Table des matières

Chapitre 11

1 page 334

ABC équilatéral de côté *a*, *I* milieu de [*BC*]

$\boxed{\vec{BC}\cdot\vec{BA}=\vec{BC}\cdot\vec{BI}=\frac{1}{2}BC^2=\frac{1}{a^2}}$ $\vec{CA}\cdot\vec{AI}=\vec{IA}\cdot\vec{AI}=-AI^2=\frac{-3}{4}a^2$ $\vec{AB}\cdot\vec{AC}=AB.AC\cos\widehat{BAC}=\frac{1}{a^2}$

3 page 334

ABC isocèle tel que $AB=AC=5$ et $BC = 8$. *H* pied de la hauteur issue de *B*

$\vec{AB}\cdot\vec{BC} = \frac{1}{2}\ \vec{CB}\cdot\vec{BC} = -\frac{1}{2}\times 64 = -35$

$\vec{AB}\cdot\vec{AC} = \frac{1}{2}(AB^2 + AC^2 - BC^2) = -7$

$\vec{AB}\cdot\vec{AC} = \vec{AH}\cdot\vec{AC}$. On en déduit $|\vec{AH}\cdot\vec{AC}| = 7$ et $|\vec{AH}\cdot\vec{AC}| = AH.AC$, donc, AH = $\frac{7}{5}$

Remarquer: $\vec{AH}\cdot\vec{AC} < 0$, donc, *H* extérieur à [*AC*].

4 page 334

I milieu de [*AB*]

a) $MA^2 - MB^2 = (\vec{MI}+\vec{IA})^2 - (\vec{MI}+\vec{IB})^2 = \vec{MI}^2 + \vec{IA}^2 + 2\ \vec{MI}\cdot\vec{IA} - (\vec{MI}^2 + \vec{IB}^2 + 2\ \vec{MI}\cdot\vec{IB})$

$= 2\ \vec{MI}\cdot(\vec{IA}-\vec{IB}) = 2\ \vec{MI}\cdot\vec{BA}$ Car, $IA = IB$.

b) $\boxed{\vec{MA}\cdot\vec{MB}=(\vec{MI}+\vec{IA})(\vec{MI}-\vec{IA})=MI^2-IA^2}$ car $\vec{IB}=-\vec{IA}$

6 page 334

ABC rectangle isocèle en *A*, *I* milieu de [*AB*], *J* milieu de [*AC*], *K* milieu de [*CI*]

Évaluons $\vec{AK}\cdot\vec{BJ}$ $\vec{AK}=\vec{AC}+\frac{1}{2}\vec{CI}$ et $\vec{BJ}=\vec{BA}+\frac{1}{2}\vec{AC}$

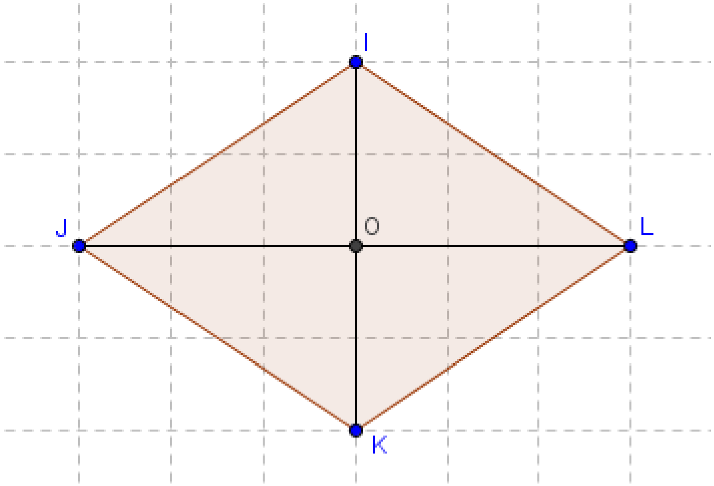
Le développement donne:

$\vec{AK}\cdot\vec{BJ}=\vec{AC}\cdot\vec{BA}+\frac{1}{2}\vec{AC}\cdot\vec{AC}+\frac{1}{2}\vec{CI}\cdot\vec{BA}+\frac{1}{4}\vec{CI}\cdot\vec{AC}$, or, $\vec{AC}\perp\vec{BA}$ et le projeté orthogonal de $\vec{CI}$ sur $\vec{BA}$ est $\vec{AI}$ et celui de $\vec{CI}$ sur $\vec{AC}$ est $\vec{CA}$

Comme $AB=AC$, on obtient: $\vec{AK}\cdot\vec{BJ}=0+\frac{1}{2}AC^2-\frac{1}{4}BA^2-\frac{1}{4}AC^2=0$

8 page 334

IJKL est un losange tel que *IK* = 4 et *JL* = 6. (Autrement dit : les longueurs des diagonales)



En appelant O le centre du losange et en sachant que les diagonales sont perpendiculaires en O, que $\vec{IL} = \vec{JK}$, on obtient :

1) $\vec{IL}\cdot\vec{LJ} = \vec{OL}\cdot\vec{LJ} = -\dfrac{1}{2}\vec{LJ}^{\,2} = -\dfrac{1}{2}LJ^2 = -18$

$\vec{IL}\cdot\vec{JK} = \vec{IL}\cdot\vec{IL} = IL^2 = 2^2 + 3^2 = 13$

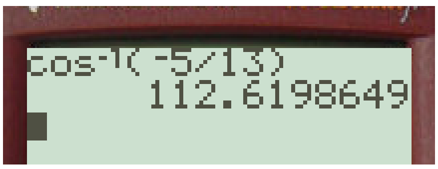
$\vec{IL}\cdot\vec{IK} = \vec{IO}\cdot\vec{IK} = \dfrac{1}{2}IK^2 = 8$

2) $\vec{IL}\cdot\vec{IJ} = IL.IJ.\cos\left(\vec{IL}, \vec{IJ}\right)$

$\vec{IL}\cdot\vec{IJ} = \vec{IL}\cdot\left(\vec{IL}+\vec{LJ}\right) = \vec{IL}\cdot\vec{IL} + \vec{IL}\cdot\vec{LJ} = 13 - 18 = -5$

De l'égalité : $IL.IJ.\cos\left(\vec{IL}, \vec{IJ}\right) = -5$ et comme $IL = IJ = \sqrt{13}$, on obtient : $\cos\left(\vec{IL}, \vec{IJ}\right) = \dfrac{-5}{13}$

Approximation (en degré) :



La calculatrice donne $\widehat{JIL} \approx 112{,}6°$

---

10 page 334

$A(1; -2)$, $B(2 ; 3)$ et $\vec{n}\,(-3; 5)$

1) Un point $M(x; y)$ appartient à la droite $\mathscr{D}$ passant par A et de vecteur normal $\vec{n}$ si et seulement si $\vec{AM}\cdot\vec{n} = 0$

On a donc: $(x - 1)\times(-3) + (y + 2)\times 5 = 0$ est une équation de $\mathscr{D}$.

En réduisant, on a: $y = \dfrac{3}{5}x - \dfrac{13}{5}$

2) **Une méthode:**

La médiatrice $\mathscr{E}$ de $[AB]$ est la perpendiculaire à $[AB]$ en son milieu I.

D'où, $M(x; y)$ appartient à $\mathscr{E}$ si et seulement si $\vec{IM}\cdot\vec{AB} = 0$

Or, $I(\frac{3}{2}\,;\,\frac{1}{2})$, $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}1\\5\end{pmatrix}$

$(x-\frac{3}{2})\times 1+(y-\frac{1}{2})\times 5=0$ est une équation de $\mathscr{E}$.

Après développement, réduction .... $x+5y-4=0$

Une autre méthode:

La médiatrice $\mathscr{E}$ de $[AB]$ est l'ensemble des points M équidistants de A et B, d'où, $M(x;\,y)$ appartient à $\mathscr{E}$ si et seulement si $MA^2=MB^2$ (l'équivalence est assurée car les longueurs sont des réels positifs)

On a donc: $(x-1)^2+(y+2)^2=(x-2)^2+(y-3)^2$. Après développement, réduction, ...

$x+5y-4=0$ ....

3) **Une méthode:**

La parallèle $\mathscr{F}$ à $\mathscr{E}$ passant par B a pour coefficient directeur $-\frac{1}{5}$ d'après l'équation réduite de $\mathscr{E}$.

On a alors: une équation de $\mathscr{F}$ est $y=-\frac{1}{5}x+p$.

Comme B appartient à $\mathscr{F}$, il vient: $3=-\frac{1}{5}\times 2+p$, soit; $p=\frac{17}{5}$.

Une équation de $\mathscr{F}$ est: $y=-\frac{1}{5}x+\frac{17}{5}$.

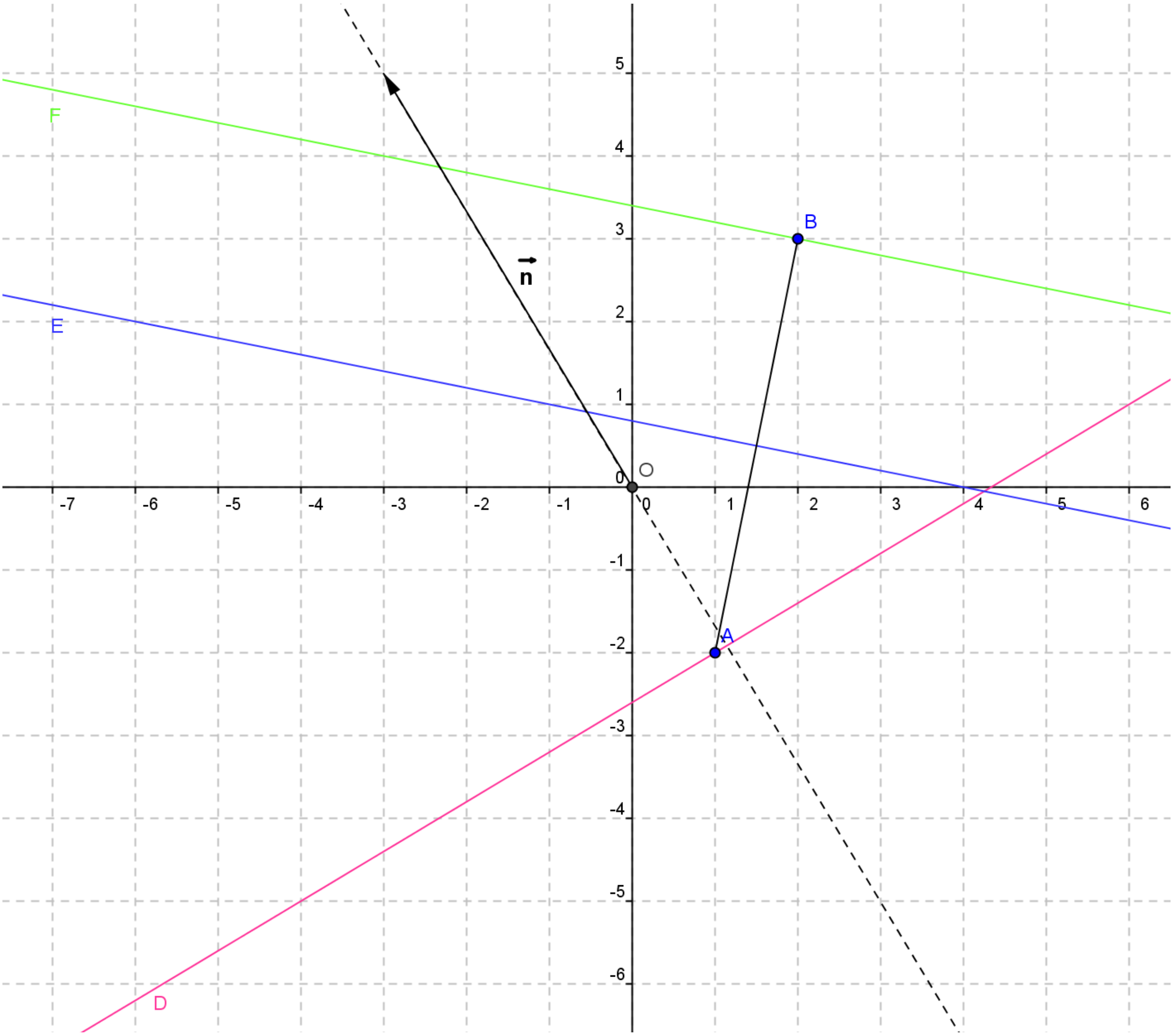
Une autre méthode:

La parallèle $\mathscr{F}$ à $\mathscr{E}$ passant par B est la droite perpendiculaire à (AB) passant par B, d'où, $\mathscr{F}$ est la droite passant par B de vecteur normal $\overrightarrow{AB}$.

D'où, $M(x;\,y)$ appartient à $\mathscr{F}$ si et seulement si $\overrightarrow{BM}\cdot\overrightarrow{AB}=0$.

$(x-2)\times 1+(y-3)\times 5=0$ est une équation de $\mathscr{F}$.

Après développement, réduction .... $x+5y-17=0$



13 page 335

$A(3\,;-4)$

a) $\boxed{M(x,y)\in C}$, cercle de centre A passant par O équivaut à $AM=AO$ équivaut à $(x-3)^2+(y+4)^2=3^2+(-4)^2$ équivaut à $\boxed{x^2+y^2-6x+8y=0}$

b) $\boxed{M(x,y)\in\Delta}$ tangente à C en O équivaut $\overrightarrow{OM}\perp\overrightarrow{OA}$ équivaut à $\boxed{3x-4y=0}$

14 page 334

$A(2; -5)$ et $B(-4; 3)$

1) Soit $C(3; 2)$. C appartient-il au cercle de diamètre $[AB]$?

Une méthode

On détermine le centre Ω et le rayon r du cercle.

$$\Omega \begin{cases} x_\Omega = \dfrac{x_A + x_B}{2} = -1 \\ y_\Omega = \dfrac{y_A + y_B}{2} = -1 \end{cases} \text{ et } r = \frac{AB}{2} = \frac{\sqrt{6^2+8^2}}{2} = 5$$

Rappel: $\overrightarrow{AB} \begin{cases} x_B - x_A = -6 \\ y_B - y_A = 8 \end{cases}$, d'où $\|\overrightarrow{AB}\| = \sqrt{(-6)^2+8^2} = 10$

On calcule ΩC

Comme $\overrightarrow{\Omega C} \begin{pmatrix} 3-(-1) \\ 2-(-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$, on a: $\Omega C = \sqrt{4^2+3^2} = 5$, donc, ...

Une autre méthode

Si $\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB} = 0$ alors C appartient au cercle de diamètre [AB].

$\overrightarrow{CA} \begin{pmatrix} 2-3 \\ -5-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -7 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{CB} \begin{pmatrix} -4-3 \\ 3-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 \\ 1 \end{pmatrix}$, d'où, $\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB} = (-1)\times(-7) + (-7)\times 1 = 0$.

Le produit scalaire étant nul, les vecteurs sont orthogonaux.

Le triangle ABC est donc rectangle en C et, par conséquent, inscrit dans le cercle de diamètre [AB]

Remarque: Le résultat reste vrai lorsque C = A ou C = B

2) Équation du cercle de diamètre [AB]

Une méthode

On détermine le centre Ω et le rayon r du cercle.

On a montré $\Omega(-1; -1)$ et $r = 5$

$M(x; y) \in \mathscr{C}(\Omega; 5)$ si et seulement si $\Omega M = 5$ si et seulement si $\Omega M^2 = 25$ (*équivalence car longueur*)

Or, $\Omega M^2 = (x-(-1))^2 + (y-(-1))^2 = x^2 + y^2 + 2x + 2y + 2$

Une équation de $\mathscr{C}(\Omega; 5)$ est: $x^2 + y^2 + 2x + 2y - 23 = 0$

Une autre méthode

M appartient au cercle de diamètre [AB] si et seulement si $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB} = 0$

Or, $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB} = (2-x)(-4-x) + (-5-y)(3-y) = -8 + 2x + x^2 - 15 + 2y + y^2 = x^2 + y^2 + 2x + 2y - 23$

Une équation du cercle de diamètre [AB] est: $x^2 + y^2 + 2x + 2y - 23 = 0$

---

15 page 334

1) Soit $M(x; y)$ tel que $x^2 + y^2 - 2x - y + 1 = 0$

On recherche la forme canonique ...

$x^2 + y^2 - 2x - y + 1 = 0 \Leftrightarrow (x-1)^2 + (y - \frac{1}{2})^2 - \frac{1}{4} = 0 \Leftrightarrow (x-1)^2 + (y - \frac{1}{2})^2 = \frac{1}{4}$

On pose $\Omega(1; \frac{1}{2})$, l'égalité précédente est alors équivalente à:

$\Omega M^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2$

$x^2 + y^2 - 2x - y + 1 = 0$ est une équation du cercle de centre Ω et de rayon $\frac{1}{2}$.

2) Soit $M(x; y)$ tel que $x^2 + y^2 - x - 3y + 1 = 0$

On recherche la forme canonique ...

$x^2 + y^2 - x - 3y + 1 = 0 \Leftrightarrow \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} + \left(y - \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{9}{4} + 1 = 0 \Leftrightarrow \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{3}{2}\right)^2 = \frac{6}{4}$

On pose $\Omega\left(\frac{1}{2}; \frac{3}{2}\right)$, l'égalité précédente est alors équivalente à:

$\Omega M^2 = \left(\frac{\sqrt{6}}{2}\right)^2$

$x^2 + y^2 - x - 3y + 1 = 0$ est une équation du cercle de centre Ω et de rayon $\frac{\sqrt{6}}{2}$

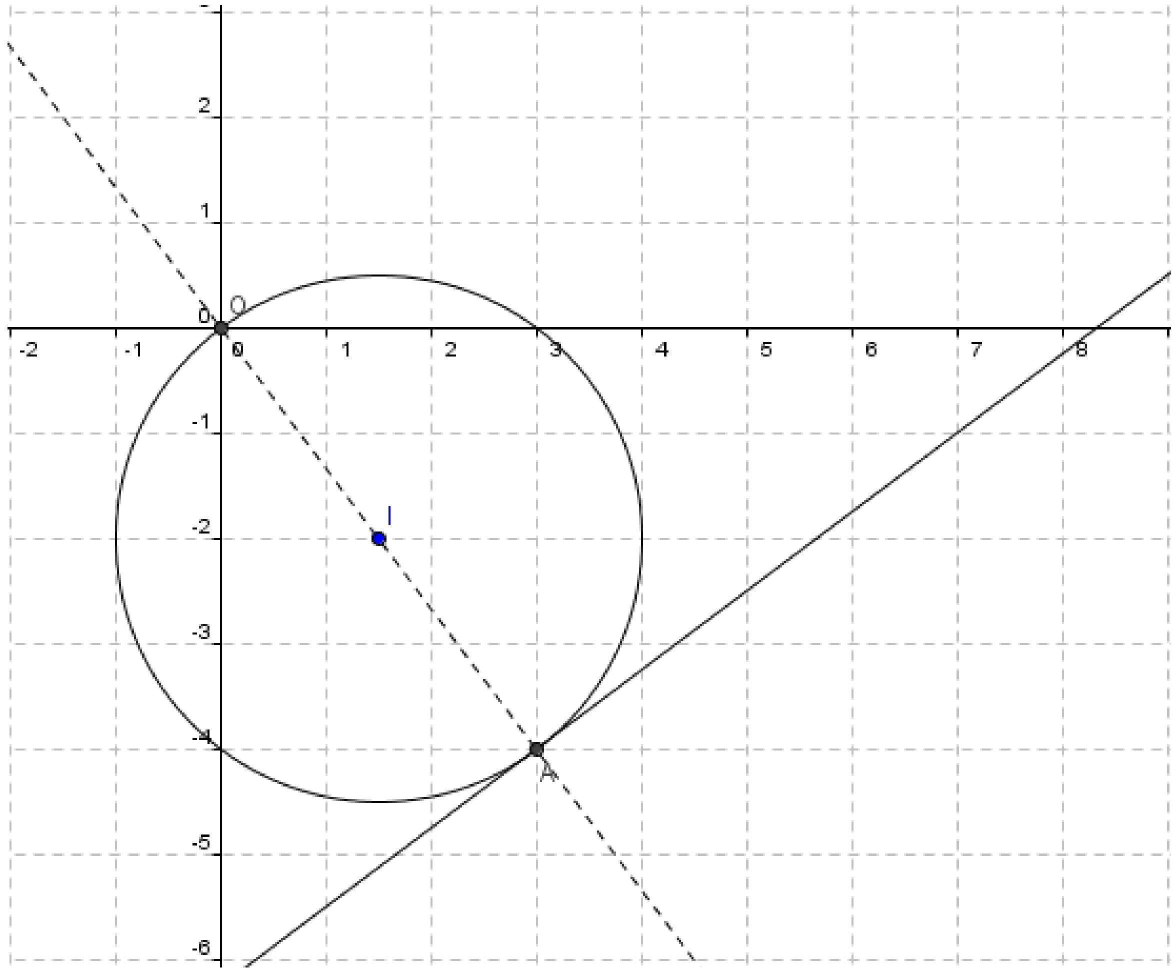
---

16 page 334

$\mathscr{C}$ est l'ensemble des points d'équation: $x^2 - 3x + y^2 + 4y = 0$

1) $x^2 - 3x + y^2 + 4y = 0 \Leftrightarrow \left(x - \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{9}{4} + (y+2)^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow \left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + (y+2)^2 = \frac{25}{4}$

$\mathscr{C}$ est donc le cercle de centre $I(\frac{3}{2}; -2)$ et de rayon $\frac{5}{2}$



2) A symétrique de l'origine du repère par rapport à I.

A est-il sur le cercle $\mathscr{C}$?

Méthode géométrique:

Comme les coordonnées du point $O(0; 0)$ vérifient l'équation de $\mathscr{C}$, O est un point de $\mathscr{C}$ et le point A diamétralement opposé à O est un point de $\mathscr{C}$.

Méthode analytique:

I est le milieu de $[AO]$, on a donc: $\begin{cases} x_I = \dfrac{x_A + x_O}{2} \\ y_I = \dfrac{y_A + y_O}{2} \end{cases}$, on en déduit: $x_A = 3$ et $y_A = -4$.

Comme $3^2 - 3\times 3 + (-4)^2 + 4\times(-4) = ... = 0$, les coordonnées de A vérifient l'équation de $\mathscr{C}$, et, ...

Équation de la tangente T à $\mathscr{C}$ en A.

Soit $M(x; y) \in T$.

On sait: $M \in T$ si et seulement si $(AM) \perp (AI)$

si et seulement si $\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{AI} = 0$ et comme A, O, I sont alignés, on a:

$M \in T$ si et seulement si $\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{OA} = 0$

Or, $\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{OA} = 3\times(x - 3) + (-4)\times(y - (-4)) = 3x - 4y - 25$

Une équation de T est: $3x - 4y - 25 = 0$

L'équation réduite de T est: $y = \dfrac{3}{4}x - \dfrac{25}{4}$

---

17 page 334

Dans un repère orthonormal du plan, $A(1 ; 2)$, $B(-3 ; 1)$ et I milieu de $[AB]$.

1) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AM} = 0$ si et seulement si $\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont orthogonaux.

L'ensemble des points M vérifiant $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AM} = 0$ est la perpendiculaire à (AB) passant par A.

C'est donc la droite passant par A de vecteur normal $\overrightarrow{AB}$.

$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-4\\-1\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AM}\begin{pmatrix}x-1\\y-2\end{pmatrix}$,

$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AM} = -4(x - 1) + (-1)(y - 2) = -4x - y + 6$

L'ensemble des points $M(x ; y)$ vérifiant $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AM} = 0$ est caractérisée par l'équation $-4x - y + 6 = 0$

(ou encore : $y = 4x - 6$)

2) $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB} = 0$ si et seulement si $\overrightarrow{MA}$ et $\overrightarrow{MB}$ sont orthogonaux.

L'ensemble des points M vérifiant $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB} = 0$ est le cercle de diamètre $[AB]$.

$\overrightarrow{MA}\begin{pmatrix}1-x\\2-y\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{MB}\begin{pmatrix}-3-x\\1-y\end{pmatrix}$,

$\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB} = (1 - x)(-3 - x) + (2 - y)(1 - y) = -3 + 2x + x^2 + 2 - 3y + y^2 = x^2 + y^2 + 2x - 3y - 1$

L'ensemble des points $M(x ; y)$ vérifiant $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB} = 0$ est caractérisée par l'équation $x^2 + y^2 + 2x - 3y - 1 = 0$

(ou encore : $(x + 1)^2 - 1 + (y - \dfrac{3}{2})^2 - \dfrac{9}{4} - 1 = 0$, soit : $(x + 1)^2 + (y - \dfrac{3}{2})^2 = \dfrac{17}{4}$

Cercle de centre $I(-1 ; \dfrac{3}{2})$ et de rayon $\dfrac{\sqrt{17}}{2}$

3) $(\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB})\cdot\overrightarrow{MA} = 2\ \overrightarrow{MI}\cdot\overrightarrow{MA}$ (Car, $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB} = 2\ \overrightarrow{MI}$ (propriété du barycentre oeu propriété du parallélogramme selon le point de vue)

$(\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB})\cdot\overrightarrow{MA} = 0$ si et seulement si $\overrightarrow{MI}\cdot\overrightarrow{MA} = 0$ si et seulement si $\overrightarrow{MA}$ et $\overrightarrow{MI}$ sont orthogonaux.

L'ensemble des points M vérifiant $(\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB})\cdot\overrightarrow{MA}$ = 0 est le cercle de diamètre [AI].

