Index

7 page 366

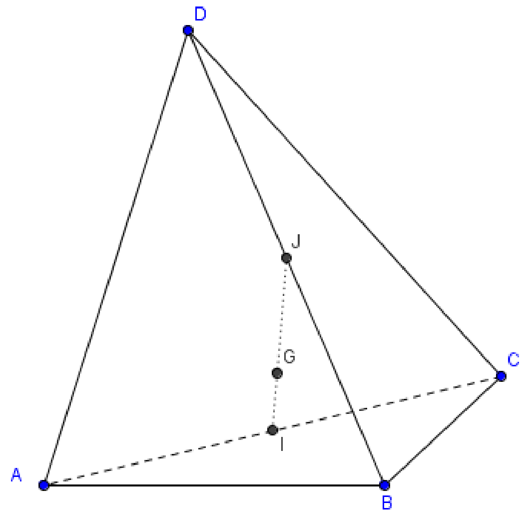
Soit le tétraèdre $ABCD$

Barycentre du système $\{(A; 2), (B; 1), (C; 2), (D; 1)\}$

Soit I le milieu de $[AC]$ et J celui de $[BD]$.

Le barycentre G du système $\{(A; 2), (B; 1), (C; 2), (D; 1)\}$ est celui du système $\{(I; 4), (J; 2)\}$ ou encore $\{(I; 2), (J; 1)\}$

Le point G est défini par $\overrightarrow{IG} = \dfrac{1}{3}\ \overrightarrow{IJ}$.

