivables sur $D$, d'où,

$f$ est dérivable sur $D$, et, pour tout $x > -1$, $f'(x) = \dfrac{-(1+x^3)-3x^2(1-x)}{(1+x^3)^2} = ... = \dfrac{P(x)}{(1+x^3)^2}$

Le signe de $f'(x)$ est donc celui de $P(x)$.

D'après le 1), si $x > \alpha$, alors $P(x) > 0$ et si $-1 < x < \alpha$ alors $P(x) < 0$

**Remarque pour l'étude des limites.**

En $-1$ ($x > -1$), on a: $\lim\limits_{x \to -1} 1-x = 2$ et $\lim\limits_{x \to -1} 1+x^3 = 0$ avec $1+x^3 > 0$

d'où, $\lim\limits_{x \to -1} f(x) = +\infty$

En $+\infty$, la fonction $f$ est rationnelle, d'où, $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{-x}{x^3} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{-1}{x^2} = 0$

| $x$ | $-1$ | | $\alpha$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | $\Vert$ | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $f(x)$ | $\Vert$ $+\infty$ | $\searrow$ | $f(\alpha)$ | $\nearrow$ | $0$ |

b) Une équation de $\mathscr{D}$ tangente à $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 0 est donnée par:

$y = f'(0)(x-0) + f(0) = ... = -x + 1$

La position de $\mathscr{C}$ par rapport à $\mathscr{D}$ est donnée par le signe de $d(x) = f(x) - (-x+1)$

$d(x) = \dfrac{1-x}{1+x^3} - (1-x)$.

En factorisant $(1-x)$, il vient: $d(x) = \left(\dfrac{1}{1+x^3} - 1\right)(1-x) = \dfrac{1-1-x^3}{1+x^3} = \dfrac{-x^3}{1+x^3}(1-x)$

Signe de $d(x)$ sur $]-1; +1[$

| $x$ | $-1$ | | $0$ | | $1$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $-x^3$ | | $+$ | $0$ | $-$ | |
| $1-x$ | | $+$ | | $+$ | |
| $1+x^3$ | | $+$ | | $+$ | |
| *d(x)* | | $+$ | $0$ | $-$ | |
| *Position relative de $\mathscr{C}$ et $\mathscr{D}$.* | | $\mathscr{C}$ au-dessus de $\mathscr{D}$ | point de tangence | $\mathscr{C}$ au-dessous de $\mathscr{D}$ | |

c) Une équation de $\mathscr{T}$ tangente à $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 1 est donnée par:

$y = f'(1)(x-1) + f(1) = ... = -\dfrac{1}{2}(x-1)$

La position de $\mathscr{C}$ par rapport à $\mathscr{T}$ est donnée par le signe de $\varphi(x) = f(x) - (-\frac{1}{2}(x-1)) = f(x) - \frac{1}{2}(1-x)$

En factorisant $(1-x)$, il vient: $d(x) = (\frac{1}{1+x^3} - \frac{1}{2})(1-x) = \frac{2-1-x^3}{2(1+x^3)} = \frac{1-x^3}{2(1+x^3)}(1-x)$

**Remarque**: $1 - x^3 = (1-x)(1+x+x^2)$ et $1+x+x^2 > 0$ car $\Delta = ...$ est $< 0$

$\varphi(x) = \frac{(-x)^2(1+x+x^2)}{2(1+x^3)}$ est donc positif. (Tous ses facteurs sont positifs sur $D$)

Ou encore: $1 - x^3 > 0$ si et seulement si $1 > x^3$ si et seulement si $1 > x$

Signe de $\varphi(x)$ sur $D$

| $x$ | $-1$ | | $1$ | | +inf |
|---|---|---|---|---|---|
| $1-x^3$ | | + | 0 | – | |
| $1-x$ | | + | 0 | – | |
| $2(1+x^3)$ | | + | | + | |
| *d(x)* | | + | 0 | + | |
| *Position relative de $\mathscr{C}$ et $\mathscr{T}$.* | | $\mathscr{C}$ au-dessus de $\mathscr{T}$ | point de tangence | $\mathscr{C}$ au-dessus de $\mathscr{T}$ | |

Tracé: