Table des matières

6 page 36

$f(z) = z^2 - 2z + 17$

discriminant $\Delta = b^2 - 4ac = (-2)^2 - 4\times1\times17 = -64 = (8i)^2$

L'équation $f(z) = 0$ a donc deux solutions complexes conjuguées: $z_1 = \dfrac{-(-2)-8i}{2\times1} = 1 - 4i$ et $z_2 = \overline{z_1} = 1 + 4i$

Conséquence: $f(z) = (z - 1 + 4i)(z - 1 - 4i)$

Autre méthode:

On cherche la forme canonique

$z^2 - 2z + 17 = (z-1)^2 - 1 + 17 = (z-1)^2 - (-16) = (z-1)^2 - (4i)^2 = (z - 1 + 4i)(z - 1 - 4i)$

---

7 page 306

$f(z) = 5z^2 + 4z + 1$

discriminant $\Delta = b^2 - 4ac = 4^2 - 4\times5\times1 = -4 = (2i)^2$

L'équation $f(z) = 0$ a donc deux solutions complexes conjuguées:

$z_1 = \dfrac{-4-2i}{2\times5} = -\dfrac{2}{5} - \dfrac{1}{5}i$ et $z_2 = \overline{z_1} = -\dfrac{2}{5} + \dfrac{1}{5}i$

Conséquence: $f(z) = 5(z + \dfrac{2}{5} + \dfrac{1}{5}i)(z + \dfrac{2}{5} - \dfrac{1}{5}i)$

Autre méthode:

On cherche la forme canonique

$5z^2 + 4z + 1 = 5[(z + \dfrac{2}{5})^2 - \dfrac{4}{25} + \dfrac{1}{5}] = 5[(z + \dfrac{2}{5})^2 - \dfrac{1}{25}i^2] = 5(z + \dfrac{2}{5} + \dfrac{1}{5}i)(z + \dfrac{2}{5} - \dfrac{1}{5}i)$

---

36 page 308

1) $z' = z + 3 - i$ est l'écriture complexe de la translation de vecteur $\vec{w}$ d'affixe $3 - i$

2) $z' = 5z$ est l'écriture complexe de l'homothétie de centre O et de rapport 5

3) $z' = \bar{z}$ est l'écriture complexe de la symétrie orthogonale par rapport à l'axe des abscisses
4) $z' = -z$ est l'écriture complexe de la symétrie centrale de centre O (ou homothétie de centre O de rapport –1) (ou rotation de centre O et d'angle π)
5) $z' = e^{i\frac{\pi}{3}} z$ est l'écriture complexe de la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{3}$.
6) $z' = -2z$ est l'écriture complexe de l'homothétie de centre O et de rapport –2

---

38 page 308

1) $z'+2 = e^{\frac{2i\pi}{3}}(z+2)$ est l'écriture complexe de la rotation de centre Ω d'affixe –2 et d'angle $\frac{2\pi}{3}$
2) $z'-3+i = z-i+3$ équivaut à $z' = z-2i+6$ est l'écriture complexe de la translation de vecteur $\vec{w}$ d'affixe 6 – 2i.
3) $z'+1 = e^{\frac{i\pi}{3}}(z+1)$ est l'écriture complexe de la rotation de centre Ω d'affixe –1 et d'angle $\frac{\pi}{3}$
4) $z' = \frac{1+i\sqrt{3}}{2} z$ équivaut à $z' = e^{i\frac{\pi}{3}} z$ est l'écriture complexe de la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{3}$
5) $z'-i = -(z-i)$ est l'écriture complexe de l'homothétie de centre J d'affixe i et de rapport –1 (ou symétrie centrale de centre J d'affixe i)
6) $z' = e^{\frac{-i\pi}{6}} z$ est l'écriture complexe de la rotation de centre O et d'angle $\frac{-\pi}{6}$

---

60 page 310

1 a) Résolution de l'équation: $z^2 - 6z + 12 = 0$ (E)

Une méthode:

$z^2 - 6z + 12 = (z-3)^2 - 9 + 12 = (z-3)^2 + 3$

D'où, $z^2 - 6z + 12 = 0 \Leftrightarrow (z-3)^2 + 3 = 0 \Leftrightarrow (z-3)^2 = 3i^2 \Leftrightarrow z - 3 = \sqrt{3}\,i$ ou $z - 3 = -\sqrt{3}\,i$

$u = 3 + \sqrt{3}\,i$ et $\bar{u} = 3 - \sqrt{3}\,i$

Une autre méthode:

discriminant $\Delta = b^2 - 4ac = (-6)^2 - 4\times1\times12 = -12 = (2\sqrt{3}\,i)^2$

D'où, l'équation admet deux racines complexes conjuguées: $u = \frac{-(-6)+2\sqrt{3}i}{2\times1} = 3 + \sqrt{3}\,i$ et $\bar{u} = 3 - \sqrt{3}\,i$

b) $|u| = \sqrt{3^2+(-\sqrt{3})^2} = 2\sqrt{3}$

Soit θ un argument de u: on a: $\cos\theta = \frac{3}{2\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ et $\sin\theta = \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{3}} = \frac{1}{2}$

Conclusion: $\arg(u) = \frac{\pi}{6}$ [2π]

On en déduit: $|\bar{u}| = 2\sqrt{3}$ et $\arg(\bar{u}) = -\frac{\pi}{3}$ [2π]

Remarque: on peut écrire: $u = 2\sqrt{3}\, e^{i\frac{\pi}{3}}$ et $u = 2\sqrt{3}\, e^{-i\frac{\pi}{3}}$
2) a) $u - 4 = 3 + \sqrt{3}\,i - 4 = -1 + \sqrt{3}\,i$

$|u-4| = \sqrt{(-1)^2+(\sqrt{3})^2} = 2$ et soit α un argument de $u - 4$, on a: $\cos\alpha = -\frac{1}{2}$ et $\sin\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

On en déduit $\alpha = \frac{2\pi}{3}$ [2π]

$u - 4 = 2\times e^{i\frac{2\pi}{3}}$

b) Le module d'un quotient est le quotient des modules, d'où, $\left|\frac{u}{u-4}\right| = \frac{2\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$

et un argument du quotient est la différence des arguments:

$\arg\left(\frac{u}{u-4}\right) = \arg(u) - \arg(u-4) = \frac{\pi}{6} - \frac{2\pi}{3} = -\frac{\pi}{2}$.

On peut écrire: $\frac{u}{u-4} = \sqrt{3}\ e^{-i\pi/2} = -\sqrt{3}\,i$

$\frac{\overline{u}}{\overline{u}-4} = \frac{\overline{u}}{\overline{u-4}} = \overline{\frac{u}{u-4}}$

Donc, $\frac{\overline{u}}{\overline{u}-4}$ a pour module $\sqrt{3}$ et pour argument $\frac{\pi}{2}$.

Interprétation géométrique:

Soit U le point d'affixe u et U' celui d'affixe $u - 4$

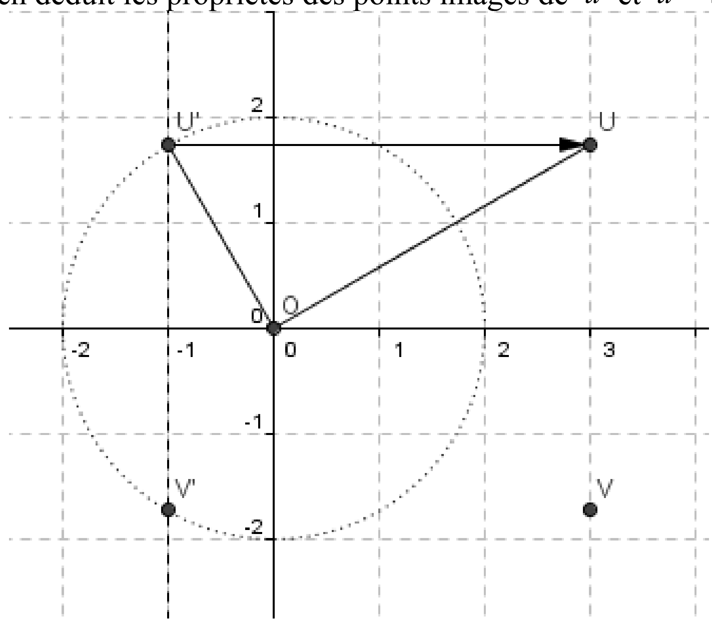
U' est l'image de U dans la translation de vecteur $\vec{w}$ d'affixe –4.

L'angle $(\overrightarrow{OU'}, \overrightarrow{OU}) = -\frac{\pi}{2}$

On construit facilement le point U' sur le cercle de centre O et de rayon 2 et on en déduit par translation le point U.

Les droites (OU) et (OU') sont perpendiculaires.

Par symétrie d'axe ($x'x$), on en déduit les propriétés des points images de $\overline{u}$ et $\overline{u-4}$



61 page 310

1) $z^2 + 2\sqrt{2}\,z + 4 = 0$ (équation)

Une méthode:

$z^2 + 2\sqrt{2}\,z + 4 = (z + \sqrt{2})^2 - 2 + 4 = (z + \sqrt{2})^2 + 2 = (z + \sqrt{2})^2 - 2i^2 = (z + \sqrt{2} - \sqrt{2}\,i)((z + \sqrt{2} + \sqrt{2}\,i)$

D'où, $z^2 + 2\sqrt{2}z + 4 = 0$ si et seulement si $(z + \sqrt{2} - \sqrt{2}i)((z + \sqrt{2} + \sqrt{2}i) = 0$

Un produit est nul ....

Conclusion: L'équation possède deux solutions complexes conjuguées:

$z_1 = -\sqrt{2} + \sqrt{2}i$ et $z_2 = \overline{z_1} = -\sqrt{2} - \sqrt{2}i$

Une autre méthode:

discriminant $\Delta = b^2 - 4ac = (2\sqrt{2})^2 - 4\times1\times4 = 8 - 16 = -8 = 8i^2 = (2\sqrt{2}i)^2$
Conclusion: L'équation possède deux solutions complexes conjuguées:

$z_1 = \dfrac{-2\sqrt{2}+2\sqrt{2}i}{2\times1} = -\sqrt{2} + \sqrt{2}i$ et $z_2 = \overline{z_1} = -\sqrt{2} - \sqrt{2}i$