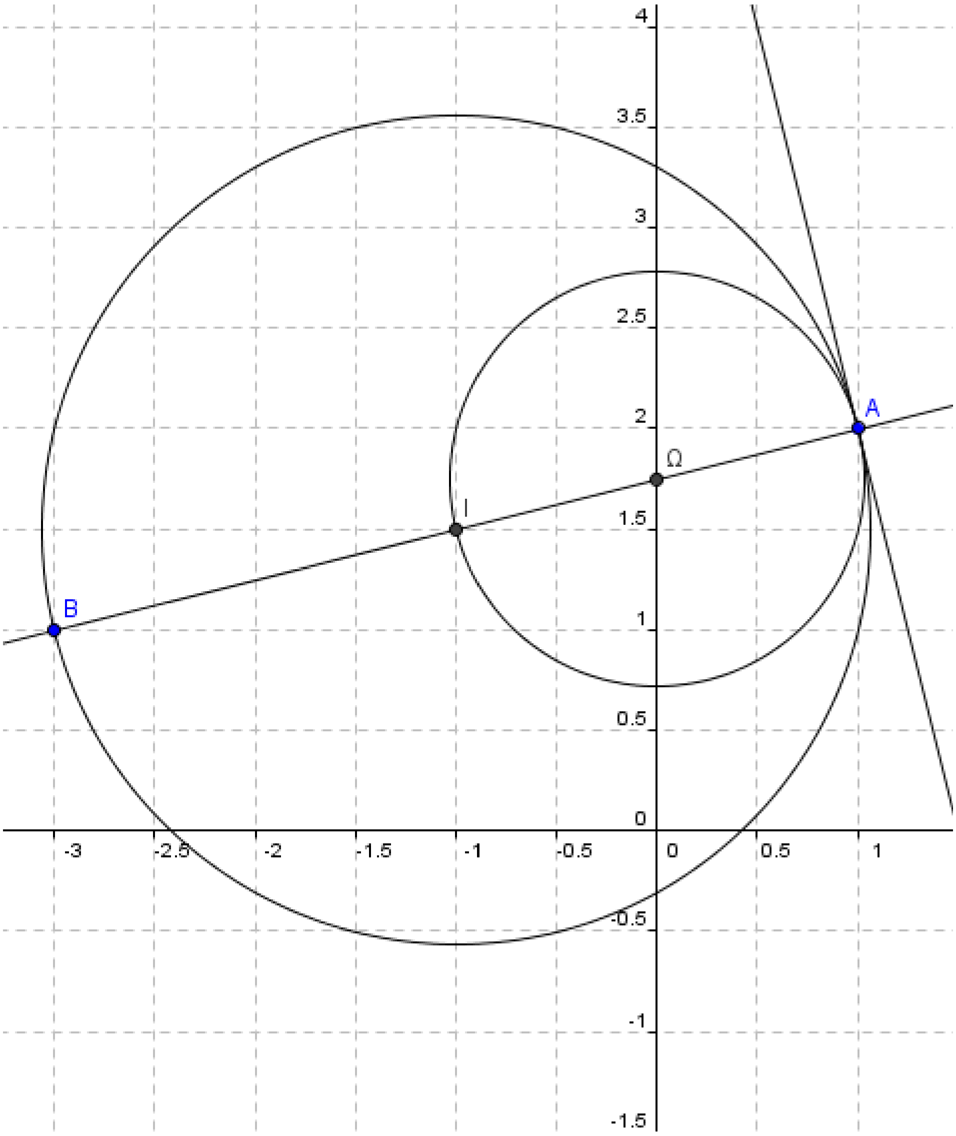
$\overrightarrow{MA}\begin{pmatrix}1-x\\2-y\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{MI}\begin{pmatrix}-1-x\\\frac{3}{2}-y\end{pmatrix}$

$\overrightarrow{MI}\cdot\overrightarrow{MA} = (1-x)(-1-x)+(2-y)(\frac{3}{2}-y) = -1+x^2+3-\frac{7}{2}y+y^2 = x^2+y^2-\frac{7}{2}y+2$

L'ensemble des points $M(x\,;\,y)$ vérifiant $(\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB})\cdot\overrightarrow{MA}$ = 0 est caractérisée

par l'équation $x^2+y^2-\frac{7}{2}y+2=0$ (ou encore : $x^2+(y-\frac{7}{4})^2-\frac{49}{16}+2=0$, soit : $(x+1)^2+(y-\frac{7}{4})^2=\frac{17}{16}$

Cercle de centre $\mathbf{\Omega}(0\,;\,\frac{7}{4})$ et de rayon $\frac{\sqrt{17}}{4}$,



18 page 335

d: $2x-5y+3=0$ $A(1\,;2)$ $\boxed{d(A,d)=\frac{|2\cdot1-5\cdot2+3|}{\sqrt{2^2+(-5)^2}}=\frac{5}{\sqrt{29}}=\frac{5\sqrt{29}}{29}}$

20 page 335

$A(3\,;-1)$, $B(1\,;2)$ et $C(4\,;-2)$ d'où, $\overrightarrow{BC}(3\,;-4)$

1) Équation de (BC) :

$\boxed{M(x\,,y)\in(BC)}$ équivaut à $\overrightarrow{BM}$ et $\overrightarrow{BC}$ colinéaires équivaut à $(-4)(x-1)-3(y-2)=0$ équivaut à $\boxed{4x+3y-10=0}$

2) Les coordonnées de *A* ne vérifient pas l'équation de (*BC*).

3) $\boxed{h=d(A\,,(BC))=\dfrac{|4\cdot3+3\cdot(-1)-10|}{\sqrt{4^2+3^2}}=\dfrac{1}{5}}$

21 page 335

Dans un repère orthonormal, *A*(1 ; –1), *B*(–4 ; –3) et *C*(2 ; 5)

1) $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-5\\-2\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}1\\6\end{pmatrix}$ ne sont pas colinéaires (en effet : $-5\times6 \neq -2\times1$)

Les points *A*, *B* et *C* ne sont pas alignés.

2a) Hauteur du triangle *ABC* issue de *A* :

On cherche une équation de la droite Δ passant par *A* et de vecteur normal $\overrightarrow{BC}$

$\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix}6\\8\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AM}\begin{pmatrix}x-1\\y+1\end{pmatrix}$

$M(x\,;y) \in \Delta$ si et seulement si $\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{BC} = 0$ si et seulement si $6(x-1) + 8(y+1) = 0$

Une équation de Δ est : $3x + 4y + 1 = 0$

b) Une méthode :

Soit *H* le pied de la hauteur issue de *A*.

H est le point d'intersection de (*BC*) et de Δ.

$H \in (BC)$ si et seulement si $\overrightarrow{BH} = t\ \overrightarrow{BC}$ où $t \in \mathbb{R}$.

On a donc : $\begin{cases} x_H-x_B=t\times6\\ y_H-y_B=t\times8\end{cases}$, soit : $x_H = -4 + 6t$ et $y_H = -3 + 8t$.

Dans l'équation de Δ, il vient : $3(-4 + 6t) + 4(-3 + 8t) + 1 =$, d'où, $t = \dfrac{23}{50}$

$x_H = -4 + 6\times\dfrac{23}{50} = -\dfrac{62}{50} = -1{,}24$ et $y_H = -3 + 8\times\dfrac{23}{50} = \dfrac{34}{50} = 0{,}68$

$\overrightarrow{AH}\begin{pmatrix}\dfrac{-62}{50}-1\\ \dfrac{34}{50}+1\end{pmatrix}$, soit, $\overrightarrow{AH}\begin{pmatrix}\dfrac{-112}{50}\\ \dfrac{84}{50}\end{pmatrix}$ et $AH^2 = \dfrac{(-112)^2+84^2}{50^2} = \dfrac{140^2}{50^2}$, $AH = \dfrac{14}{5} = 2{,}8$

Autre méthode :

AH est la distance du point *A* à la droite (*BC*).

On cherche alors une équation de (BC) :
$M(x\,;\,y) \in (BC)$ si et seulement si $\overrightarrow{BM}$ et $\overrightarrow{BC}$ colinéaires.
La relation de colinéarité de deux vecteurs mène à : $8(x+4) - 6(y+3) = 0$, soit : $8x - 6y + 14 = 0$
Une équation de (BC) est : $4x - 3y + 7 = 0$
La distance de A à (BC) est donnée par $d = \dfrac{|4\times1-3\times(-1)+7|}{\sqrt{4^2+3^2}} = \dfrac{14}{5} = 2{,}8$
3/ Les données précédentes permettent de connaître les trois longueurs des côtés :
$BC = \sqrt{6^2+8^2} = 10$, $AC = \sqrt{1^2+6^2} = \sqrt{37}$ et $BA = \sqrt{5^2+2^2} = \sqrt{29}$
Aire du triangle ABC,
$\mathcal{A} = \dfrac{BC\times AH}{2} = \dfrac{10\times2{,}8}{2} = 14$
4/ Hauteur issue de B de longueur h_1 est telle que $\mathcal{A} = \dfrac{AC\times h_1}{2}$, d'où, $h_1 = \dfrac{28}{\sqrt{37}}$
Hauteur issue de C de longueur h_2 est telle que $\mathcal{A} = \dfrac{BA\times h_2}{2}$, d'où, $h_2 = \dfrac{28}{\sqrt{29}}$

---

22 page 335

$d:\ x+3y-2=0$ et C cercle de centre $I(1\,;-2)$ et de rayon 4

$\boxed{d(I,(d)) = \dfrac{|1+3\cdot(-2)-2|}{\sqrt{1^2+3^2}} = \dfrac{7\sqrt{10}}{10}}$ Or, $\dfrac{7\sqrt{10}}{10} - 4 = \dfrac{7\sqrt{10}-40}{10}$ comme $49\times10 < 1\,600$ on a:
$\dfrac{7\sqrt{10}}{10} < 4$ La droite d est sécante à C

---

24 page 335

A, B, C tels que $AB = 2$, $AC = 3$ et $\widehat{BAC} = \dfrac{2\pi}{3}$

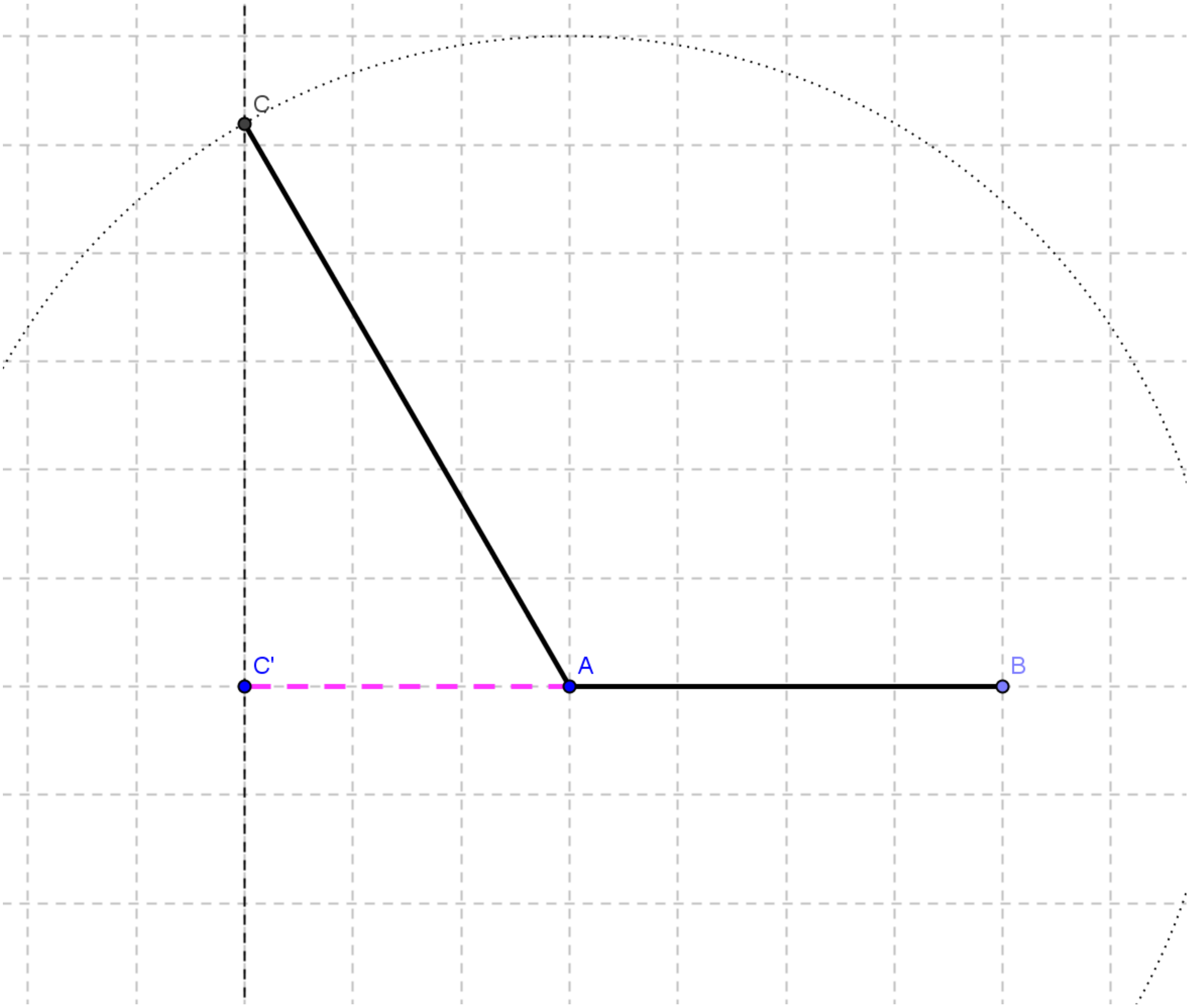
On a donc: $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = AB\times AC\cos\dfrac{2\pi}{3} = 2\times3\times(-\dfrac{1}{2}) = -3$

Sur la construction suivante: $AB = 2$, le point C est sur le cercle de centre A et de rayon 3 et l'angle $\widehat{BAC}$ vaut $\dfrac{2\pi}{3}$.