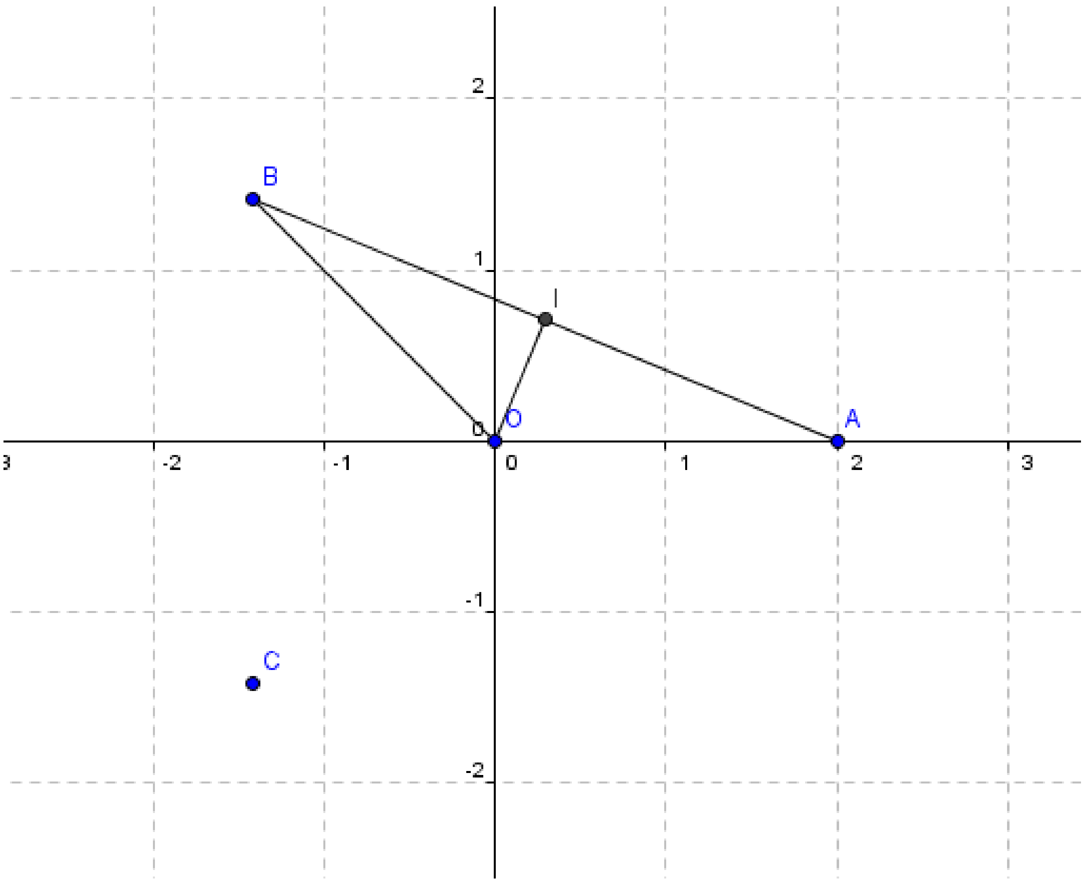
Écriture exponentielle de z_1 et z_2
On a: $|z_1| = |z_2| = \sqrt{(-\sqrt{2})^2+(\sqrt{2})^2} = 2$ et en posant $\theta = \arg(z_1)$, on a:
On a: $\cos\theta = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ et $\sin\theta = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$, d'où, $\theta = \dfrac{3\pi}{4}$ $[2\pi]$.

Comme $z_2 = \overline{z_1}$, on a: $\arg(z_2) = -\theta$ $[2\pi]$

Conclusion: $z_1 = 2\times e^{i\frac{3\pi}{4}}$ et $z_2 = 2\times e^{-i\frac{3\pi}{4}}$

2) A d'affixe 2, B d'affixe z_1, C d'affixe z_2, I milieu de $[AB]$.

Pour construire B, construire le cercle de centre O et de rayon 2, et, la deuxième bissectrice ...



b) $OA = |2| = 2$, $OB = |z_1| = 2$

Complément:

$AB = |z_1 - 2| = \sqrt{(-\sqrt{2}-2)^2+(\sqrt{2})^2} = \sqrt{8+4\sqrt{2}} = 2\sqrt{2+\sqrt{2}}$

Comme *OA* = *OB* le triangle *OAB* est isocèle de sommet principal *O*.

La médiane (*OI*) est donc aussi la bissectrice de l'angle $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB})$,

d'où, une mesure de $(\vec{u}, \overrightarrow{OI}) = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB})$

Or, comme l'affixe de *A* est un réel strictement positif, $\overrightarrow{OA}$ et $\vec{u}$ sont colinéaires de m^me sens, d'où,

une mesure de $(\vec{u}, \overrightarrow{OI}) = \frac{1}{2}\frac{3\pi}{4} = \frac{3\pi}{8}$

c) L'affixe de *I* : $z_I = \frac{z_A+z_B}{2} = \frac{2-\sqrt{2}}{2} + \mathrm{i}\,\frac{\sqrt{2}}{2}$.

$|z_I| = \sqrt{\left(\frac{2-\sqrt{2}}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \frac{1}{2}\sqrt{8-4\sqrt{2}} = \sqrt{2-\sqrt{2}}$

3) Cos $\frac{3\pi}{8} = \frac{2-\sqrt{2}}{2(\sqrt{2-\sqrt{2}})} = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$ et

sin $\frac{3\pi}{8} = \frac{\sqrt{2}}{2(\sqrt{2-\sqrt{2}})} = \frac{\sqrt{2}(\sqrt{2+\sqrt{2}})}{2(\sqrt{2^2-(\sqrt{2})^2})} = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$

---

62 page 310

P(*z*) = z^3-4z^2+6z-4

1) (*z* – 2)((z² – 2*z* + 2) = ... = z^3-4z^2+6z-4 = *P*(*z*)

2) *P*(*z*) = 0 si et seulement si *z* – 2= 0 ou z^2-2z+2 = 0

Résolution de z^2-2z+2 : Δ = ... = –4 = $(2\mathrm{i})^2$, d'où,

deux racines complexes conjuguées: $z_1 = \frac{-(-2)-2\mathrm{i}}{2}$ = 1 – i et $z_2 = \overline{z_1}$ = 1 + i

P(*z*) = 0 si et seulement si *z* = 2 ou *z* = 1 – i ou *z* = 1 + i

3) z_A = 2, z_B = 1 + i et z_C = 1 – i

$|z_A|$ = 2 arg(z_A) = 0 [2π],

En remarquant que 1 + i et 1 – i sont des complexes conjugués, on a:

$|z_B| = |z_C| = \sqrt{2}$

arg(z_C) = –arg(z_B) [2π] arg(z_B) = $\frac{\pi}{4}$ [2π]

4) $\overrightarrow{AB}$ a pour affixe 1 + i – 2 = –1 + i $\overrightarrow{AC}$ a pour affixe –1 – i $\overrightarrow{BC}$ a pour affixe –2i

AB = *AC* = $\sqrt{2}$ et BC^2 = 4 = AB^2 + AC^2 ce qui prouve que *ABC* est un triangle rectangle isocèle en *A*

Autre méthode

Le quotient $\dfrac{z_B - z_A}{z_C - z_A} = \dfrac{-1+\mathrm{i}}{-1-\mathrm{i}} = \dfrac{\mathrm{i}(1+\mathrm{i})}{-(1+\mathrm{i})} = -\mathrm{i}$

ou encore $z_B - z_A = -i(z_C - z_A)$

B est l'image de *C* dans la rotation de centre *A* et d'angle $-\dfrac{\pi}{2}$

Ce qui prouve que *ABC* est un triangle rectangle isocèle en *A*.

Ce triangle est donc inscrit dans le cercle de centre *I* d'affixe 1 milieu de [*BC*] et de rayon $\dfrac{BC}{2} = 1$

Index

---

66 page 311

1) En développant $(z^2+1)(z^2-16z+89)$, on trouve $z^4-16z^3+90z^2-16z+89$
2) On en déduit que l'équation $z^4-16z^3+90z^2-16z+89=0$ est équivalente à

$$z^2+1=0 \ ou\ z^2-16z+89=0$$

Or $z^2+1=0$ équivaut à $z^2-\mathrm{i}^2=0$ équivaut à $(z+\mathrm{i})(z-\mathrm{i})=0$
et $z^2-16z+89=0$ équivaut à $(z-8)^2-64+89=0$ équivaut à $(z-8)^2+25=0$ équivaut à $(z-8)^{-}25\mathrm{i}^2=0$ équivaut à $[(z-8)-5i][(z-8)+5i]=0$
On en déduit quatre solutions: $i;-\mathrm{i};8+5i\ et\ 8-5\mathrm{i}$
3) $A(8+5\mathrm{i});B(\mathrm{i}),C(-\mathrm{i}),D(8-5\mathrm{i})$
a) b) $8+5i$ et $8-5i$ étant conjugués, ainsi que i et $-\mathrm{i}$, l'axe des abscisses est un axe de symétrie de la figure.

$AC=|-\mathrm{i}-8-5\mathrm{i}|=|-8-6\mathrm{i}|=\sqrt{(-8)^2+(-6)^2}=10$
$BD=|8-5\mathrm{i}-\mathrm{i}|=|8-6\mathrm{i}|=\sqrt{8^2+(-6)^2}=10$
$AD=|8-5\mathrm{i}-8-5\mathrm{i}|=|-10\mathrm{i}|=10$

A remarquer et retenir: Dans $\mathbb{C}$, *A* étant un réel, on peut toujours factoriser z^2+A
Si *A* est positif, on écrit $A=-\mathrm{i}^2A$ pour faire apparaître une différence de deux carrés.
Exemple: $z^2-5=(z-\sqrt{5})(z+\sqrt{5})$ $z^2+5=z^2-5\mathrm{i}^2=(z-\sqrt{5}\mathrm{i})(z+\sqrt{5}\mathrm{i})$
Le symbole $\sqrt{\ }$ n'est pas défini sur $\mathbb{C}$. On ne peut pas étendre la définition sur $\mathbb{R}$ à $\mathbb{C}$ en gardant les propriétés de $\sqrt{\ }$.
En effet: supposons qu'on puisse noter $i=\sqrt{-1}$. Par définition de $\sqrt{\ }$, il faut $\sqrt{-1}\times\sqrt{-1}=-1$
Par propriété des racines carrées, il faudrait: $\sqrt{-1}\times\sqrt{-1}=\sqrt{(-1)\times(-1)}=\sqrt{1}=1$
d'où, la contradiction.

---

71 page 311

(E): $z^4+7+24\mathrm{i}=0$ (E) : $z^4 + 7 + 24\mathrm{i} = 0$
1) $z_0 = 2 - \mathrm{i}$
Calcul de z_0^4
$(2-\mathrm{i})^4 = [(2-\mathrm{i})^2]^2 = (3-4\mathrm{i})^2 = -7-24\mathrm{i}$
On a donc: $z_0^4 = -7-24\mathrm{i}$
et $(E) \Leftrightarrow z^4 = -7-24\mathrm{i}$
d'où, $(E) \Leftrightarrow z^4 = z_0^4$
Par conséquent: (E): $z^4-z_0^4=0$

Commentaire:
La méthode est générale.
Soit une équation du type $f(z) = k$ où k est une constante complexe.
Soit z_0 une solution de cette équation: autrement dit $f(z_0) = k$ est une égalité.
En remplaçant k par $f(z_0)$, on a: $f(z) - f(z_0) = 0$

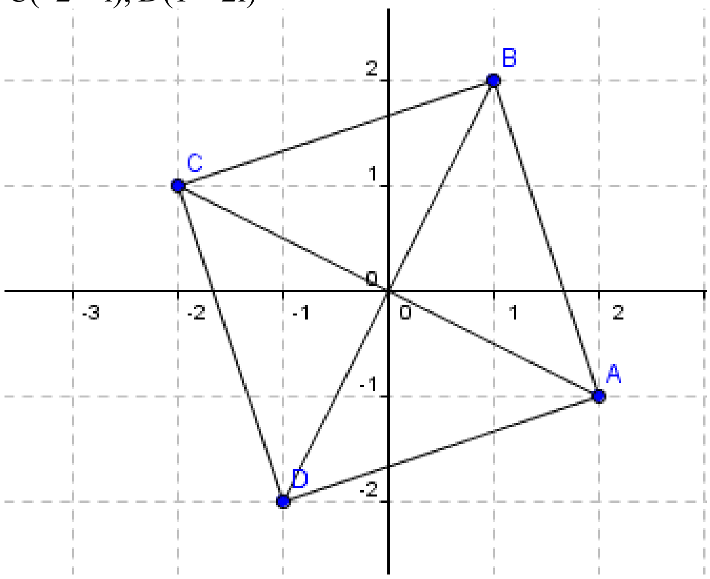
2) $z^4 - z_0^4$ est la différence de deux carrés.

$z^4 - z_0^4 = (z^2 - z_0^2)(z^2 + z_0^2)$

Or: $z^2 + z_0^2 = z^2 - (\mathrm{i}\, z_0)^2$

$z^4 - z_0^4 = (z - z_0)(z + z_0)(z - \mathrm{i}z_0)(z + \mathrm{i}z_0)$

Les solutions de (E) sont: $z_0 = 2 - \mathrm{i}$, $-z_0 = -2 + \mathrm{i}$, $\mathrm{i}z_0 = 1 + 2\mathrm{i}$, $-\mathrm{i}z_0 = 1 - 2\mathrm{i}$
3) Soient $A(2 - \mathrm{i})$, $B(1 + 2\mathrm{i})$, $C(-2 - \mathrm{i})$, $D(1 - 2\mathrm{i})$



$2 - \mathrm{i}$ et $-2 + \mathrm{i}$ étant opposés, ainsi que $1 + 2\mathrm{i}$ et $1 - 2\mathrm{i}$, les segments $[AC]$ et $[BD]$ ont le même milieu O.
$ABCD$ est donc un **parallélogramme**.
$\overrightarrow{AC}$ a pour affixe $-4+2\mathrm{i}$ et $\overrightarrow{BD}$ a pour affixe $-2-4\mathrm{i}$.
On a donc $AC = |-4+2\mathrm{i}| = 2\sqrt{5}$ et $BD = |-2+4\mathrm{i}| = 2\sqrt{5}$
Les diagonales du parallélogramme $ABCD$ étant isométriques, $ABCD$ est un **rectangle**.

On a aussi: $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{BD} = (-4).(-2) + 2.(-4) = 0$
Les diagonales du parallélogramme $ABCD$ étant perpendiculaires, $ABCD$ est un **losange**.
Finalement: $ABCD$ est un carré.
D'autres méthodes sont possibles:
par exemple, comme la multiplication par i est l'écriture complexe d'une rotation directe de centre O et d'angle $\frac{\pi}{2}$, B est l'image de A dans cette rotation ....

$\frac{z_{\overrightarrow{BD}}}{z_{\overrightarrow{AC}}} = \frac{-2-4\mathrm{i}}{-4+2\mathrm{i}} = \frac{\mathrm{i}(-4+2\mathrm{i})}{-4+2\mathrm{i}} = \mathrm{i} = e^{i\frac{\pi}{2}}$. On en déduit une mesure de $(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{BD}) = \frac{\pi}{2}$

---

78 page 312

1) M est le point d'affixe $z = -2\, e^{\mathrm{i}\theta}$

Or, $e^{i\pi} = -1$, d'où, $-2e^{i\theta} = 2 \times e^{i\theta} \times e^{i\pi} = 2e^{i(\theta + \pi)}$

Quant θ décrit $\mathbb{R}$, $\theta + \pi$ décrit $\mathbb{R}$.

z est donc le nombre complexe de module 2 et d'argument $\theta' = \theta + \pi$.

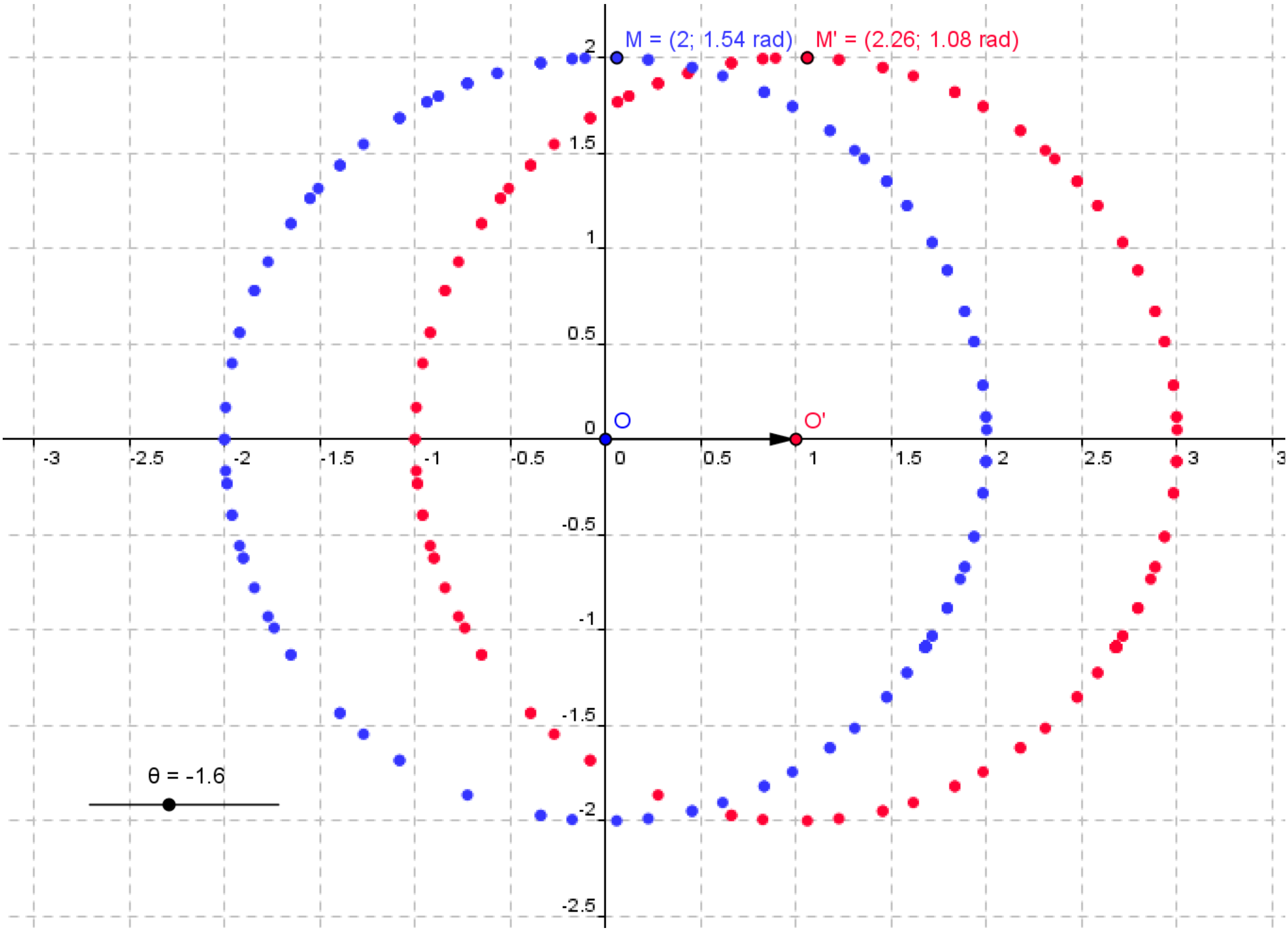
M décrit le cercle $\mathscr{C}$ de centre O et de rayon 2.

2) M' d'affixe $z' = 1 - 2e^{i\theta} = z + 1$

M' est l'image de M par la translation de vecteur $\vec{u}$.

M' décrit l'ensemble $\mathscr{C}'$, image de $\mathscr{C}$ par la translation de vecteur $\vec{u}$

$\mathscr{C}'$ est le cercle de centre O' défini par $\overrightarrow{OO'} = \vec{u}$ et de rayon 2.

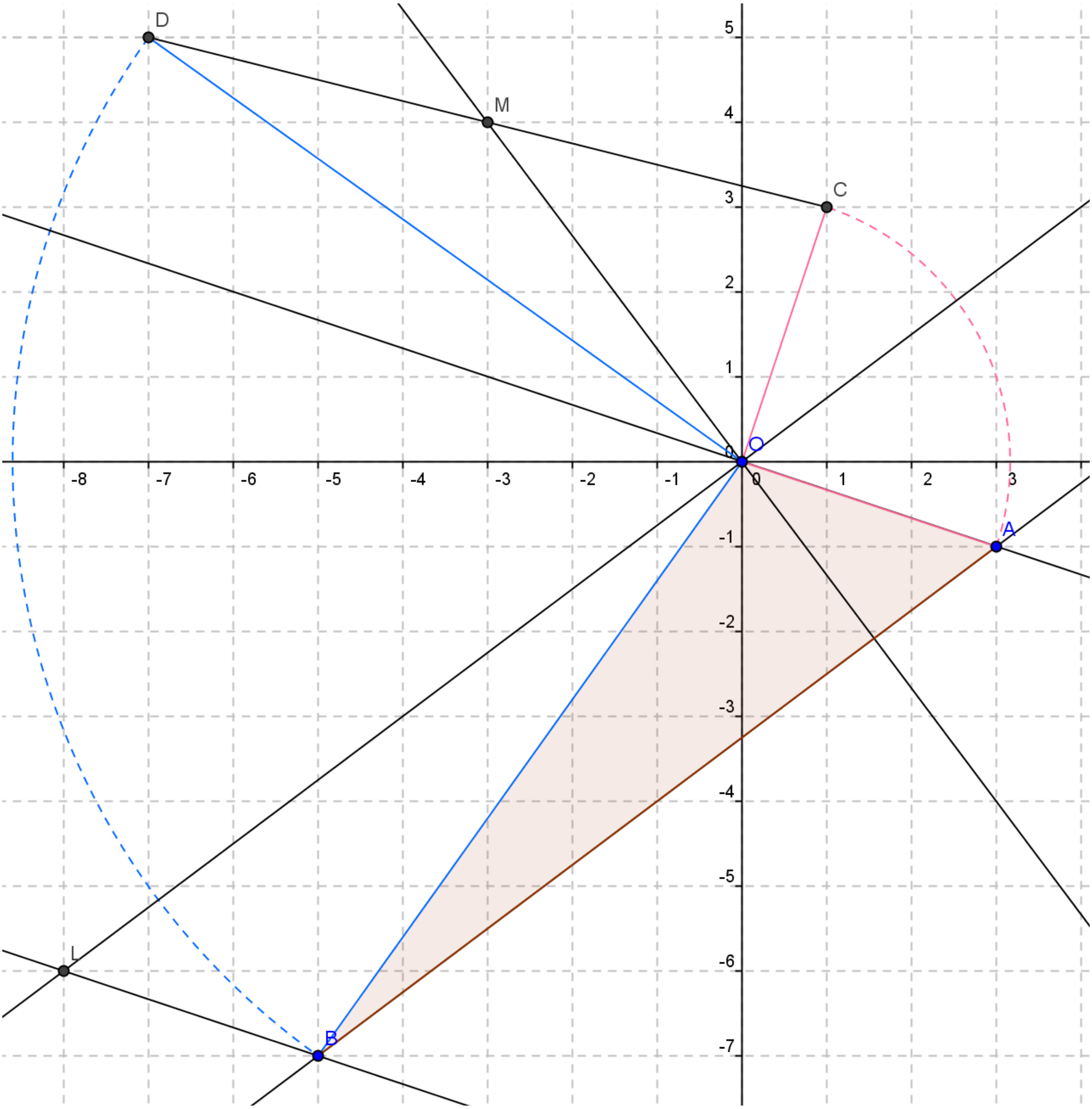


Calcul du module au carré de z'.

On a: $|z'|^2 = z' \times \overline{z'} = (1 - 2e^{i\theta})(1 - 2e^{-i\theta}) = 1 - 2(e^{i\theta} + e^{-i\theta}) + 4 = 5 - 4\cos\theta$.