Le projeté orthogonal de C sur (AB) est C'.

On a: $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC'}$

La longueur $AC' = \dfrac{1}{2}AC$.



25 page 335

ABCDEFGH est un cube d'arête *a* (voir figure)

1) $\vec{AB}\cdot\vec{AC} = AB^2 = a^2$ (le projeté orthogonal de $\vec{AC}$ sur $\vec{AB}$ est $\vec{AB}$)

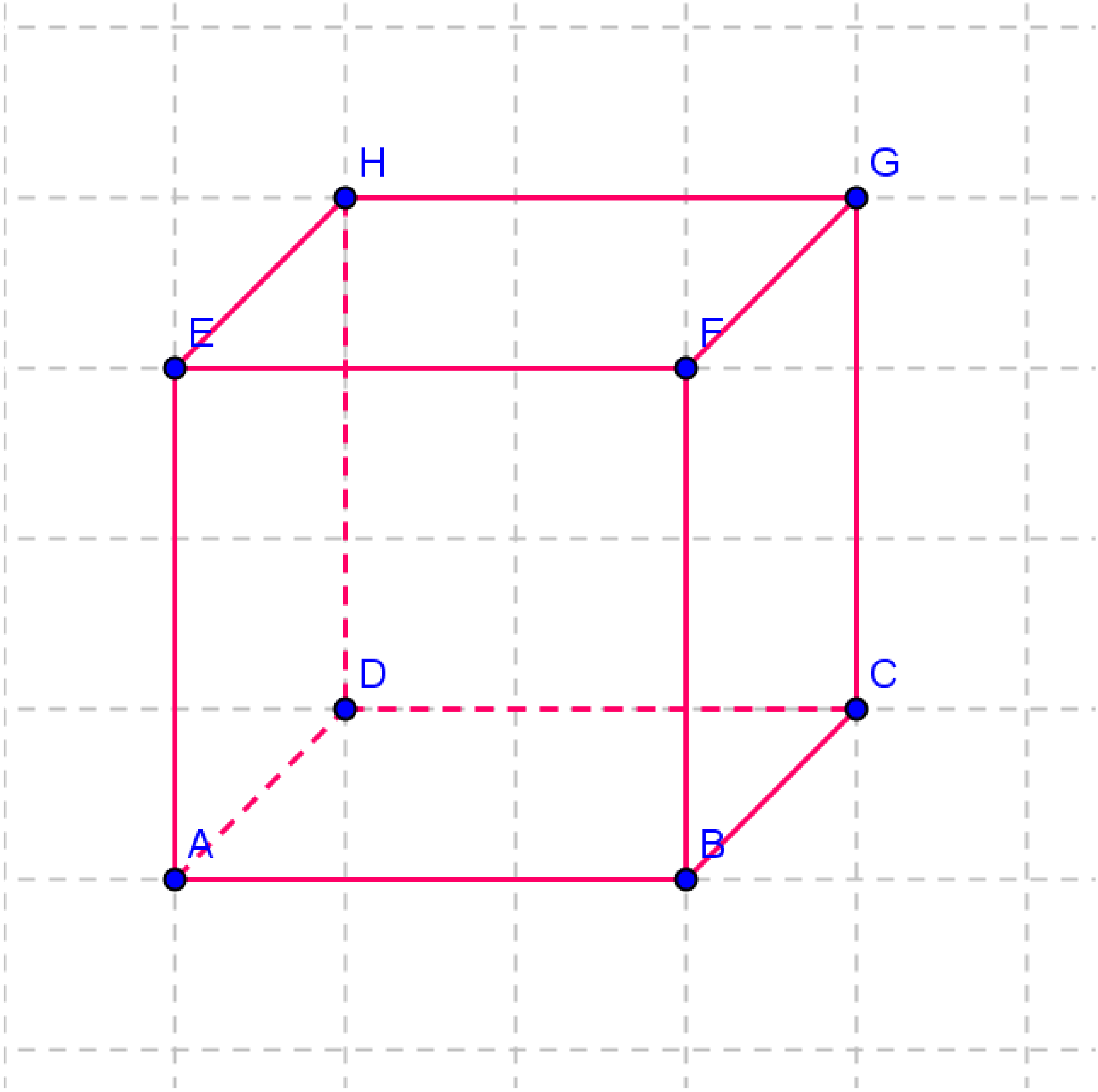
2) $\vec{AB}\cdot\vec{DH} = \vec{AB}\cdot\vec{AE} = 0$ (vecteurs orthogonaux)

3) $\vec{AB}\cdot\vec{DG} = \vec{AB}\cdot\vec{AF} = AB^2 = a^2$ (le projeté orthogonal de $\vec{AF}$ sur $\vec{AB}$ est $\vec{AB}$)

4) $\vec{AB}\cdot\vec{EG} = \vec{AB}\cdot\vec{AC} = a^2$

5) $\vec{BD}\cdot\vec{EG} = \vec{BD}\cdot\vec{AC} = 0$

6) $\vec{AB}.\vec{GE} = \vec{AC}\cdot(-\vec{AC}) = -AC^2 = -2a^2$



26 page 335

Même figure que ci-dessus

1) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AH} = \overrightarrow{AB}(\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{EH}) = ... = 0 + 0 = 0$

2) $\overrightarrow{AF}\cdot\overrightarrow{BC} = (\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BF})\cdot\overrightarrow{BC} = ... = 0 + 0 = 0$

3) $\overrightarrow{FA}\cdot\overrightarrow{FC} = (\overrightarrow{FB}+\overrightarrow{BA})\cdot(\overrightarrow{FB}+\overrightarrow{BC}) = FB^2 + \overrightarrow{FB}\cdot\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{FB} + \overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC} = a^2 + 0 + 0 + 0 = a^2$

Remarque: Comme on a aussi $FA.FC = FA \times FC \times \cos \widehat{AFC}$ et que $AF = CF = a\sqrt{2}$, on en déduit:

$\cos \widehat{AFC} = \dfrac{1}{2}$

4) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AG} = \overrightarrow{AB}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CG}) = ... = a^2$

Comme $AG = a\sqrt{3}$ on en déduit: $\cos\widehat{BAG} = \frac{1}{\sqrt{3}}$.

5) $\overrightarrow{FD}\cdot\overrightarrow{FC} = (\overrightarrow{FB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD})\cdot(\overrightarrow{FB}+\overrightarrow{BC}) = ... = FB^2 = a^2$

On en déduit: $\cos\widehat{CFD} = \frac{1}{\sqrt{6}}$.

6) $\overrightarrow{AG}\cdot\overrightarrow{BH} = 0$

---

30 page 335

$\vec{u}(1;-2;5)$, $\vec{v}(0;1;2)$ et $\vec{w}(4;-3;-2)$

1) $\vec{u}\cdot\vec{v}=1\times0+(-2)\times1+5\times2=8$ $\quad\quad$ $\vec{v}\cdot\vec{w}=0\times4+1\times(-3)+2\times(-2)=-7$

2) $\|\vec{u}\|=\sqrt{1^2+(-2)^2+5^2}=\sqrt{30}$ $\quad\quad$ $\|\vec{v}\|=\sqrt{0^2+1^2+2^2}=\sqrt{5}$

3) $\vec{u}\cdot\vec{w}=1\times4-2\times(-3)+5\times(-2)=4+6-10=0$ donc $\vec{u}\perp\vec{w}$

---

31 page 326

$A(1;2;3)$, $B(2;2;5)$ et $C(-1;5;4)$ $\quad\quad$ $\overrightarrow{AB}(1;0;2)$ et $\overrightarrow{AC}(-2;3;1)$

$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=1\times(-2)+0\times3+2\times1=0$ donc ....

L'aire est a(ABC) = $\frac{AB\times AC}{2}$ avec AB = $\sqrt{1^2+0^2+2^2} = \sqrt{5}$ et AC = $\sqrt{(-2)^2+3^2+1^2} = \sqrt{14}$

---

35 page 336

$A(1; 0; 2)$ et $B(-2; 1; 0)$ $\quad\quad$ $M(x; y; z)$

1) $\vec{n}\begin{pmatrix}-1\\2\\3\end{pmatrix}$

Une équation du plan passant par A et de vecteur normal $\vec{n}$ est donné par: $\overrightarrow{AM}\cdot\vec{n} = 0$

On a donc: $-1\times(x-1) + 2(y-0) + 3(z-2) = 0$

soit: $-x + 2y + 3z - 5 = 0$ est une équation du ...

2) Une équation du plan passant par A et orthogonal à (AB) est donnée par: $\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{AB} = 0$

Or, $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-3\\1\\-2\end{pmatrix}$. On a donc: $-3\times(x-1) + 1(y-0) - 2(z-2) = 0$

soit: $-3x + y - 2z + 7 = 0$ est une équation du ...

3) Le plan médiateur de $[AB]$ est le plan orthogonal à (AB) passant par le milieu I de $[AB]$.

Or, $I(-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}; 1)$. On a donc: Une équation du plan médiateur de $[AB]$ est donnée par: $\overrightarrow{IM}\cdot\overrightarrow{AB} = 0$

$-3\times(x+\frac{1}{2}) + 1(y-\frac{1}{2}) - 2(z-1) = 0$

soit: $-3x + y - 2z = 0$ est une équation du ...

---

40 page 336

A(1;-2;3), B(0;1;1), C(2;1;0)

$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-1\\3\\-2\end{pmatrix}$ $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}1\\3\\-3\end{pmatrix}$ vecteurs non colinéaires ....

On cherche $\vec{n}\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$ tel que $\begin{cases}-a+3b-2c=0\\ a+3b-3c=0\end{cases}$ Posons $b=1$, on a: $-a-2c=-3$ et $a-3c=-3$, d'où, $5c=6$

$\vec{n}\begin{pmatrix}\frac{3}{5}\\1\\\frac{6}{5}\end{pmatrix}$ ou $5\vec{n}\begin{pmatrix}3\\5\\6\end{pmatrix}$ sont orthogonaux au plan (ABC).

Équation de (ABC): $\overrightarrow{AM}\perp 5\vec{n}$ donne $3(x-1)+5(y+2)+6(z-3)=0$

$3x+5y+6z-11=0$ est une équation de (ABC)

Avec plans médiateurs:

P_1 : plan médiateur de [AB].

$I\left(\frac{1}{2};-\frac{1}{2};2\right)$ $\overrightarrow{IM}\perp\overrightarrow{AB}$ donne $(-1)\left(x-\frac{1}{2}\right)+3\left(y+\frac{1}{2}\right)+(-2)(z-2)=0$

Équation de $P_1: 2x-6y+4z-12=0$

P_2 : plan médiateur de [AC].

$J\left(\frac{3}{2};-\frac{1}{2};\frac{3}{2}\right)$ $\overrightarrow{JM}\perp\overrightarrow{AC}$ donne $\left(x-\frac{3}{2}\right)+3\left(y+\frac{1}{2}\right)+(-3)\left(z-\frac{3}{2}\right)=0$

Équation de $P_2: 2x+6y-6z+9=0$

$\Delta=P_1\cap P_2$ $\begin{cases}2x-6y+4z-8=0\\2x+6y-6z+9=0\end{cases}$ donne $12y-10z+21=0$

Posons $z=t$, *d'où*, $y=\frac{5}{6}t-\frac{17}{12}$ et $x=\frac{1}{2}t-\frac{1}{4}$

Δ $\begin{cases}x=\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\\ y=\frac{5}{6}t-\frac{17}{12}\\ z=t\end{cases}$ Un vecteur directeur de Δ $\vec{u}\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\\frac{5}{6}\\1\end{pmatrix}$ $6\vec{u}=5\vec{n}$

---

65 page 338

A et *B* sont deux points du plan tels que *AB* = 6, *I* est le milieu de [*AB*] et *k* un réel.

1) Pour tout point *M* on a: $\overrightarrow{MA} = \overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA}$ et $\overrightarrow{MB} = \overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IB}$.

Or, I est le milieu de $[AB]$, d'où, $\overrightarrow{IB} = -\overrightarrow{IA}$.