88 page 213

Le plan complexe est rapporté au repère orthonormal direct $(O;\vec{u},\vec{v})$
a) A d'affixe $3 - i$ et B d'affixe $-5 - 7i$



b) *OABL* parallélogramme si et seulement si $\overrightarrow{OL} = \overrightarrow{AB}$
OABL parallélogramme si et seulement si $z_L = z_B - z_A = -8 - 6i$

2a) *C* est l'image de *A* par la rotation de centre *O* et d'angle $\frac{\pi}{2}$,
d'où, $z_C = e^{i\pi/2}\ z_A = i\ z_A = 1 + 3i$

b) *D* est l'image de *B* par la rotation de centre *O* et d'angle $-\frac{\pi}{2}$,
d'où, $z_D = e^{i-\pi/2}\ z_B = -i\ z_B = -7 + 5i$

c) M milieu de $[CD]$ si et seulement si $z_M = \dfrac{z_C + z_D}{2} = \ldots = -3 + 4\mathrm{i}$

3a) $\dfrac{z_L}{z_M} = \dfrac{-8-6\mathrm{i}}{-3+4\mathrm{i}} = \dfrac{2\mathrm{i}(4\mathrm{i}-3)}{-3+4\mathrm{i}} = 2\mathrm{i}$

$\dfrac{z_L}{z_M}$ est un imaginaire pur et la partie réelle 2 est strictement positive, d'où, arg $\dfrac{z_L}{z_M} = \dfrac{\pi}{2} + 2k\pi$; $k \in \mathbb{Z}$.

Or, arg $\dfrac{z_L}{z_M} = (\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OL})$

b) Comme $(AB) \parallel (OL)$ et $(OM) \perp (OL)$, (OM) est perpendiculaire à (AB) et par conséquent est la hauteur issue de O dans OAB.

---

89 page 313

Le plan complexe est rapporté au repère orthonormal direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$

A d'affixe $z_A = 1$ et B d'affixe $z_B = 2$ et $\theta \in]0; \pi[$.

M est le point d'affixe $z = 1 + e^{2\mathrm{i}\theta}$

1) On a: $|z-1| = |e^{2\mathrm{i}\theta}| = 1$ avec $2\theta \in]0; 2\pi[$.

On en déduit: $AM = 1$.

Si $\theta = 0$ ou si $\theta = \pi$, on a: $1 + e^{2\times\mathrm{i}\times 0} = 2$

L'ensemble E est donc le cercle de centre A de rayon 1, privé du point B d'affixe 2.

2) L'écriture complexe de la rotation de centre O et d'angle -2θ est $z' = e^{-2\mathrm{i}\theta} z$.

L'image de M est le point M' d'affixe $z' = e^{-2\mathrm{i}\theta}(1 + e^{2\mathrm{i}\theta}) = e^{-2\mathrm{i}\theta} + 1 = 1 + e^{-2\mathrm{i}\theta}$

Or, $\bar{z} = \overline{1+e^{2\mathrm{i}\theta}} = 1 + \overline{e^{2\mathrm{i}\theta}} = 1 + e^{-2\mathrm{i}\theta}$.

Conclusion: $z' = \bar{z}$

Pour démontrer que M' est sur le cercle $\mathscr{C}$ de centre A et de rayon 1, il suffit de faire:

$AM' = |z'-1| = |e^{-2\mathrm{i}\theta}| = 1$.

Mais, on peut aussi analyser le fait que A est sur l'axe des réels, donc, que l'axe des abscisses est un axe de symétrie du cercle $\mathscr{C}$ de centre A.

L'égalité $z' = \bar{z}$ montre que M' est le symétrique de M dans la symétrie d'axe $(O; \vec{u})$.

Comme $E \subset \mathscr{C}$, le symétrique est aussi sur $\mathscr{C}$. (Comme B est l'image de B par cette symétrie, le point B reste exclu du cercle image).

3) Dans toute la suite, on choisit $\theta = \dfrac{\pi}{3}$.

Soit r la rotation de centre O et d'angle $-\dfrac{2\pi}{3}$ et A' l'image de A par r.

a) L'image du cercle $\mathscr{C}$ de centre A et de rayon 1 est le cercle $\mathscr{C}'$ de centre $A' = r(A)$ et de rayon 1.

A' a pour affixe: $z_{A'} = e^{-2\,i\pi/3} = -\dfrac{1}{2} - i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

b) On sait: $AM = 1$ et $OA = 1$.

Le triangle AMO est isocèle.

Il suffit donc d'évaluer l'angle $(\overrightarrow{AO}, \overrightarrow{AM}) = (\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{AM}) - \pi = (\vec{u}, \overrightarrow{AM}) - \pi = \dfrac{2\pi}{3} - \pi = -\dfrac{\pi}{3}$.

L'angle $\widehat{OAM} = \dfrac{\pi}{3}$.

Le triangle isocèle AMO est donc équilatéral.

On peut aussi calculer $OM = |z|$,

$z = 1 + e^{2\,i\pi/3} = 1 - \dfrac{1}{2} + i\dfrac{\sqrt{3}}{2} = \dfrac{1}{2} + i\dfrac{\sqrt{3}}{2} = e^{i\pi/3}$ qui a pour module 1.

c) Il est évident que $OA = 1$ et dans la rotation de centre O, on a: $OA' = OA$.

Comme $OA' = 1$, le point O est sur le cercle $\mathscr{C}'$.

O est donc commun à $\mathscr{C}$ et à $\mathscr{C}'$.

Puisque $M \in \mathscr{C}$, son image par r appartient à $r(\mathscr{C}) = \mathscr{C}'$.

Or, on a montré au 2) que $M' \in \mathscr{C}$.

$\mathscr{C}$ et $\mathscr{C}'$ ont deux points communs O et M'.

Comme $\mathscr{C}$ et $\mathscr{C}'$ ne sont pas confondus, les deux points d'intersection de $\mathscr{C}$ et $\mathscr{C}'$ sont O et M'.

Méthode analytique:

$\mathscr{C}$ et $\mathscr{C}'$ ont pour équations respectives: $(x - 1)^2 + y^2 = 1$ et $(x + \dfrac{1}{2})^2 + (y + \dfrac{\sqrt{3}}{2})^2 = 1$

En développant $x^2 + y^2 - 2x = 0$ (1) et $x^2 + y^2 + x + \sqrt{3}\,y = 0$ (2)

Les coordonnées des points d'intersection sont les solutions du système formé par les deux équations (1) et (2):

On peut faire par différence (2) – (1): $3x + \sqrt{3}\,y = 0$, soit, $y = -\sqrt{3}\,x$.

En remplaçant dans (1), on a: $4x^2 - 2x = 0$, soit, $2x(2x - 1) = 0$.

$x = 0$ ou $x = \dfrac{1}{2}$, puis, si $x = 0$, $y = 0$ et si $x = \dfrac{1}{2}$, $y = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

Il reste à vérifier que M' a pour coordonnées $(\dfrac{1}{2} ; -\dfrac{\sqrt{3}}{2})$ (par exemple, en prenant le conjugué de l'affixe de M).

d) $z_{A'} = -\dfrac{1}{2} - i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

P symétrique de M par rapport à A, d'où, $z_P = 2\times z_A - z_M = 2 - (\dfrac{1}{2} + i\dfrac{\sqrt{3}}{2}) = \dfrac{3}{2} - i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

Le milieu de [$A'P$] a pour affixe: $\dfrac{z_{A'}+z_P}{2} = \dfrac{1}{2} - \mathrm{i}\,\dfrac{\sqrt{3}}{2} = z_{M'}$

Autre méthode: Calculer l'angle orienté $(\overrightarrow{OA'}, \overrightarrow{OM})$ pour l'alignement des points et la longueur $OA' = OM = 1$ pour milieu.
A est le milieu de [MP]
Droite des milieux (ou Thalès)
$\overrightarrow{OA} = \dfrac{1}{2}\ \overrightarrow{A'P}$
Utiliser l'image du triangle équilatéral AMO pour l'étude de $A'M'$ ...
Conclure.

---

97 page 315

L'application T étudiée dans cet exercice s'appelle une inversion

$z \neq \mathrm{i}\,,\ z' = f(z) = \mathrm{i} + \dfrac{2}{\bar{z}+\mathrm{i}}$ Remarquer: $z' - \mathrm{i} = \dfrac{2}{\bar{z}+\mathrm{i}}$

T application du plan privé de A d'affixe i définie par $T(M) = M'$ où M et M' sont d'affixes respectives z et z'.

1 a) $(z'-\mathrm{i})(\bar{z}+\mathrm{i}) = 2$, d'où, $arg[(z'-\mathrm{i})(\bar{z}+\mathrm{i})] = arg\,2 = 0 \quad [2\pi]$
On a alors: $arg(z'-\mathrm{i}) + arg(\bar{z}+\mathrm{i}) = 0 \quad [2\pi]$
Or, comme $\bar{z}+\mathrm{i}$ est le conjugué de $z-\mathrm{i}$, on sait: $arg(\bar{z}+\mathrm{i}) = -arg(z-\mathrm{i}) \quad [2\pi]$
On en déduit: $arg(z'-\mathrm{i}) = arg(z-\mathrm{i}) \quad [2\pi]$
Finalement: $(\vec{u}, \overrightarrow{AM'}) = (\vec{u}, \overrightarrow{AM}) \qquad [2\pi]$

Les vecteurs $\overrightarrow{AM}$ *et* $\overrightarrow{AM'}$ sont colinéaires de même sens.
Les points A, M, M' sont alignés.
$M' \in]\,AM\,)$ (demi-droite d'origine A ouverte en A)

Complément: *on peut aussi tirer de* $(z'-\mathrm{i})(\bar{z}+\mathrm{i}) = 2$: $|z'-\mathrm{i}|.|z-\mathrm{i}| = 2$ *, car,* $|\bar{z}+\mathrm{i}| = |\overline{z-\mathrm{i}}| = |z-\mathrm{i}|$
d'où, $AM'.AM = 2$ *Plus M s'approche de A, plus* M' *s'éloigne sur* (AM) *et réciproquement.*

b) $M'' = T \circ T(M)$ d'affixe z''
$z'' = f(z') = \mathrm{i} + \dfrac{2}{\bar{z'}+\mathrm{i}}$
Or, $\bar{z'}+\mathrm{i} = \overline{z'-\mathrm{i}} = \overline{\left(\dfrac{2}{\bar{z}+\mathrm{i}}\right)} = \dfrac{2}{z-\mathrm{i}}$ (le conjugué d'un quotient est le quotient des conjugués et le conjugué du réel 2 est 2)
Finalement: $z'' = \mathrm{i} + (z-\mathrm{i}) = z$
$T \circ T$ est l'identité du plan privé de A.

c) Soit J l'ensemble des points invariants par T:
$M(z) \in J$ équivaut à $f(z) = z$
équivaut à $z \neq \mathrm{i}$ et $(z-\mathrm{i})(\bar{z}+\mathrm{i}) = 2$
équivaut à $z \neq \mathrm{i}$ et $|z-\mathrm{i}|^2 = 2$, car, $\bar{z}+\mathrm{i} = \overline{z-\mathrm{i}}$ Rappel: $Z.\bar{Z} = |Z|^2$
équivaut à $M \neq A$ et $AM^2 = 2$
J est le cercle de centre A et de rayon $\sqrt{2}$

2) $z=1+\mathrm{i}+\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$, où $\theta\in\mathbb{R}$. *B* est le point d'affixe 1 + i

a) Lorsque θ décrit $\left]\frac{-\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$, *M* décrit le demi -cercle Γ de centre *B* de rayon 1, privé du point *I* d'affixe $1+\mathrm{i}+\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{2}}=1$ et du point *K* d'affixe $1+\mathrm{i}+\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{2}}=1+2\mathrm{i}$ et contenant le point *N* d'affixe $1+\mathrm{i}+\mathrm{e}^{i0}=2+\mathrm{i}$ (c'est le demi-cercle ne passant pas par *A* puisque $z_A=\mathrm{i}$, $\mathrm{e}^{i\theta}=-1=\mathrm{e}^{i\pi}$ lorsque $\theta=\pi\quad[2\pi]$)

b) $z'-\mathrm{i}=\frac{2}{\bar{z}+\mathrm{i}}=\frac{2}{1-\mathrm{i}+\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}+\mathrm{i}}=\frac{2}{1+\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}}$

Or, $\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\theta}{2}}\left(\mathrm{e}^{i\frac{\theta}{2}}+\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\theta}{2}}\right)=1+\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}$, d'où, $z'-\mathrm{i}=\frac{2}{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\theta}{2}}\left(\mathrm{e}^{i\frac{\theta}{2}}+\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\theta}{2}}\right)}$

Comme $\left(\mathrm{e}^{i\frac{\theta}{2}}+\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\theta}{2}}\right)=2\cos\frac{\theta}{2}$, on obtient: $z'-\mathrm{i}=\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\theta}{2}}}{\cos\frac{\theta}{2}}=\frac{\cos\frac{\theta}{2}+\mathrm{i}\sin\frac{\theta}{2}}{\cos\frac{\theta}{2}}=1+\mathrm{i}\tan\frac{\theta}{2}$

En posant $z'=x'+\mathrm{i}\,y'$, on obtient le système $\begin{cases}x'=1\\ y'-1=\tan\frac{\theta}{2}\end{cases}$

Donc M' appartient à la droite d'équation $x=1$

c) $M\in\Gamma$ équivaut à $M'\in L$ et $\frac{\theta}{2}\in\left]\frac{-\pi}{4};\frac{\pi}{4}\right[$

équivaut à $x'=1$ et $y-1\in\left]\tan\left(-\frac{\pi}{4}\right);\tan\frac{\pi}{4}\right[$ car, la fonction tan est strictement croissante sur $\left]\frac{-\pi}{4};\frac{\pi}{4}\right[$

équivaut à $x=1$ *et* $y\in]0;2[$

$T(\Gamma)$ est le segment ouvert $]IK[$ ([IK] est un diamètre du cercle de centre *B* et de rayon 1)

Compléments:

Pour construire M' , placer *M* sur Γ , tracer la droite (AM) et M' est le point d'intersection de (AM) et de la droite d'équation $x=1$.

On peut démontrer que tout cercle passant par *A* (*A* exclu) a pour image une droite parallèle à l'axe des ordonnées et réciproquement, toute droite parallèle à l'axe des ordonnées a pour image un cercle passant par *A* (*A* exclu)

Toutes les droites passant par *A* (*A* exclu) sont globalement invariantes, car, *A*, *M*, M' alignés.

Plus généralement, une construction de M'.

Soit C_1 le cercle de centre *A* et de rayon 1, *B* un point de ce cercle extérieur à (AM) (ainsi $AB=1$).

Soit C_2 le cercle de centre *A* et de rayon *2* et *C* le point d'intersection de C_2 avec la demi-droite *[AM)* (ainsi $AC=2$).

La parallèle à (MB) passant par *C* coupe *(AB)* en *N*.

Montrer que le cercle C_3 de centre *A* passant par *N* coupe la demi-droite *[AM)* en M' .

98 page 315

a et *b* désignant des nombres complexes ($a\neq 0$), *f* est la transformation qui, à $M(z)$, associe *M'* d'affixe $z'=az+b$

M_0 est un point différent de *O*

$M_{n+1}=f(M_n)$

Partie A

$a=p+iq, b=r+is$, où**, *p, q, r, s* sont des réels**. *(condition nécessaire pour écrire ensuite z_n sous forme algébrique)*

(u_n) et (v_n) sont les suites de réels où (u_n, v_n) est le couple de coordonnées de M_n .

Autrement dit, l'affixe de M_n est u_n+iv_n

1) Posons z_n l'affixe de M_n .

On a: $z_{n+1}=f(z_n)=az_n+b$.

$u_{n+1}+iv_{n+1}=(p+iq)(u_n+iv_n)+(r+is)$.

En développant et ***en identifiant les parties réelles et les parties imaginaires***, on obtient:

$u_{n+1}=pu_n-qv_n+r \text{ et } v_{n+1}=qu_n+pv_n+s$

2) $u_{n+2}=pu_{n+1}-qv_{n+1}+r$ et $v_{n+2}=qu_{n+1}+pv_{n+1}+s$

$u_{n+1}=pu_n-qv_n+r$ et $v_{n+1}=qu_n+pv_n+s$

Par différence et après factorisation:

$u_{n+2}-u_{n+1}=p(u_{n+1}-u_n)-q(v_{n+1}-v_n)$ et $v_{n+2}-v_{n+1}=q(u_{n+1}-u_n)+p(v_{n+1}-v_n)$

3) $q=0$ On a alors: $u_{n+2}-u_{n+1}=p(u_{n+1}-u_n)$

a) Une ***condition nécessaire*** portant sur *p* ...

C'est-à-dire: si (u_n) est une suite arithmétique alors le réel *p* est ....

L'hypothèse est: (u_n) est une suite arithmétique non constante

par conséquent $u_{n+2}-u_{n+1}=u_{n+1}-u_n \text{ et } u_{n+1}\neq u_n$

Conclusion: (Nécessairement:) $p=1$

Lorsque $q=0$, cette condition est suffisante: si $p=1$ alors, pour ***tout*** entier naturel n, $u_{n+1}=u_n+r$

La suite (u_n) est une suite arithmétique de raison r.

Comme $q=0$, $p=1$ et $v_{n+2}-v_{n+1}=q(u_{n+1}-u_n)+p(v_{n+1}-v_n)$, on en déduit: $v_{n+2}-v_{n+1}=v_{n+1}-v_n$

La suite (v_n) est donc une suite arithmétique.

La suite (v_n) est une suite arithmétique de raison s.

b) Puisque $p=1$ et $q=0$, $a=1$ et $z'=z+b.$

f est une translation de vecteur $\vec{w}$ d'affixe *b*. (*autrement dit, pour **tout M** du plan, $\overrightarrow{MM'}$ a pour affixe le complexe b qui ne dépend pas de M)*

4) $q=r=0$ et $p\neq 0$ et $p\neq 1$. On a alors: $a=p$ et $b=is$ et $z'=pz+is$

a) D'après 1), pour ***tout*** entier naturel n, $u_{n+1}=pu_n-qv_n+r$, d'où, $u_{n+1}=pu_n$

Comme *p* est un réel non nul et différent de 1, (u_n) est une suite géométrique de raison *p* non nulle..

b) On cherche un point Ω tel que $f(\Omega)=\Omega$

On cherche donc ω solution de l'équation: $z=pz+is$

Résolution de: $z=pz+is$ équivaut à $z(1-p)=is$. Comme $1-p\neq 0$ et $1-p$ réel, on en déduit une solution unique $\omega=i\dfrac{s}{1-p}$

$$z'-\omega=pz+is-i\frac{s}{1-p}=pz+i\left[\frac{s(1-p)-s}{1-p}\right]=p\left[z-i\frac{s}{1-p}\right]=p(z-\omega)$$

On obtient donc: $\overrightarrow{\Omega M'}=p\overrightarrow{\Omega M}$ et p réel différent de 1.
f est l'homothétie de centre Ω et de rapport p.
c) Puisque $u_{n+1}=pu_n$, on a : $u_1=pu_0$. (Remarque: Pour tout entier naturel n, on a: $u_n=p^n u_0$)
Si $M_1\neq M_0, u_1\neq u_0.$ Par conséquent: $p\neq 1$.
On peut donc appliquer le 4b). On alors: Pour tout entier naturel n, $\overrightarrow{\Omega M_{n+1}}=p\overrightarrow{\Omega M_n}$
Les points Ω, M_n, M_{n+1} sont alignés.

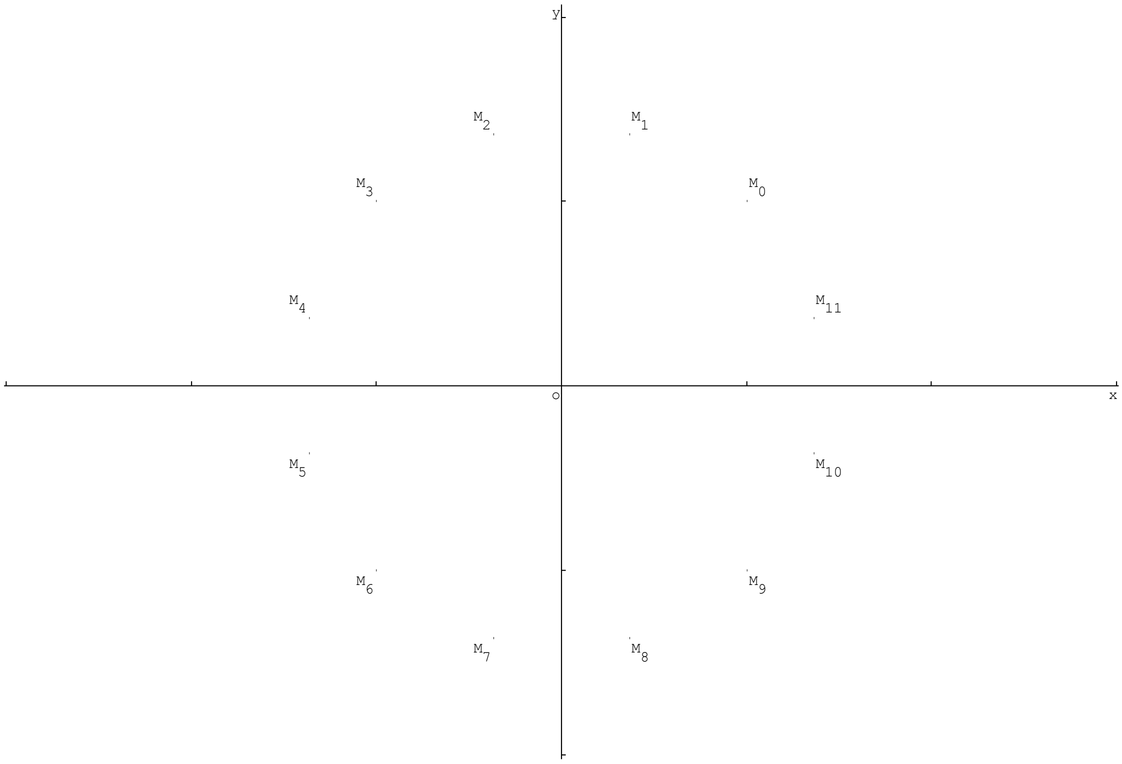
On a donc: Ω, M_0, M_1 alignés, puis, Ω, M_1, M_2 alignés, puis, Ω, M_2, M_3 alignés... (démonstration complète par récurrence en cours d'année).
d) n étant un entier supérieur ou égal à 2 et G_n l'isobarycentre des n points $M_0,\dots,M_{n-1}$, on a:
x_n affixe de G_n est: $\frac{1}{n}(u_0+u_1+\dots u_{n-1})$
On reconnaît la somme de n termes consécutifs d'une suite géométrique de raison p différente de 1.
$x_n=\frac{1}{n}\left(u_0\frac{1-p^n}{1-p}\right)$ Si $-1<p<1$, la suite (p^n) converge vers 0 et par conséquent la suite x_n converge vers 0.
Si $p=-1$, la suite $(-1)^n$ prend alternativement les valeurs -1 et 1, d'où, $0\leq x_n\leq\frac{1}{n}|u_0|$
D'après le théorème des gendarmes (u_n) converge vers 0
Si $p<-1$ ou $p>1$, la suite (u_n) diverge (car, ($\frac{p^n}{n}$) diverge lorsque $p>1$ (croissance comparée...)