Par conséquent: $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB} = (\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IA})\ (\overrightarrow{MI}-\overrightarrow{IA}) = \overrightarrow{MI}^2 - \overrightarrow{IA}^2$

Rappel:

Pour tout vecteur $\vec{u}$, le carré scalaire de, $\vec{u}\cdot\vec{u} = \vec{u}^2 = \|\vec{u}\|^2$

d'où, $\overrightarrow{MI}^2 = MI^2$ et $\overrightarrow{IA}^2 = IA^2$

Conclusion: $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB} = MI^2 - IA^2$

2) L'égalité $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB} = k$ **équivaut à l'**égalité $MI^2 - IA^2 = k$

Comme $IA^2 = \dfrac{AB^2}{4} = \dfrac{36}{4} = 9$

L'ensemble $\mathcal{E}$ des points M du plan tels que $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB} = k$ est

l'ensemble $\mathcal{E}$ des points M du plan tels que $MI^2 = k + 9$

3 cas à étudier:

***k* < – 9**

$k + 9 < 0$, il n'existe aucun point M vérifiant cette égalité.

L'ensemble $\mathcal{E}$ est l'ensemble vide. $\mathcal{E} = \emptyset$.

***k* = – 9**

$k + 9 = 0$, $MI^2 = 0$, il existe un et un seul point M vérifiant cette égalité, le point I. $\mathcal{E} = \{I\}$

***k* > –9**

$k + 9 > 0$, $MI^2 = k + 9$ équivaut à $MI = \sqrt{k+9}$ (équivalence due au fait que MI est nécessairement positif)

L'ensemble des points à la distance $\sqrt{k+9}$ de I est le cercle de centre I et de rayon $\sqrt{k+9}$.

$\mathcal{E} = \mathcal{C}(I, \sqrt{k+9})$

Compléments:

Dans l'espace, il suffit de remplacer cercle par sphère.

---

66 page 338

ABC triangle et M un point quelconque.

1) $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{MB}\cdot\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{MC}\cdot\overrightarrow{AB} = ?$

Une méthode:

On sait pour tout point M, $\overrightarrow{MB} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{MC} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AC}$. (Chasles)

On sait: $\vec{u}\,.(\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u}\cdot\vec{v} + \vec{u}\cdot\vec{w}$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{MB}\cdot\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{MC}\cdot\overrightarrow{AB} &= \overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{BC} + (\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{AB})\cdot\overrightarrow{CA} + (\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{AC})\cdot\overrightarrow{AB}\\ &= \overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AB}\\ &= \overrightarrow{MA}\cdot(\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AB}) + \overrightarrow{AB}\cdot(\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AC})\\ &= \overrightarrow{MA}\cdot\vec{0} + \overrightarrow{AB}\cdot\vec{0} = 0\end{aligned}$$

Une autre méthode:

Principe: On montre que le nombre réel $f(M) = \overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{MB}\cdot\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{MC}\cdot\overrightarrow{AB}$ est indépendant du choix du point M, puis, on calcule ce nombre en prenant un point particulier (par exemple, le point A).

Pour cela, on évalue donc $f(M) - f(N)$

Soit N un autre point du plan,

$$\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{MB}\cdot\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{MC}\cdot\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{NA}\cdot\overrightarrow{BC} - \overrightarrow{NB}\cdot\overrightarrow{CA} - \overrightarrow{NC}\cdot\overrightarrow{AB} =$$

$$(\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{NA})\cdot\overrightarrow{BC} + (\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{NB})\cdot\overrightarrow{CA} + (\overrightarrow{MC}-\overrightarrow{NC})\cdot\overrightarrow{AB} =$$

$$\overrightarrow{MN}\cdot\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{MN}\cdot\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{MN}\cdot\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{MN}\cdot(\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AB}) =$$

$$\overrightarrow{MN}\cdot\vec{0} = 0$$

On a montré: $f(M) = f(N)$

Le nombre $f(M)$ est donc constant.

Évaluons $f(A)$.
$f(A) = \overrightarrow{AA}\cdot\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AB} = \ldots. = 0$

Orthocentre:
Il s'agit de montrer que le point d'intersection de deux hauteurs de ABC est un point de la troisième hauteur.
On se donne H point d'intersection des deux hauteurs issues respectivement de A et de B.
On a donc $\overrightarrow{HA}\cdot\overrightarrow{BC} = 0$ et $\overrightarrow{HB}\cdot\overrightarrow{CA} = 0$.
Comme $\overrightarrow{HA}\cdot\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{HB}\cdot\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{HC}\cdot\overrightarrow{AB} = 0$, on en déduit: $\overrightarrow{HC}\cdot\overrightarrow{AB} = 0$
La droite (CH) est donc perpendiculaire à (AB) ce qui prouve que la droite (CH) est la hauteur issue de C dans le triangle ABC.

2- Soit Ω le cercle du centre circonscrit à ABC et H le point défini par $\overrightarrow{\Omega H} = \overrightarrow{\Omega A} + \overrightarrow{\Omega B} + \overrightarrow{\Omega C}$.
Appelons A' le milieu de $[BC]$.
Évaluons $\overrightarrow{AH}\cdot\overrightarrow{BC}$.
On a: $\overrightarrow{AH}\cdot\overrightarrow{BC} = (\overrightarrow{A\Omega}+\overrightarrow{\Omega H})\cdot\overrightarrow{BC} = (\overrightarrow{A\Omega}+\overrightarrow{\Omega A}+\overrightarrow{\Omega B}+\overrightarrow{\Omega C})\cdot\overrightarrow{BC} = (\overrightarrow{\Omega B}+\overrightarrow{\Omega C})\cdot\overrightarrow{BC}$.
Or, $\overrightarrow{\Omega B} + \overrightarrow{\Omega C} = 2\ \overrightarrow{\Omega A'}$ (propriété barycentrique du milieu / règle du parallélogramme)
$\overrightarrow{AH}\cdot\overrightarrow{BC} = 2\ \overrightarrow{\Omega A'}\cdot\overrightarrow{BC} = 0$
puisque la droite $(\Omega A')$ est la médiatrice de $[BC]$
La droite (AH) étant perpendiculaire à (BC) est une hauteur de ABC.
Les démarches sont identiques avec les autres sommets.

---

68 page 338

1) **R.O.C**. **Important:** on se place dans un repère orthonormal

Soit u, v,w, x_0, y_0 des nombres réels tels que $u^2 + v^2 \neq 0$

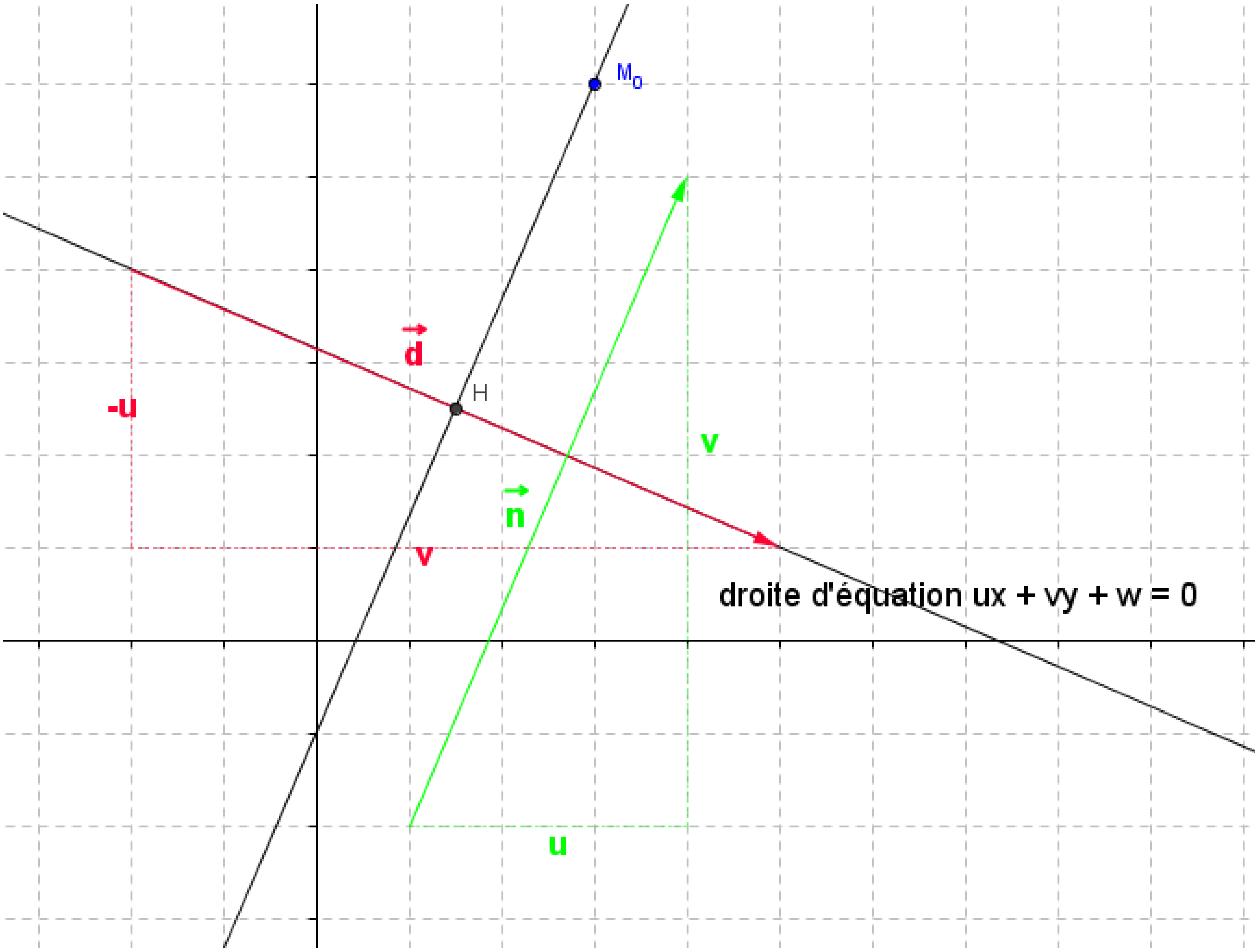
(**Remarque:** cette condition $u^2 + v^2 \neq 0$ est équivalente à $(u, v) \neq (0,0)$)

Recherche d'une formule donnant la distance du point M_0 de coordonnées (x_0, y_0) à la droite (d) d'équation:

$ux + vy + w = 0$

Une méthode:

Soit H le projeté orthogonal de M_0 sur la droite (d).



La distance de M_0 à (d) est la longueur à M_0H

C'est aussi la distance la plus courte du point M_0 à un point de (d).

Soit $\vec{n}\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$ un vecteur normal de (d).

Comme $\overrightarrow{M_0H}$ et $\vec{n}$ sont colinéaires, on a: $\left|\overrightarrow{M_0H}.\vec{n}\right| = M_0H.\ \|\vec{n}\|$ (1)

Il suffit donc d'exprimer le produit scalaire $\overrightarrow{M_0H}\cdot\vec{n}$ à l'aide de l'expression analytique et de remarquer que H est un point de (d).

$\overrightarrow{M_0H}\begin{pmatrix} x_H - x_0 \\ y_H - y_0 \end{pmatrix}$ et $\vec{n}\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$, d'où, $\overrightarrow{M_0H}\cdot\vec{n} = u(x_H - x_0) + v(y_H - y_0) = ux_H - ux_0 + vy_H - vy_0$

Or, $ux_H + vy_H = -w$, d'où, $\overrightarrow{M_0H}\cdot\vec{n} = -ux_0 - vy_0 - w$ et, $\left|\overrightarrow{M_0H}.\vec{n}\right| = \left|ux_0 + vy_0 + w\right|$ (2)

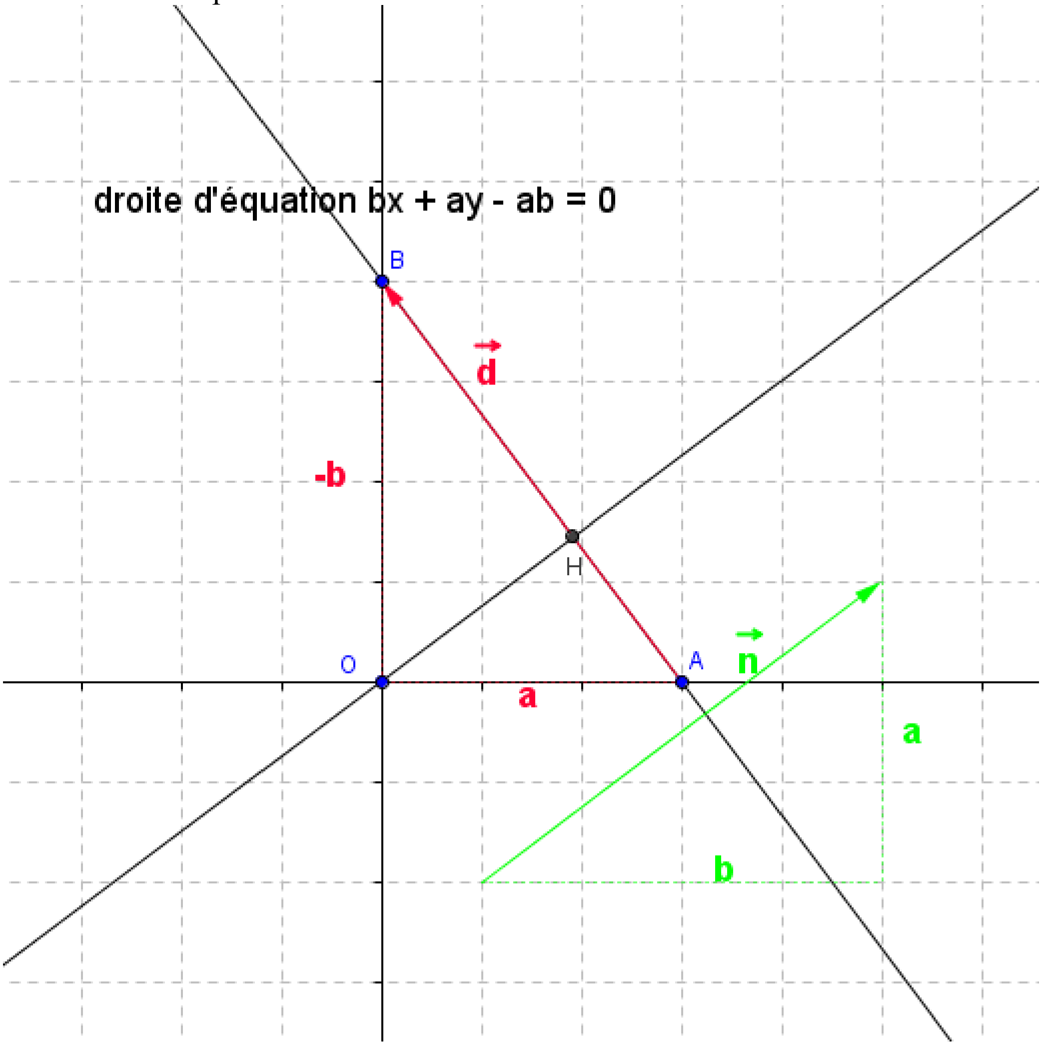
D'autre part: $\|\vec{n}\| = \sqrt{u^2+v^2}$ (3)