Partie B

θ est un réel, $a=e^{i\theta}=\cos\theta+i\sin\theta$ et $b=0$
1) $z'=e^{i\theta}z$ est l'écriture complexe de la rotation de centre O et d'angle θ
2 a) M_0 étant différent de O, $OM_0\neq 0$.
Par définition de la rotation, $OM_n=OM_{n-1}=\dots=OM_1=OM_0$
Les points $M_0, M_1,\dots,M_n$ sont sur le cercle de centre O et de rayon OM_0.
b) $M_0M_1=M_1M_2=\dots=M_{n-1}M_n$
car, ce sont les cordes du cercle sous-tendant des arcs de même mesure θ.
$M_0=M_n$ si et seulement si $n\theta=2\pi\quad[2\pi]$ si et seulement si $\theta=2\frac{\pi}{n}\quad\left[2\frac{\pi}{n}\right]$

Par exemple: si $n=3$, on a les rotations d'angle $\frac{2\pi}{3},\frac{4\pi}{3},2\pi$ ... qui amènent M_3 en M_0

3) Construction dans le cas $M_0(1+i)$ et $\theta=\frac{\pi}{6}$ D'après ce qui précède
$M_{12}=M_0, M_{13}=M_1, M_{14}=M_2, M_{15}=M_3$



Partie C

$a=\dfrac{1-i\sqrt{3}}{4}$ et $b=0$ $\qquad z'=az$

1 a) $|a|=\dfrac{1}{2}$ et $arg(a)=\dfrac{-\pi}{3}$. $\qquad a=\dfrac{1}{2}e^{-i\frac{\pi}{3}}$

Soit *r* la rotation de centre *O* et d'angle $\dfrac{-\pi}{3}$ et h l'homothétie de centre *O* et de rapport $\dfrac{1}{2}$.

M étant un point d'affixe *z*, $h(M)=M''$ est le point d'affixe $\dfrac{1}{2}z$ et $r(M'')$ est le point d'affixe $e^{-i\frac{\pi}{3}}\dfrac{1}{2}z=az=z'$ affixe de *M'*

On a bien: $f=r\circ h$

b) z_n étant l'affixe de M_n, $z_{n+1}=a\,z_n$ et $\overrightarrow{M_nM_{n+1}}$ a pour affixe $z_{n+1}-z_n=z_n(a-1)=z_n\dfrac{-3-i\sqrt{3}}{4}$

On a donc: $OM_n=|z_n|,OM_{n+1}=|a\,z_n|=|a|.|z_n|=\dfrac{1}{2}|z_n|$ et $M_nM_{n+1}=\left|z_n\dfrac{-3-i\sqrt{3}}{4}\right|=\dfrac{3}{2}|z_n|$

Comme $|z_n|^2=\left(\dfrac{1}{2}|z_n|\right)^2+\left(\dfrac{3}{2}|z_n|\right)^2$

On en déduit que OM_nM_{n+1} est un triangle rectangle en M_{n+1} (demi-triangle équilatéral)

2 a) L'affixe de $\overrightarrow{OM_{n+3}}$ est $z_{n+3}=f[f[f(z_n)]]=a^3z_n=\dfrac{1}{8}e^{-i\pi}z_n=\dfrac{-1}{8}z_n$

h est donc l'homothétie de centre *O* et de rapport $\dfrac{-1}{8}$.

b) Par conséquent, le centre *O* de l'homothétie, le point M_n et son image M_{n+3} sont alignés.

3) M_0 d'affixe 8 D'après 2a) l'affixe de M_3 est -1

On construit les demi-triangles équilatéraux indirects OM_0M_1 , puis, OM_1M_2 , puis OM_2M_3 ...

Par exemple, M_1 appartient au cercle de centre O et de rayon 4 et au cercle de diamètre $[OM_0]$ et OM_0M_1 est indirect.

4a) $M_0M_1 = OM_0 \sin\frac{\pi}{3} = 8\frac{\sqrt{3}}{2} = 4\sqrt{3}$ (triangle rectangle ...)

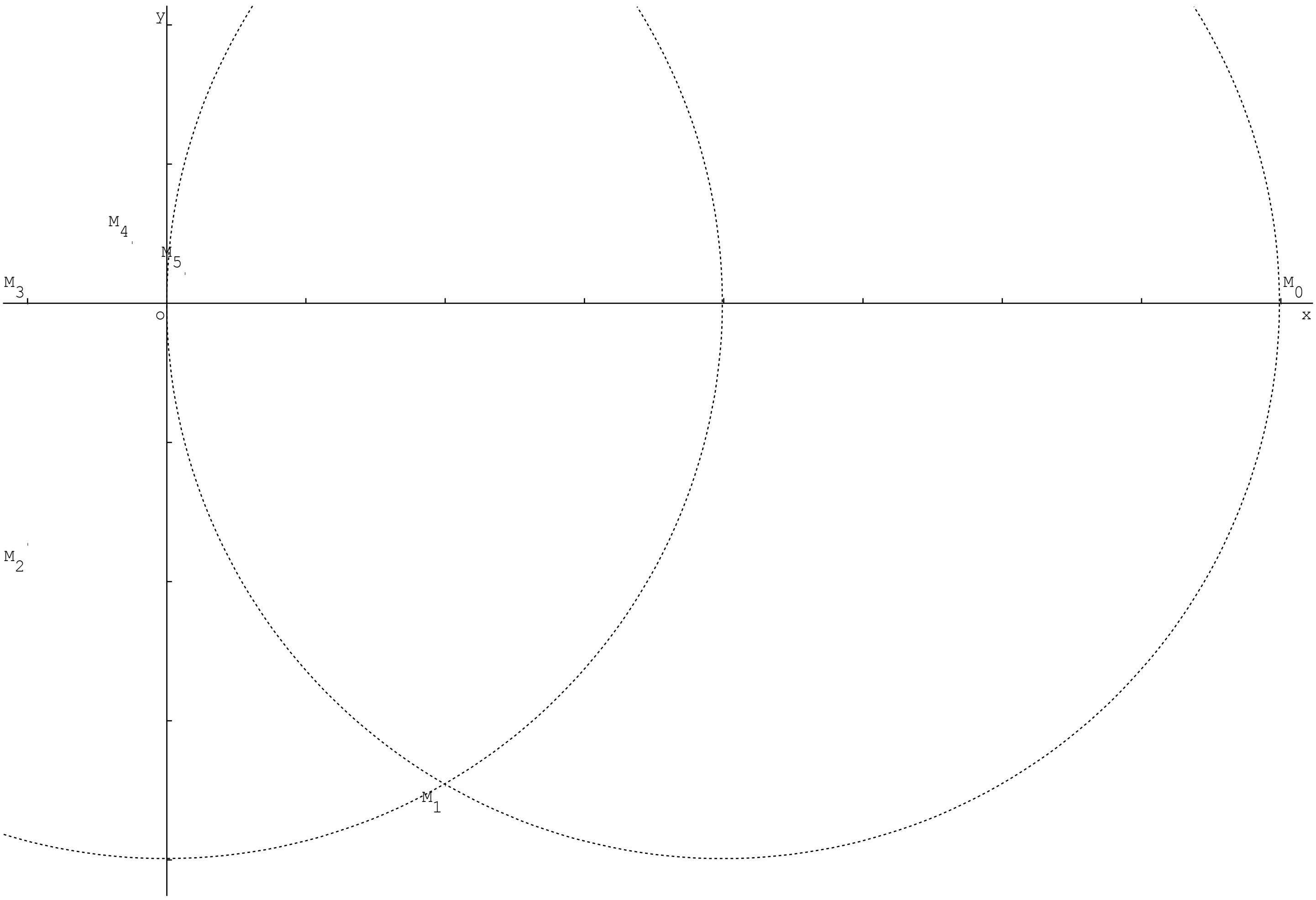
$M_1M_2 = OM_1 \sin\frac{\pi}{3}$

La suite des longueurs M_nM_{n+1} est une suite géométrique de premier terme $l_0 = 4\sqrt{3}$ et de raison $q = \frac{\sqrt{3}}{2}$

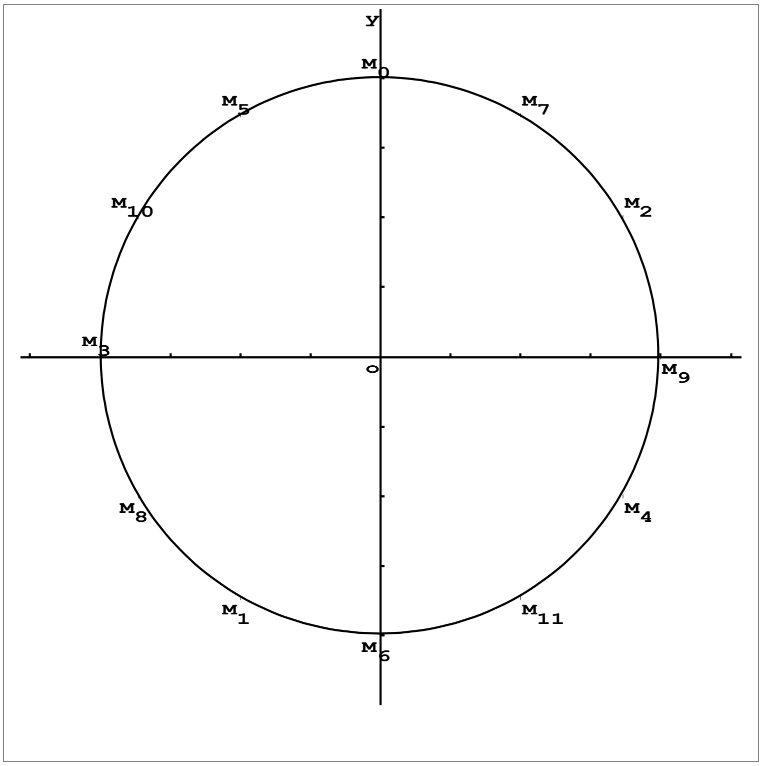
d_n est la somme de n termes consécutifs de cette suite géométrique, d'où, $d_n = 4\sqrt{3}\left(\frac{1-q^n}{1-q}\right)$

c) Puisque $0 < q < 1$, (q^n) converge vers 0 et (d_n) converge vers

$$4\sqrt{3}\left(\frac{1}{1-\frac{\sqrt{3}}{2}}\right) = 8\sqrt{3}(2+\sqrt{3}) = 16\sqrt{3}+24$$



B page 316



La suite (α_n) de nombres réels définis par $\begin{cases} \alpha_0 = \dfrac{\pi}{2} \\ \alpha_{n+1} = \alpha_n + \dfrac{5\pi}{6} \end{cases}$

et M_n point du cercle C de centre O de rayon 1 tel que $(\vec{u}\,;\widehat{\overrightarrow{OM_n}}) = \alpha_n$

1) Points M_0 , M_1 , M_2 , ... , M_{11}

2) D'après la définition de la suite (α_n) , la suite est une suite arithmétique de premier terme α_0 et de raison $\dfrac{5\pi}{6}$.

On en déduit: pour tout entier naturel *n*,

$$\alpha_n = \alpha_0 + \frac{5\pi}{6} \times n = \frac{\pi}{2} + \frac{5n\pi}{6}$$

Comme $OM_n = 1$ et $(\vec{u}\,;\widehat{\overrightarrow{OM_n}}) = \alpha_n$, l'affixe de M_n est $z_n = 1 \times e^{i\alpha_n} = e^{i\left(\frac{\pi}{2}+\frac{5n\pi}{6}\right)}$

3) a) $z_{n+6} = e^{i\left(\frac{\pi}{2}+\frac{5(n+6)\pi}{6}\right)} = e^{i\left(\frac{\pi}{2}+\frac{5n\pi}{6}\right)} \times e^{5i\pi} = -\ e^{i\left(\frac{\pi}{2}+\frac{5n\pi}{6}\right)} = -\ z_n$, car, $e^{5i\pi} = e^{i\pi} = -1$

Les affixes de M_n et M_{n+6} étant opposées, O est le milieu de $[M_nM_{n+6}]$ et les points sont diamétralement opposés.

$z_{n+12} = e^{i\left(\frac{\pi}{2}+\frac{5(n+12)\pi}{6}\right)} = e^{i\left(\frac{\pi}{2}+\frac{5n\pi}{6}\right)} \times e^{10i\pi} = e^{i\left(\frac{\pi}{2}+\frac{5n\pi}{6}\right)} = z_n$, , car, $e^{10i\pi} = e^{2i\pi} = 1$

Les affixes de M_n et M_{n+12} étant égales, les points sont confondus.

b) $z_{n+4} = e^{i\left(\frac{\pi}{2}+\frac{5(n+4)\pi}{6}\right)} = e^{i\left(\frac{\pi}{2}+\frac{5n\pi}{6}\right)} \times e^{\frac{10}{3}i\pi} = e^{-2i\frac{\pi}{3}} z_n$ car, $\dfrac{10}{3}\pi = \dfrac{-2}{3}\pi + 2\times 2\pi$

$$M_nM_{n+4} = |z_{n+4} - z_n| = \left|e^{-2i\frac{\pi}{3}} z_n - z_n\right| = \left|e^{-2i\frac{\pi}{3}} - 1\right| \times |z_n|$$

Or, $|z_n| = 1$ et $e^{-2i\frac{\pi}{3}} - 1 = \dfrac{-1}{2} - \dfrac{\sqrt{3}}{2}i - 1 = \dfrac{-3}{2} - \dfrac{\sqrt{3}}{2}i$

d'où, $\left|e^{-2i\frac{\pi}{3}} - 1\right| = \sqrt{\dfrac{9}{4} + \dfrac{3}{4}} = \sqrt{3}$

Conclusion: $M_nM_{n+4} = \sqrt{3}$

Ce résultat prouve que pour tout entier naturel *k*, on a: $M_kM_{k+4} = \sqrt{3}$

On a donc, en faisant, $k = n+4$, puis $k = n+8$, $M_{n+4}M_{n+8} = M_{n+8}M_{n+12} = \sqrt{3}$

Comme $M_n = M_{n+12}$, il vient: $M_nM_{n+4} = M_{n+4}M_{n+8} = M_{n+8}M_n = \sqrt{3}$

Le triangle $M_nM_{n+4}M_{n+8}$ est équilatéral.

Autre méthode: l'égalité $z_{n+4} = e^{-2i\frac{\pi}{3}} z_n$ prouve que M_{n+4} est l'image de M_n dans la rotation de centre O et d'angle $\dfrac{-2\pi}{3}$ et que M_{n+8} est celle de M_{n+4} par cette même rotation...

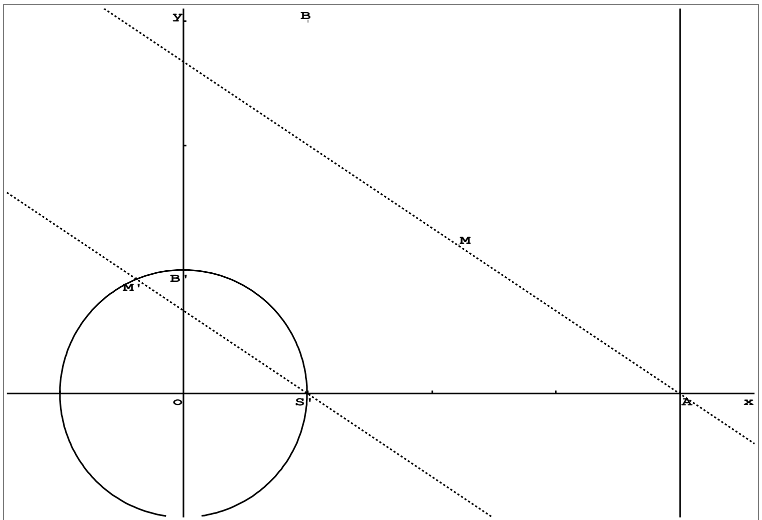
C page 316

Soit A le point d'affixe 4. on note d la droite d'équation $x=4$, privée du point A .
À tout point M différent de A d'affixe z, on associe le point M' d'affixe z', tel que $z'=\dfrac{z-4}{4-\overline{z}}$

1 a) B est le point d'affixe $1+3\,\mathrm{i}$
l'affixe b' de B' associé à B est:
$b'=\dfrac{1+3\mathrm{i}-4}{4-1+3\mathrm{i}}=\dfrac{-3+3\mathrm{i}}{3+3\mathrm{i}}=\dfrac{(-1+\mathrm{i})(1-\mathrm{i})}{2}=\mathrm{i}$

b) Soit $x\in\mathbb{R}$, $x\neq 4$. Le point R' d'affixe x' associé à R d'affixe x est: $x'=\dfrac{x-4}{4-x}=-1$

c) S est un point de d d'affixe $4+\mathrm{i}y$ avec $y\in\mathbb{R}^*$. L'affixe s' du point S' associé à S est $s'=\dfrac{4+\mathrm{i}y-4}{4-4+\mathrm{i}y}=1$



Tous les points de d ont pour image S' d'affixe 1.

Tous les points du plan ont leur image sur le cercle de centre O et de rayon 1.

d) **Réciproquement**, si $z'=1$ alors $z-4=4-\overline{z}$ avec $z\neq 4$. $z-4=4-\overline{z}$ implique $z+\overline{z}=8$, soit $\Re(z)=4$. Ce qui prouve que le point $M\in d$.
Les c) et d) prouvent: $z'=1$ ***si et seulement si*** $M\in d$ (Rappel: d est privée de A d'affixe 4)

2) a) $z\neq 4$, $|z'|=\dfrac{|z-4|}{|4-\overline{z}|}=\dfrac{(x-4)^2+y^2}{(4-x)^2+y^2}=1$ (Autrement dit: M' appartient au cercle de centre O et de rayon 1)

b) $z\neq 4$, $z'-1=\dfrac{z-4}{4-\overline{z}}-1=\dfrac{z-4-4+\overline{z}}{4-\overline{z}}=\dfrac{z+\overline{z}-8}{4-\overline{z}}=\dfrac{2(x-4)}{4-\overline{z}}$

d'où, $\dfrac{z'-1}{z-4}=\dfrac{2(x-4)}{(4-\overline{z})(z-4)}=\dfrac{2(x-4)}{-|z-4|}$ qui est un nombre réel. (Autrement dit: $\overrightarrow{S'M'}$ et $\overrightarrow{AM}$ sont colinéaires)
La droite $(S'M')$ est bien définie car, $M\notin d$, donc, $z'\neq 1$ d'après 1d) et $M'\neq S'$
Les droites $(S'M')$ et (AM) sont parallèles.
c) M étant donné en-dehors de d , M' est le point d'intersection du cercle de centre O et de rayon 1 et de la parallèle à (AM) passant par S'.

Exercice E page 317 .Nouvelle–Calédonie novembre 2000

1.a. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^2 - 2z + 2 = 0$.

discriminant $\Delta = b^2 - 4ac = -4 = 4\mathrm{i}^2 = (2\,\mathrm{i})^2$
Les solutions dans $\mathbb{C}$ sont donc les complexes conjugués: $z_1 = 1 - \mathrm{i}$ et $z_2 = \overline{z_1} = 1 + \mathrm{i}$
Préciser le module et un argument de chacune des solutions.

$|1-\mathrm{i}| = |1+\mathrm{i}| = \sqrt{2}$ et **un** argument θ_1 de z_1 est $-\dfrac{\pi}{4}$ et θ_2 de z_2 est $\theta_2 = -\theta_1 = \dfrac{\pi}{4}$.

Écriture exponentielle des solutions: $z_1 = \sqrt{2}\ \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\pi/4}$ et $z_2 = \sqrt{2}\ \mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/4}$
b. En déduire les solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation
$(-\mathrm{i}z + 3\mathrm{i} + 3)^2 - 2(-\mathrm{i}z + 3\mathrm{i} + 3) + 2 = 0$.

D'après le a), les solutions de cette équation sont les solutions des deux équations suivantes:

$-\mathrm{i}z + 3\mathrm{i} + 3 = 1 - \mathrm{i}$ et $-\mathrm{i}z + 3\mathrm{i} + 3 = 1 + \mathrm{i}$

$-\mathrm{i}z + 3\mathrm{i} + 3 = 1 - \mathrm{i} \Leftrightarrow -\mathrm{i}z = -2 - 4\mathrm{i} \Leftrightarrow z = -2\mathrm{i} + 4$ (remarquer: $-\mathrm{i}z \times \mathrm{i} = z$)

$-\mathrm{i}z + 3\mathrm{i} + 3 = 1 + \mathrm{i} \Leftrightarrow -\mathrm{i}z = -2 - 2\mathrm{i} \Leftrightarrow z = -2\mathrm{i} + 2$

Les solutions de $(-\mathrm{i}z + 3\mathrm{i} + 3)^2 - 2(-\mathrm{i}z + 3\mathrm{i} + 3) + 2 = 0$ sont $\{4 - 2\mathrm{i}; 2 - 2\mathrm{i}\}$

2. Le plan est rapporté à un repère orthonormal direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$ d'unité graphique 2 cm. On considère les points *A*, *B* et *C* d'affixes respectives $z_A = 1 + \mathrm{i}$, $z_B = \overline{z_A}$, $z_C = 2z_B$.

a. Déterminer les formes algébriques de z_B et z_C.

$z_A = 1 + \mathrm{i}$, $z_B = \overline{z_A} = 1 - \mathrm{i}$, $z_C = 2z_B = 2 - 2\mathrm{i}$.

b. Placer les points *A*, *B* et *C*

c. Montrer que les points *A*, *B* et *C* appartiennent au cercle ($\mathscr{C}$)de centre *I* d'affixe 3 et de rayon $\sqrt{5}$.

$IA = |z_A - z_I| = |1 + \mathrm{i} - 3| = |-2 + \mathrm{i}| = \sqrt{(-2)^2 + 1^2} = \sqrt{5}$

$IB = \ldots. = |-2 - \mathrm{i}| = \sqrt{5}$

$IC = \ldots = |-1 - 2\mathrm{i}| = \sqrt{5}$

d. Calculer $\dfrac{z_C - 3}{z_A - 3}$.

$$\frac{z_C - 3}{z_A - 3} = \frac{-1 - 2\mathrm{i}}{-2 + \mathrm{i}} = \frac{\mathrm{i}(\mathrm{i} - 2)}{-2 + \mathrm{i}} = \mathrm{i}$$

en déduire la nature du triangle *IAC*.

Le résultat précédent montre que: $z_C - z_I = \mathrm{i}(z_A - z_I)$, d'où,

C est l'image de *A* dans la rotation de centre *I* et d'angle $\dfrac{\pi}{2}$ (quart de tour de centre *I* direct)

IAC est un triangle rectangle isocèle direct en *I*.

e. Le point *E* est l'image du point *O* par la translation de vecteur 2 $\overrightarrow{IC}$. Déterminer l'affixe du point *E*.

L'affixe de 2 $\overrightarrow{IC}$ est $2(-1 - 2\mathrm{i}) = -2 - 4\mathrm{i}$

On a donc $z_E = 0 + (-2 - 4\mathrm{i}) = -2 - 4\mathrm{i}$

f. Le point *D* est l'image du point *E* par la rotation de centre *O* et d'angle $\dfrac{\pi}{2}$. Déterminer l'affixe du point *D*.