Par comparaison de (1) et (2), puis en divisant par $\sqrt{u^2+v^2}$ (non nul), on obtient:

$$M_0H = \frac{\left|ux_0 + vy_0 + w\right|}{\sqrt{u^2+v^2}}$$

2) Étude d'un cas particulier:

a et *b* sont des réels strictement positifs.



$A(a, 0)$ et $B(0,b)$.
Une équation de la droite (AB) est:
$M(x; y) \in (AB)$ si et seulement si $\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont colinéaires.
Or, $\overrightarrow{AM}\begin{pmatrix} x-a \\ y \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} -a \\ b \end{pmatrix}$, d'où, (relation de colinéarité ou expression de la proportionnalité des coordonnées):
$\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont colinéaires si et seulement si $b(x-a) - (-ay) = 0$, soit: $bx + ay - ab = 0$
On peut aussi remarquer que l'ordonnée à l'origine vaut b et que le coefficient directeur est: $\dfrac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \dfrac{b}{-a}$,
d'où, une équation réduite de la droite (AB) est: $y = -\dfrac{b}{a}x + b$, soit: $bx + ay - ab = 0$

En appliquant la formule étable au 1), on a: $d(O, (AB)) = \dfrac{|b\times 0 + a\times 0 - ab|}{\sqrt{a^2+b^2}} = \dfrac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}}$ car, $ab > 0$.

On peut évidemment appliquer les théorèmes classiques dans les triangles rectangles et calculer la hauteur OH dans le triangle rectangle OAB.
$\sin \widehat{OAB} = \dfrac{OH}{OA} = \dfrac{OB}{AB}$, d'où, $OH = \dfrac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}}$

76 page 339

Dans un tétraèdre régulier, toutes les faces sont des triangles équilatéraux (toutes les arêtes sont de même longueur).

ABCD étant un tétraèdre régulier, on a:

$AC = AD$, d'où, A est un point du plan médiateur $\mathscr{P}$ de $[CD]$

et $BC = BD$, d'où, B est un point du plan médiateur $\mathscr{P}$ de $[CD]$.

Le plan $\mathscr{P}$ est orthogonal à $[CD]$ en son milieu.

La droite (CD) est donc orthogonale à $\mathscr{P}$ et par conséquent à toute droite de $\mathscr{P}$, en particulier la droite (AB).

La même démarche montre que les arêtes $[AC]$ et $[BD]$ sont orthogonales, ainsi que les arêtes $[AD]$ et $[BC]$

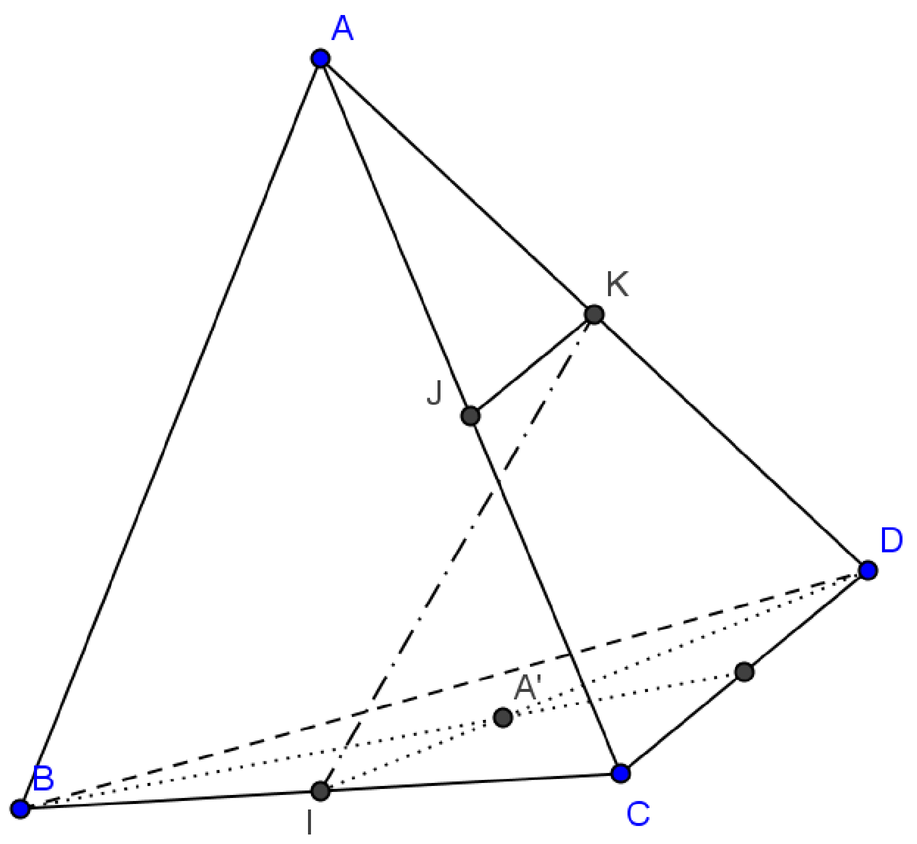
---

77 page 339

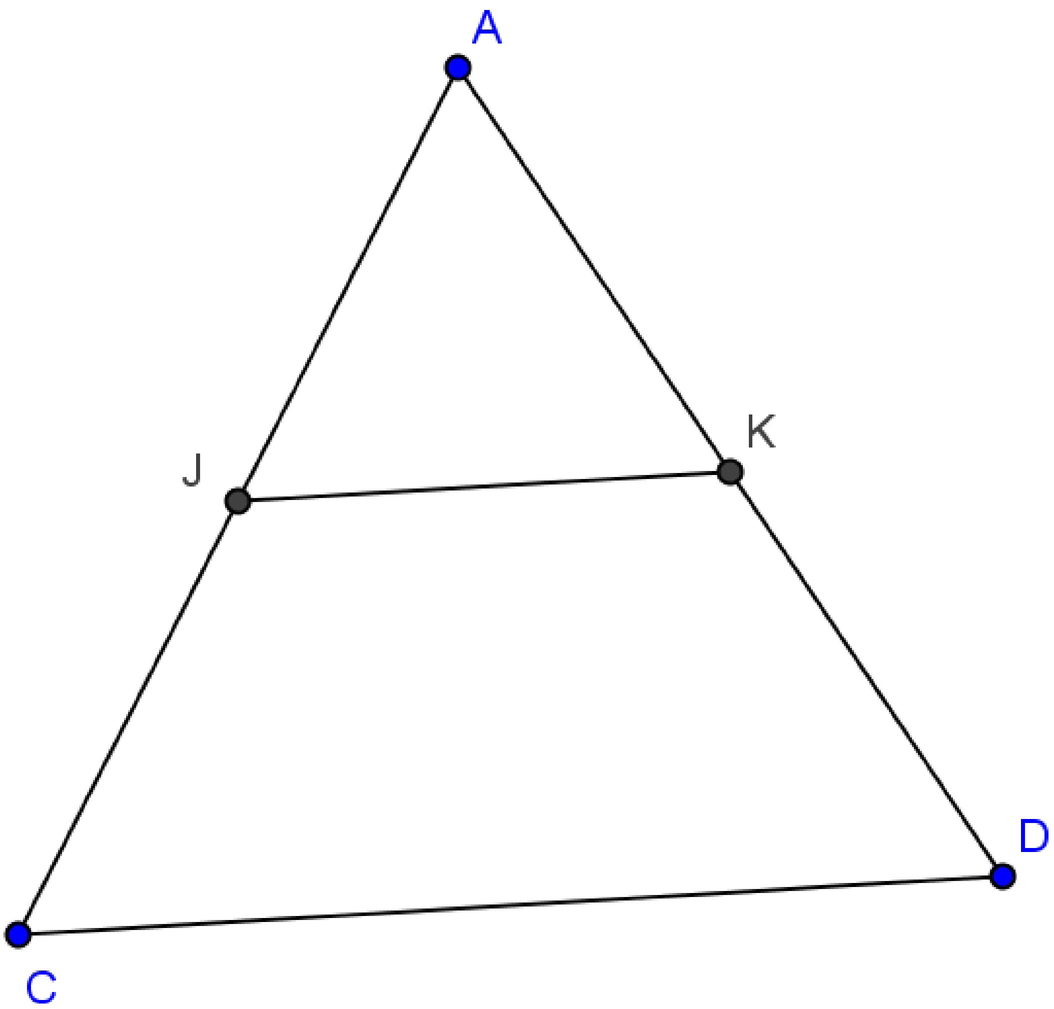
ABCD est un tétraèdre régulier d'arête a,

I, J, K sont les milieux respectifs de $[BC]$, $[AC]$, $[AD]$.

A' est le centre de gravité du triangle *BCD*.



1) Dans la face *ACD* (triangle équilatéral)



Le projeté orthogonal de *C* sur (*AD*) est *K*, (la médiane est aussi la hauteur dans un triangle équilatéral), d'où,

$\overrightarrow{CD}\cdot\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{KD}\cdot\overrightarrow{AD} = \frac{1}{2}\ \overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AD} = \frac{1}{2}\ a^2.$

2) Comme *J* et *K* sont les milieux de [*AC*] et [*AD*], on a d'après la propriété de Thalès, $\overrightarrow{JK} = \frac{1}{2}\ \overrightarrow{CD}$, d'où,

$\overrightarrow{JK}\cdot\overrightarrow{AD} = \frac{1}{2}\ \overrightarrow{CD}\cdot\overrightarrow{AD} = \frac{1}{4}\ a^2.$

IA = *ID* car les triangles équilatéraux *ABC* et *DBC* sont isométriques (leurs médianes sont donc de même longueur).

I est par conséquent un point de la médiatrice de [*AD*] et comme *K* ést le milieu de [*AD*], il vient: (*IK*) $\perp$ (*AD*).

On obtient: $\overrightarrow{IK}\cdot\overrightarrow{AD} = 0$

Interprétation du résultat:

$\overrightarrow{IK}\cdot\overrightarrow{AD} = 0$ et $K \in (AD)$, donc, K est le projeté orthogonal de I sur (AD).

La même démarche montre que $\overrightarrow{IK}\cdot\overrightarrow{BC} = 0$, d'où, (IK) et (BC) sont orthogonales.

Le segment $[IK]$ est perpendiculaire aux deux droites (AD) et (BC). Sa longueur donne la distance entre les deux droites (distance minimale de tous les segments reliant ces deux droites).

3) Pour démontrer que (AA') est orthogonale au plan (BCD), il suffit de démontrer que (AA') est orthogonale à deux droites sécantes du plan.

On peut choisir (BC) et (DI). (D'autres choix sont possibles)

On a: $\overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DA'} = \overrightarrow{AD} + \frac{2}{3}\overrightarrow{DI}$ (propriété du centre de gravité)

d'où, $\overrightarrow{AA'}\cdot\overrightarrow{BC} = (\overrightarrow{AD} + \frac{2}{3}\overrightarrow{DI}).\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{BC} + \frac{2}{3}\overrightarrow{DI}\cdot\overrightarrow{BC} = 0 + 0 = 0$

$\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{BC} = 0$ (voir exercice précédent), $\overrightarrow{DI}\cdot\overrightarrow{BC} = 0$ (médiane dans un triangle équilatéral ....)