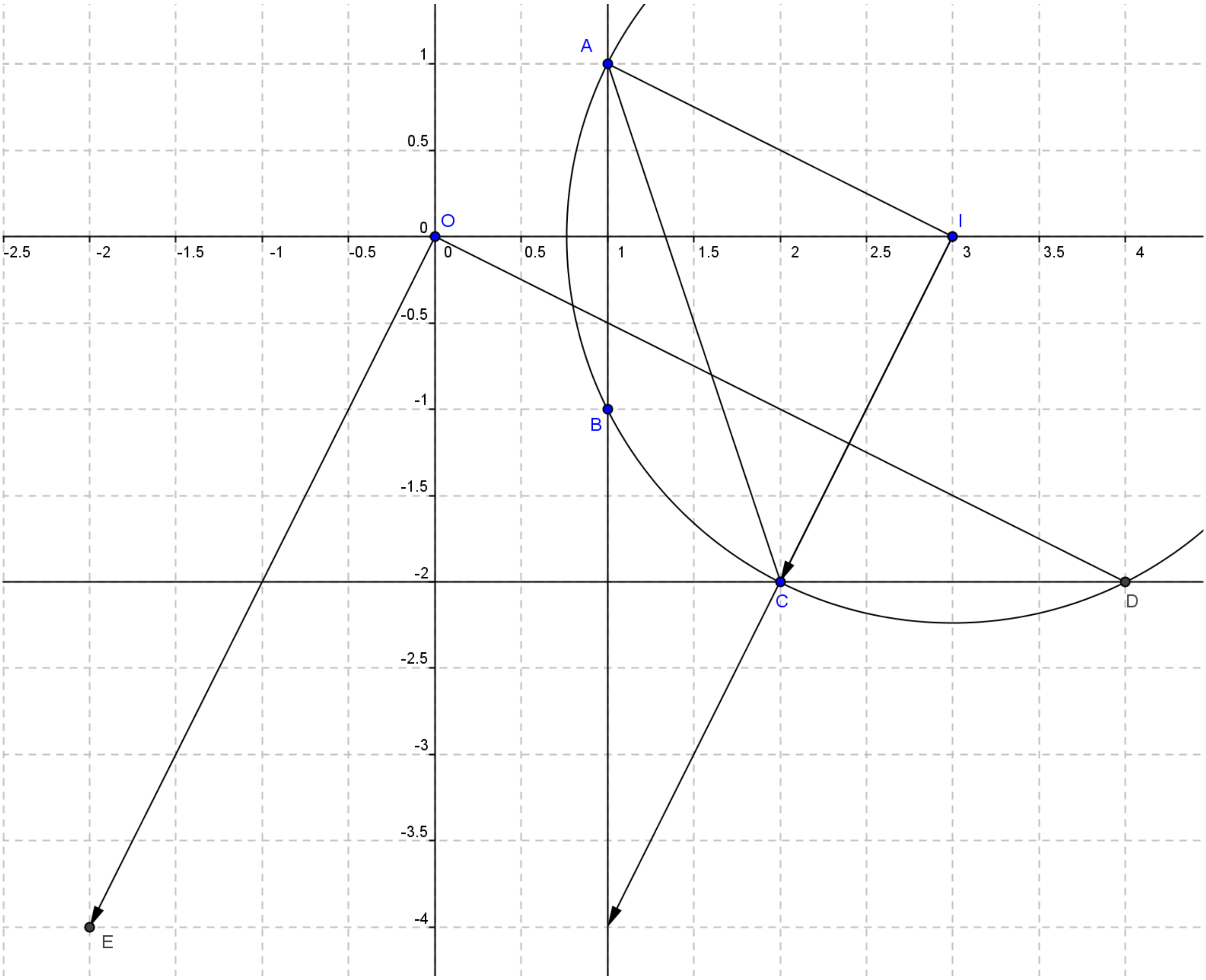
D'après l'écriture complexe d'une rotation, on a: $z_D - z_O = e^{\mathrm{i}\pi/2}(z_E - z_O)$

$z_D = \mathrm{i}z_E = 4 - 2\mathrm{i}$

g. Démontrer que les droites (*AB*) et (*CD*) sont perpendiculaires.

La droite (*AB*) est parallèle à l'axe des ordonnées puisque les points *A* et *B* ont la même abscisse (leurs affixes sont des complexes conjugués)

La droite (*CD*) est parallèle à l'axe des abscisses puisque les points *C* et *D* ont la même ordonnée –2.



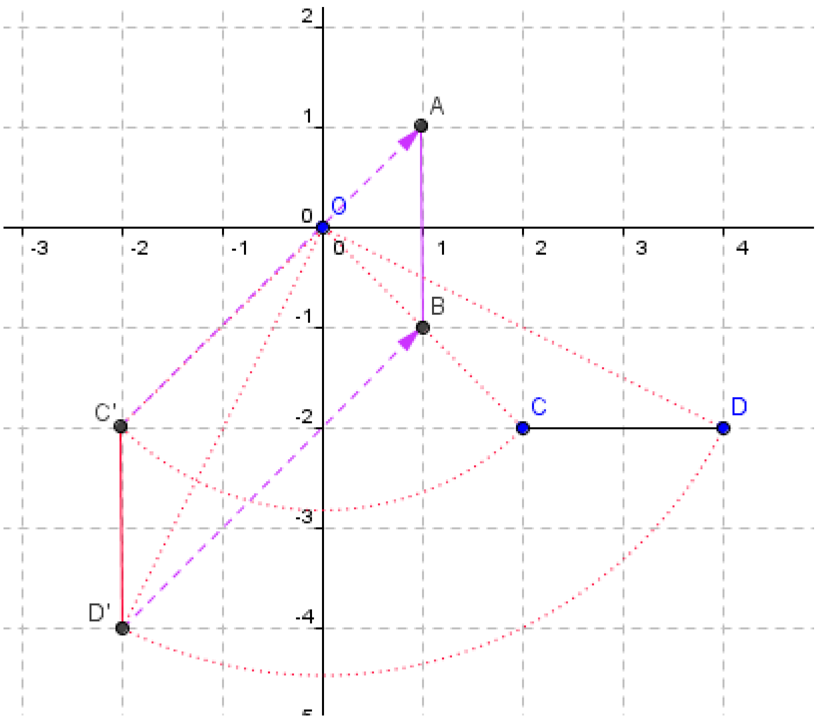
Quelques remarques à propos des 1a) et 1b)

On considère la transformation $T : z \mapsto -iz + 3i + 3$ qui peut se décomposer en une rotation r de centre O et d'angle $-\dfrac{\pi}{2}$ suivie d'une translation t de vecteur $\vec{w}$ d'affixe 3 + 3i.

En effet : $z \overset{r}{\rightarrow} -iz \overset{t}{\rightarrow} -iz + 3 + 3i$

D'après les calculs du 1b), le point C d'affixe $2 - 2i$ a pour image par T le point A d'affixe $1 + i$.

et le point D d'affixe $4 - 2i$ a pour image par T le point B d'affixe $1 - i$.



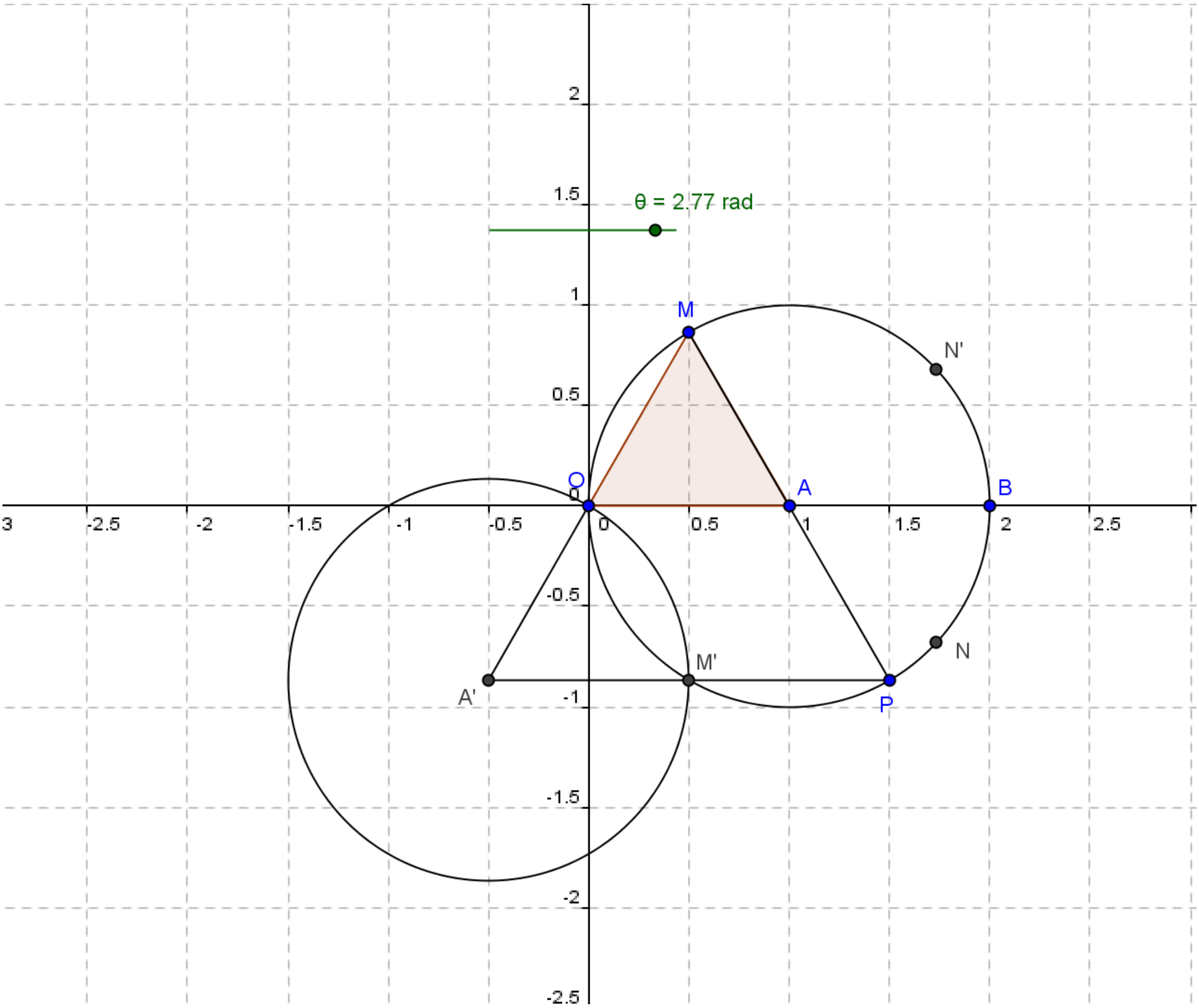
Le segment $[CD]$ a pour image un segment $[C'D']$ par r tel que $CD = C'D'$ et $(CD) \perp (C'D')$ et le segment $[C'D']$ a pour image le segment $[AB]$ tel que $AB = C'D'$ et $(AB) \parallel (C'D')$

Autre remarque:

En montrant au 2d) que $\frac{z_C - 3}{z_A - 3} = \mathrm{i}$, on montre que C est l'image de A par la rotation de centre I d'affixe 3 et d'angle $\frac{\pi}{2}$.

On montre de même façon que $\frac{z_D - 3}{z_B - 3} = \mathrm{i}$ $\quad$ ($z_D - 3 = 4 - 2\mathrm{i} - 3 = 1 - 2\mathrm{i}$ et $z_B - 3 = 1 - \mathrm{i} - 3 = -2 - \mathrm{i}$ et $\mathrm{i}(-2 - \mathrm{i}) = 1 - 2\mathrm{i}$)

Le segment $[CD]$ est donc l'image du segment $[AB]$ par la rotation de centre I d'affixe 3 et d'angle $\frac{\pi}{2}$., d'où, $AB = CD$ et $(AB) \perp (CD)$


θ = 2.77 rad
M
N'
O
A
B
N
M'
A'
P