$\overrightarrow{AA'}\cdot\overrightarrow{ID} = (\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DA'}).\overrightarrow{ID} = \overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{ID} + \frac{2}{3}\overrightarrow{DI}\cdot\overrightarrow{ID}$

Or, $\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{ID} = \overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{KD} = \frac{1}{2}a^2$. ($K$ est le projeté orthogonal de I sur (AD) d'après 2))

La longueur de la médiane dans un triangle équilatéral est égale à $\frac{\sqrt{3}}{2}a$, d'où, $\overrightarrow{DI}\cdot\overrightarrow{ID} = -\left(\frac{\sqrt{3}}{2}a\right)^2 = -\frac{3}{4}a^2$.

Finalement: $\overrightarrow{AA'}\cdot\overrightarrow{ID} = \frac{1}{2}a^2 + \frac{2}{3}(-\frac{3}{4}a^2) = 0$

On a montré: $\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{BC} = 0$ et $\overrightarrow{AA'}\cdot\overrightarrow{ID} = 0$, ce qui prouve que la droite (AA') est orthogonale aux droites (BC) et (ID) du plan (BCD)

---

80 page 339

ABCD est un tétraèdre, I et J sont les milieux respectifs de $[AB]$ et $[CD]$, et, G est l'isobarycentre de A, B, C, D.

L'objectif est de montrer l'équivalence :

Avant de commencer, avoir sous la main la situation géométrique :

I milieu de $[AB]$, donc, ..., notamment : $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} = 2\overrightarrow{GI}$

J milieu de $[CD]$, donc, ...

G isobarycentre de A, B, C, D, donc ..., notamment, par associativité, G est le milieu de $[IJ]$

Une démonstration :

" $GA = GB$ " équivaut à " La droite (IJ) est orthogonale à la droite (AB) "

" $GA = GB$ " équivaut à " $GA^2 = GB^2$ " (L'équivalence a lieu car les longueurs GA et GB sont des réels

positifs).

Important : x et y étant des réels, " $x = y$ " implique " $x^2 = y^2$ " (l'équivalence est fausse

" $GA = GB$ " équivaut à " $GA^2 - GB^2 = 0$ " Or, $GA^2 = \overrightarrow{GA}^2$ et $GB^2 = \overrightarrow{GB}^2$, d'où,

" $GA = GB$ " équivaut à " $\overrightarrow{GA}^2 - \overrightarrow{GB}^2 = 0$ "

" $GA = GB$ " équivaut à "$(\overrightarrow{GA} - \overrightarrow{GB})(\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB}) = 0$ " Or, $\overrightarrow{GA} - \overrightarrow{GB} = \overrightarrow{BA}$ et $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} = 2\,\overrightarrow{GI}$

" $GA = GB$ " équivaut à " $2\,\overrightarrow{BA} . \overrightarrow{GI} = 0$ "

Comme $\overrightarrow{BA} . \overrightarrow{GI} = 0$ équivaut à $\overrightarrow{BA}$ et $\overrightarrow{GI}$ sont orthogonaux, et, comme G isobarycentre de A, B, C, D est le milieu de $[IJ]$,

la droite (IJ) de vecteur directeur $\overrightarrow{GI}$ est orthogonale à la droite (AB) de vecteur directeur $\overrightarrow{AB}$.

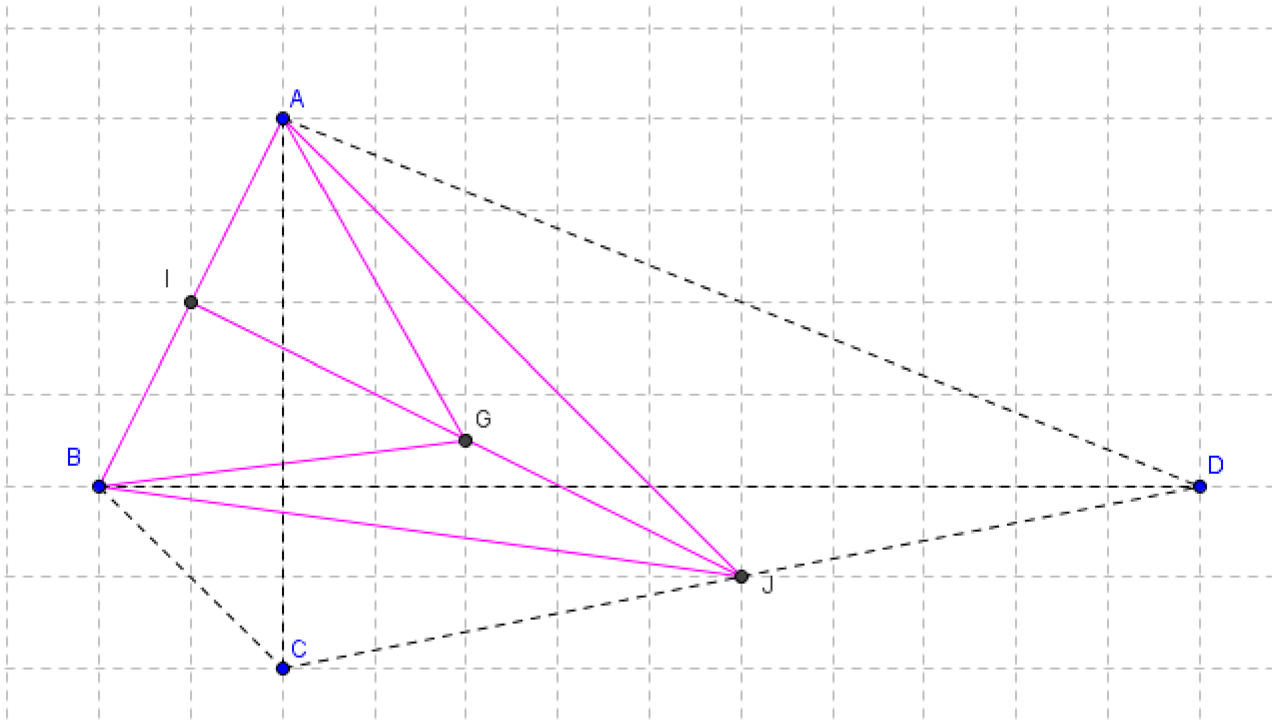
La réciproque est vraie,

la droite (IJ) de vecteur directeur $\overrightarrow{GI}$ est orthogonale à la droite (AB) de vecteur directeur $\overrightarrow{AB}$ si et seulement si $\overrightarrow{BA} . \overrightarrow{GI} = 0$

Commentaire :

Dans le plan (ABJ), on a : G$A = GB$ et $IA = IB$, d'où, la droite (GI) est la médiatrice de $[AB]$ dans ce plan.

Le plan ABJ est vue de face (coupe du tétraèdre)



81 page 339

A, B, C, D quatre points de l'espace:

1) $AC^2 + BD^2 = AD^2 + BC^2 \Leftrightarrow AC^2 - BC^2 = AD^2 - BD^2 \Leftrightarrow (\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{BC})(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BC}) = (\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{BD})(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BD})$

$AC^2 + BD^2 = AD^2 + BC^2 \Leftrightarrow (\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{BC})(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BC}) = (\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{BD})(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BD})$

$AC^2 + BD^2 = AD^2 + BC^2 \Leftrightarrow \overrightarrow{AB} \cdot (\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BC}) = \overrightarrow{AB} \cdot (\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BD})$

$AC^2 + BD^2 = AD^2 + BC^2 \Leftrightarrow \overrightarrow{AB}\cdot(\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BC}) - \overrightarrow{AB}\cdot(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BD}) = 0$

$AC^2 + BD^2 = AD^2 + BC^2 \Leftrightarrow \overrightarrow{AB}(\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{BD}) = 0$

$AC^2 + BD^2 = AD^2 + BC^2 \Leftrightarrow \overrightarrow{AB}\cdot(2\overrightarrow{DC}) = 0$

$AC^2 + BD^2 = AD^2 + BC^2 \Leftrightarrow$ (AB) et (CD) sont orthogonales.

2) $ABCD$ tétraèdre telle que (AB) est orthogonale à (CD), d'où, $AC^2 + BD^2 = AD^2 + BC^2$ d'après 1)

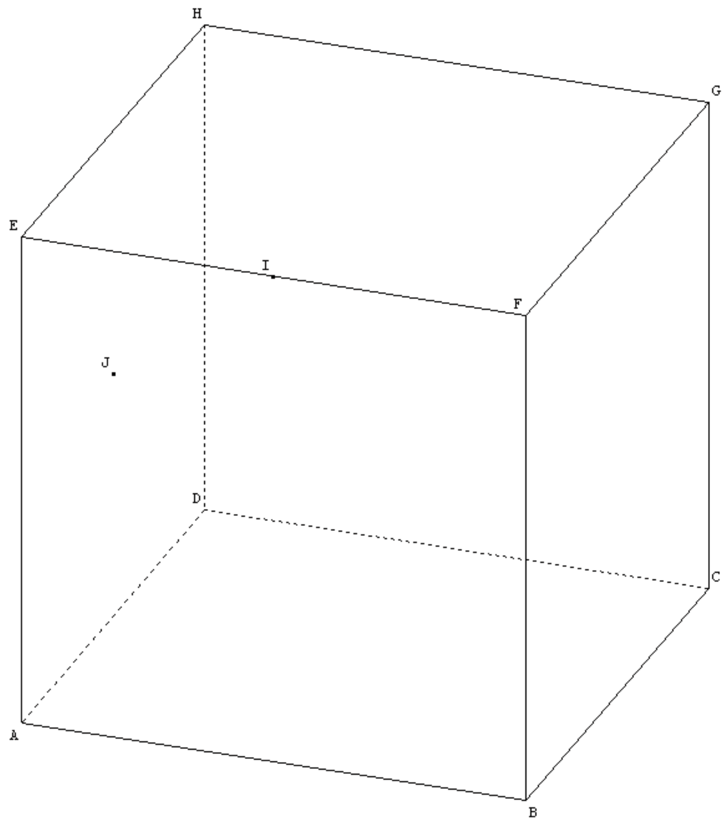
$ABCD$ tétraèdre telle que (BC) est orthogonale à (AD), d'où, $AB^2 + CD^2 = BD^2 + AC^2$ d'après 1)

En comparant les deux égalités, il vient: $AB^2 + CD^2 = AD^2 + BC^2$

Ce qui prouve d'après l'équivalence du 1) que les droites (BD) et (AC) sont orthogonales.

---

89 page 340



Dans le repère orthonormal $(D;\ \overrightarrow{DA}, \overrightarrow{DC}, \overrightarrow{DH})$

Point	Coordonnées	Preuve
D	(0; 0; 0)	origine du repère
A	(1; 0; 0)	$\overrightarrow{DA}$ vecteur de base: abscisse
C	(0; 1; 0)	$\overrightarrow{DC}$ vecteur de base: ordonnée
H	(0; 0; 1)	$\overrightarrow{DH}$ vecteur de base: cote

B	(1; 1; 0)	$\overrightarrow{DB} = \overrightarrow{DA}+\overrightarrow{DC}$
E	(1; 0; 1)	$\overrightarrow{DE} = \overrightarrow{DA}+\overrightarrow{DH}$
G	(0; 1; 1)	$\overrightarrow{DG} = \overrightarrow{DC}+\overrightarrow{DH}$
F	(1; 1; 1)	$\overrightarrow{DF} = \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{DH}$
I	$(1; \frac{1}{2}; 1)$	I milieu de $[EF]$
J	$(\frac{1}{2}; 0; \frac{1}{2})$	J milieu de $[AH]$

1a) Une équation du plan (AIB) est $x = 1$

Méthodes:

* on remarque que les trois points non alignés ont la même abscisse 1.

** Le vecteur $\overrightarrow{\mathrm{AD}}$ est un vecteur normal de ce plan (par construction du cube).

On a donc: $M(x; y; z) \in (AIB)$ si et seulement si $\overrightarrow{\mathrm{AM}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AD}} = 0$ si et seulement si $(x-1)\times 1 + y\times 0 + z\times 0 = 0$ ...

La distance de G au plan (AIB) est égale à $h = 1$ (c'est la distance du segment perpendiculaire issu de G abaissé sur le plan (AIB), soit: GF.

b) L'aire du triangle AIB est égale à $\mathscr{B} = \frac{1}{2}$.

c) Le volume du tétraèdre $GAIB$ est égale $\mathscr{V} = \frac{1}{3}\times\mathscr{B}\times h = \frac{1}{6}$.

2 a) **Une méthode: (en décomposant en somme de vecteurs)**

Pour démonter que (BJ) est orthogonale au plan (AIG), on peut montrer :

$\overrightarrow{BJ}\cdot\overrightarrow{AI} = 0$ et $\overrightarrow{BJ}\cdot\overrightarrow{IG} = 0$ (ou $\overrightarrow{BJ}\cdot\overrightarrow{AG} = 0$)

Calcul de $\overrightarrow{BJ}\cdot\overrightarrow{AI} = (\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AJ})(\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{EI}) = \overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{AE} + \overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{EI} + \overrightarrow{AJ}\cdot\overrightarrow{AE} + \overrightarrow{AJ}\cdot\overrightarrow{EI}$

En remarquant que (BA) et (AE) sont orthogonales, que $\overrightarrow{EI} = \frac{1}{2}\overrightarrow{EF} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$, que $\overrightarrow{AJ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AH}$

on a: $\overrightarrow{BJ}\cdot\overrightarrow{AI} = 0 - \frac{1}{2}AB^2 + \frac{1}{2}\overrightarrow{AH}\cdot\overrightarrow{AE} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AH}\cdot\overrightarrow{EI}$

Or, le projeté orthogonal de H sur (AE) est E et la droite (EI) est orthogonale au plan (ADH), donc à la droite (AH).

D'autre part, l'unité étant donné par la longueur d'une arête du cube, $\overrightarrow{BJ}\cdot\overrightarrow{AI} = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2} + 0 = 0$.

Une méthode analogue en décomposant $\overrightarrow{BJ}\cdot\overrightarrow{IG} = (\overrightarrow{BE}+\overrightarrow{EJ})(\overrightarrow{IF}+\overrightarrow{FG}) = ...$

Une autre méthode (avec les coordonnées)

Pour démonter que (BJ) est orthogonale au plan (AIG), on peut montrer :

$\overrightarrow{BJ}\cdot\overrightarrow{AI} = 0$ et $\overrightarrow{BJ}\cdot\overrightarrow{IG} = 0$ (ou $\overrightarrow{BJ}\cdot\overrightarrow{AG} = 0$)

$\overrightarrow{BJ}\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}\\-1\\\frac{1}{2}\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{AI}\begin{pmatrix}0\\\frac{1}{2}\\1\end{pmatrix}$ et $-\frac{1}{2}\times 0+(-1)\times\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\times 1=0$

$\overrightarrow{BJ}\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}\\-1\\\frac{1}{2}\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{IG}\begin{pmatrix}-1\\\frac{1}{2}\\0\end{pmatrix}$ et $-\frac{1}{2}\times(-1)+(-1)\times\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\times 0=0$

....

Un point $M(x; y; z) \in (AIG)$ si et seulement si $\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{BJ}=0$

$(x-1)\times(-\frac{1}{2})+y\times(-1)+z\times\frac{1}{2}=0$ donne une équation du plan (AIG).

En réorganisant: $x+2y-z-1=0$ est une équation du plan (AIG).

b) La distance de B à (AIG) est $d=\frac{|x_B+2.y_B-z_B-1|}{\sqrt{1^2+2^2+(-1)^2}}=\frac{2}{\sqrt{6}}$.

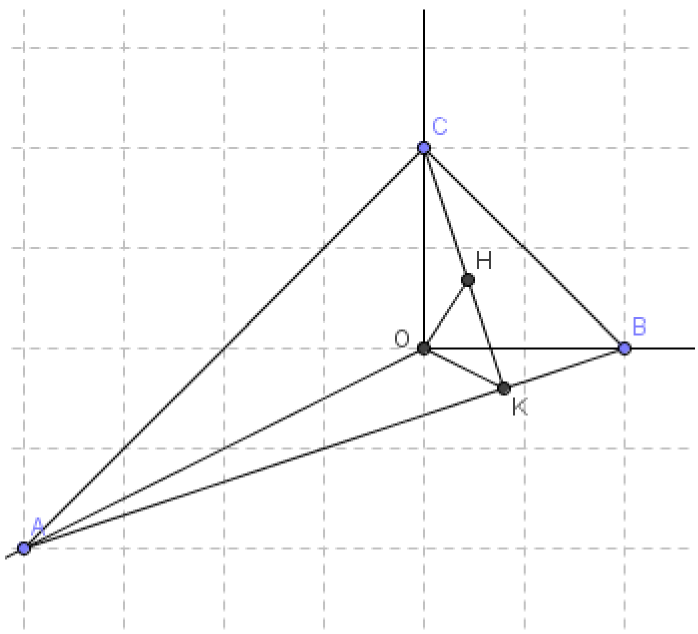
3) $\mathcal{V}=\frac{1}{3}\times\text{Aire}(AIG)\times d$

Comme $d=\frac{2}{\sqrt{6}}$ et $\mathcal{V}=\frac{1}{6}$, aire $(AIG)=\frac{3\times\sqrt{6}}{2\times 6}=\frac{\sqrt{6}}{4}$.

---

91 page 340

$A(2; 0; 0)$, $B(0; 1; 0)$ et $C(0; 0; 1)$ et $H(\frac{2}{9}; \frac{4}{9}; \frac{4}{9})$



1) La distance de O au plan (ABC).

Recherche d'une équation du plan (ABC)

$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-2\\1\\0\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}-2\\0\\1\end{pmatrix}$ ne sont pas colinéaires et un vecteur normal à (ABC) a ses coordonnées qui vérifient le système: $\begin{cases}-2\alpha+\beta=0\\-2\alpha+\gamma=0\end{cases}$, d'où, un vecteur normal $\vec{n}\begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix}$.

$M(x; y; z) \in (ABC)$ si et seulement si $\overrightarrow{AM}\cdot\vec{n} = 0$ si et seulement si $1.(x-2) + 2.(y-0) + 2.(z-0) = 0$

Une équation de (ABC) est: $x + 2y + 2z - 2 = 0$

La distance $d(O; (ABC)) = \dfrac{|0+2\times 0+2\times 0-2|}{\sqrt{1^2+2^2+2^2}} = \dfrac{2}{\sqrt{9}} = \dfrac{2}{3}$

2) $H \in (ABC)$ car, $\dfrac{2}{9} + 2\times\dfrac{4}{9} + 2\times\dfrac{4}{9} - 2 = \dfrac{18}{9} - 2 = 0$ (1)

$\overrightarrow{OH} = \dfrac{2}{9}\vec{n}$, donc, ($OH$) est perpendiculaire à (ABC). (2)

Ces deux affirmations (1) et (2) permettent de conclure:

H est le projeté orthogonal de O sur (ABC).

Remarque:

On a aussi: $OH = \sqrt{\left(\dfrac{2}{9}\right)^2+\left(\dfrac{4}{9}\right)^2+\left(\dfrac{4}{9}\right)^2} = \ldots = \dfrac{2}{3}$

3a) La droite (OH) étant perpendiculaire au plan (ABC) est orthogonale à toute droite de ce plan, en particulier à (AB). Par conséquent: $(AB) \perp (OH)$ (i)

D'autre part, $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{OC} = -2\times 0 + 1\times 0 + 0\times 1 = 0$, d'où, $\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{OC}$, soit $(AB) \perp (OC)$ (ii)

(OH) et (OC) sont sécantes en O (iii)

D'après (i), (ii), (iii), la droite (AB) est orthogonale au plan (OCH).

b) (AB) est donc orthogonale à toute droite du plan (OCH) en particulier à (CH).

Or, H est un point du plan (ABC), donc, les droites (CH) et (AB) sont coplanaires.

Dans le plan (ABC), la droite (CH) coupe la droite (AB) perpendiculairement en un point K.

Comme $K \in (CH)$, K est point du plan (OCH) et (AB) étant orthogonale à toute droite de (OCH) est orthogonale à (OK).

La droite (OK) coupe la droite (AB) perpendiculairement en un point K.

Compléments:

Le projeté orthogonal K de O sur (AB) est le point d'intersection de la perpendiculaire à (AB) passant par O.

On cherche donc K tel que $\overrightarrow{OK} \perp \overrightarrow{AB}$ et $K \in (AB)$.

On obtient le système: $\begin{cases} x_K\times(-2)+y_K\times 1+z_K\times 0=0 \\ x_K-x_A=-2\times t \\ y_K-y_A=1\times t \\ z_K-z_A=0\times t \end{cases}$ où t est un réel.

On a donc: $-2(-2t+2)+t=0$, soit, $t=\dfrac{4}{5}$. $K(\dfrac{2}{5}\ ;\ \dfrac{4}{5}\ ;0)$

Le projeté orthogonal K' de C sur (AB) est le point d'intersection de la perpendiculaire à (AB) passant par C.

On cherche donc K' tel que $\overrightarrow{CK'} \perp \overrightarrow{AB}$ et $K' \in (AB)$.

$\begin{cases} (x_K'-x_C)\times(-2)+(y_K'-y_C)\times 1+(z_K'-z_C)\times 0=0 \\ x_K'-x_A=-2\times t' \\ y_K'-y_A=1\times t' \\ z_K'-z_A=0\times t' \end{cases}$ où t' est un réel.

$-2\times(-2t'+2)+t'=0$, soit, $t'=\dfrac{4}{5}$. $K'(\dfrac{2}{5};\dfrac{4}{5};0)$

Les points K et K' sont confondus.

4) Angle $\widehat{OCH}$

Dans le triangle OCH rectangle en H, on a: $\cos\widehat{OCH}=\dfrac{CH}{OC}=\sqrt{\left(\dfrac{2}{9}\right)^2+\left(\dfrac{4}{9}\right)^2+\left(-\dfrac{5}{9}\right)^2}=\dfrac{\sqrt{5}}{3}$.

$\widehat{OCH}\approx 41{,}81$ ° par défaut

5) On sait que C, H, K sont alignés. $\widehat{OCH}=\widehat{OCK}$

$\overrightarrow{CK}\cdot\overrightarrow{CO}=CK.CO.\cos\widehat{OCK}$

D'autre part,

$\overrightarrow{OC}$ est orthogonal au plan (Oxy) qui contient la droite (OK).

O est le projeté orthogonal de K sur (CO), d'où, $\overrightarrow{CK}\cdot\overrightarrow{CO}=CO^2$

On en déduit: $CK.CO.\cos\widehat{OCK}=CO^2$, d'où, $CK=\dfrac{CO}{\cos\widehat{OCK}}=\dfrac{3}{\sqrt{5}}=\dfrac{3\sqrt{5}}{5}$.

Remarque: Dans le triangle OCK rectangle en O, on a: $\cos\widehat{OCH}=\dfrac{OC}{CK}$

6) Dans le triangle ABC, on sait que (CK) est perpendiculaire à (AB).

$\mathcal{A}(ABC)=\dfrac{AB\times CK}{2}=\dfrac{\sqrt{(-2)^2+1^2+0^2}\times 3\sqrt{5}}{5\times 2}=\dfrac{3}{2}$.

---

93 page 341

1) Une équation du plan $\mathcal{P}$ de vecteur normal $\vec{n}\begin{pmatrix}2\\-2\\1\end{pmatrix}$ et passant par $A(8;0;8)$ est donnée par:

$\overrightarrow{AM}\cdot\vec{n}=0$ où $M(x;y;z)$ est un point de $\mathcal{P}$.

Soit $2(x-8)+(-2)(y-0)+1\times(z-8)=0$

Une équation de $\mathscr{P}$: $2x-2y+z-24=0$

2) Soit l'expression : $2x-2y+z-24$

Lorsque $x=0$, $y=0$ et $z=0$, le signe de l'expression est négatif.

Le demi-espace ouvert $\mathscr{E}$ délimité par $\mathscr{P}$ et contenant le point O est caractérisé par l'inéquation:

$2x-2y+z-24<0$.

3) Soit $\mathscr{S}$ la sphère tangente à $\mathscr{P}$ au point $B(10;\ 1;\ 6)$ et telle que son centre I est situé à la distance 6 du plan $\mathscr{P}$ et appartient à $\mathscr{E}$.

Remarque: Comme $2\times10-2\times1+6-24=0$, $B\in\mathscr{P}$ est vrai.

Le rayon de la sphère est 6.

$\overrightarrow{IB}$ est orthogonal à $\mathscr{P}$ (propriété du plan tangent).

$\overrightarrow{IB}$ et $\vec{n}$ sont colinéaires, d'où, il existe un réel t tel que $\overrightarrow{IB}=t\,\vec{n}$.

D'autre part, $IB=|t|\times\|\vec{n}\|=|t|\times\sqrt{2^2+(-2)^2+1^2}=3\,|t|$

$|t|=2$, donc, $t=2$ ou $t=-2$

On a alors: $\overrightarrow{IB}=2\,\vec{n}$ ou $\overrightarrow{IB}=-2\,\vec{n}$.

$$\begin{cases}10-x_I=2\times2\\1-y_I=2\times(-2)\\6-z_I=2\times1\end{cases}\quad\text{ou}\quad\begin{cases}10-x_I=-2\times2\\1-y_I=-2\times(-2)\\6-z_I=-2\times1\end{cases}.$$

$$\begin{cases}x_I=6\\y_I=5\\z_I=4\end{cases}\quad\text{ou}\quad\begin{cases}x_I=14\\y_I=-3\\z_I=8\end{cases}.$$

Comme $I\in\mathscr{E}$, les coordonnées de I vérifient l'inéquation: $2x-2y+z-24<0$.

$2\times6-2\times5+4-24<0$ et $2\times14-2\times(-3)+8-24>0$.

Conclusion: $I(6;\ 5;\ 4)$

Une équation de la sphère $\mathscr{S}$ est: $(x-6)^2+(y-5)^2+(z-4)^2=6^2$

$x^2+y^2+z^2-12x-10y-8z+41=0$

On peut vérifier que $B\in\mathscr{S}$: $10^2+1^2+6^2-12\times10-10\times1-8\times6+41=\ldots=0$