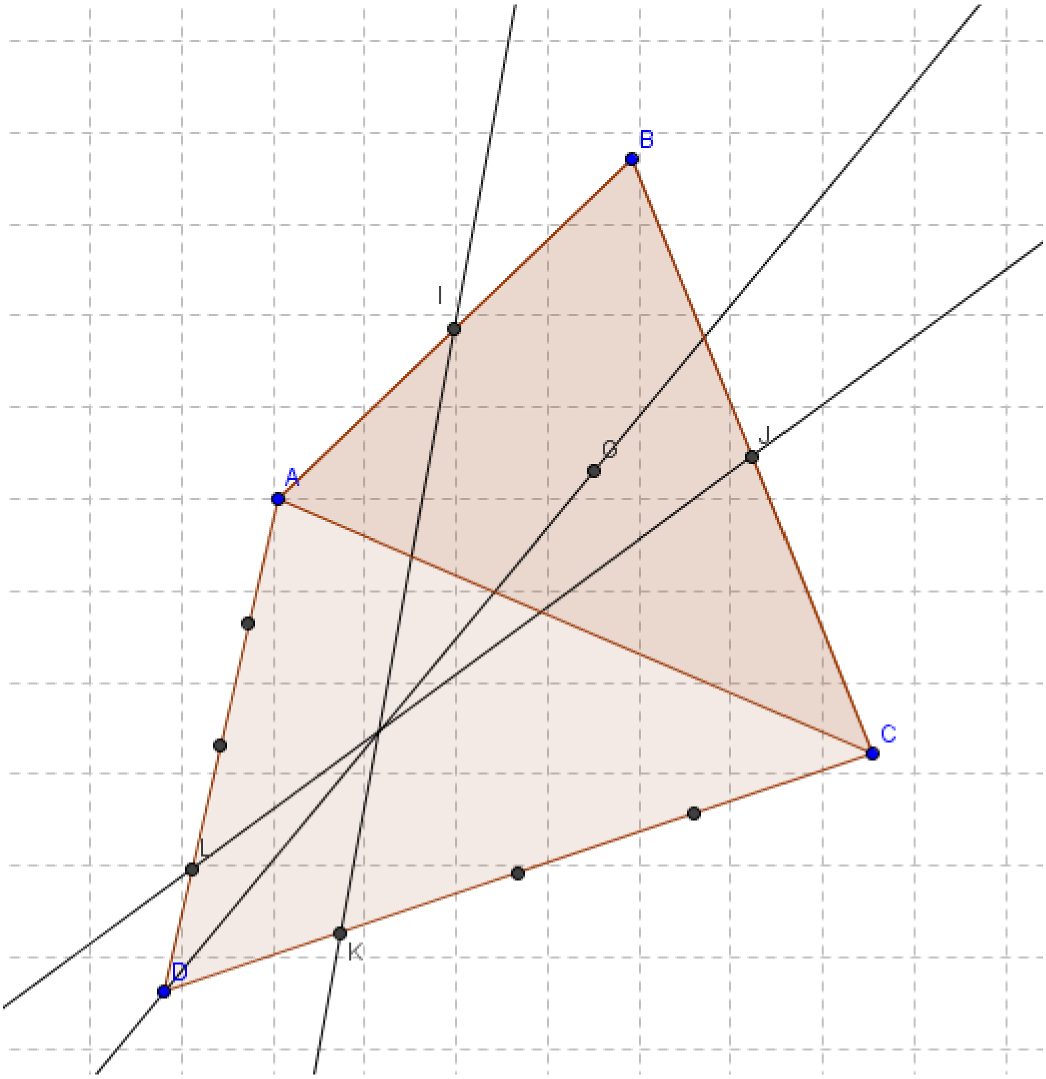


14 page 366

Données		on pense à ...
ABCD est un quadrilatère.		
G est le centre de gravité du triangle *ABC*	donc	$\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$ pour tout point M du plan, $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = 3\ \overrightarrow{MG}$
J le milieu de [*BC*]	donc	$\overrightarrow{JB} + \overrightarrow{JC} = \vec{0}$ pour tout point M du plan, $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = 2\ \overrightarrow{MJ}$
K le point tel que $\overrightarrow{CK} = \frac{3}{4}\ \overrightarrow{CD}$	donc	les points *C*, *K*, *D* alignés dans cet ordre, *K* est le barycentre du système $\{(C, 1); (D, 3)\}$ $4\ \overrightarrow{CK} - 3\ \overrightarrow{CD} = \vec{0}$, *C* est le barycentre du système $\{(K, 4); (D, -3)$ ...
L le point tel que $\overrightarrow{DL} = \frac{1}{4}\ \overrightarrow{DA}$	donc	les points *D, L, A* alignés dans cet ordre, *L* est le barycentre du système $\{(D, 3); (A, 1)\}$ $4\ \overrightarrow{DL} - \overrightarrow{DA} = \vec{0}$, *D* est le barycentre du système $\{(L, 4); (A, -1)$ ...

Dans la suite, les phrases surlignées commencent par une donnée et non par une conséquence ...

Méthode: faire une construction



Nommer le point qui semble convenir ...

L'interpréter comme un barycentre de ....

et utiliser les barycentres partiels ...

Démarche:

Recenser les points intervenant dans la construction des barycentres ... Ici, A, B, C, D ....

Recenser les coefficients : coefficients 1 pour les points A, B, C et coefficient 3 pour le point D.

Rédaction:

Soit H le barycentre du système $\{(A, 1), (B, 1), (C, 1), (D, 3)\}$

Comme G est l'isobarycentre de A, B, C, d'après l'associativité des barycentres, H est celui du système $\{(G, 3), (D, 3)\}$.

Les points H, G, D sont donc alignés (et même : H est le milieu de $[DG]$)

De l'égalité $\overrightarrow{CK} = \frac{3}{4} \overrightarrow{CD}$, on déduit que K est le barycentre du système $\{(C, 1); (D, 3)\}$

Comme I est l'isobarycentre des points A, B,

d'après l'associativité des barycentres, H est celui du système $\{(I, 2), (K, 4)\}$.

Les points H, I, K sont donc alignés (et $\overrightarrow{IH} = \frac{2}{3} \overrightarrow{IK}$)

De l'égalité $\overrightarrow{DL} = \frac{1}{4} \overrightarrow{DA}$, on déduit que L est le barycentre du système $\{(A, 1); (D, 3)\}$

Comme J est l'isobarycentre des points B, C,

d'après l'associativité des barycentres, H est celui du système $\{(J, 2), (L, 4)\}$.

Les points H, J, L sont donc alignés (et $\overrightarrow{JH} = \frac{2}{3} \overrightarrow{JL}$)

Conclusion:

Les droites (IK), (JL) et (DG) sont concourantes en un point H barycentre du système:

$$\{(A, 1), (B, 1), (C, 1), (D, 3)\}$$

---

29 page 367

$M(x; y; z) \in (AB)$ si et seulement si $\overrightarrow{AM} = t\ \overrightarrow{AB}$, $t \in \mathbb{R}$.

1) $A(1; 2; 3)$ et $B(1; 0; -5)$ $\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ -8 \end{pmatrix}$, $\begin{cases} x=1 \\ y=2-2t \\ z=3-8t \end{cases}$, $t \in \mathbb{R}$.

2) $A(4; -1; 2)$ et $B(5; 0; -8)$ $\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -10 \end{pmatrix}$, $\begin{cases} x=4+t \\ y=-1+t \\ z=2-10t \end{cases}$, $t \in \mathbb{R}$.

3) $A(1; 2; 7)$ et $B(1; 2; 11)$ $\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$, $\begin{cases} x=1 \\ y=2 \\ z=7+4t \end{cases}$, $t \in \mathbb{R}$.

---

30 page 367

d est la droite passant par le point $A(2; 2; -4)$ et de vecteur directeur $\vec{u} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$.

1) Un système d'équations paramétriques de d est $\begin{cases} x=2+t \\ y=2+2t \\ z=-4+3t \end{cases}$ $t \in \mathbb{R}$.

2) Le système $\begin{cases} 3=2+t \\ 4=2+2t \\ -1=-4+3t \end{cases}$ a pour solution $t = 1$.

Le point $B(3; 4; -1)$ est un point de d.

Le système $\begin{cases} 4=2+t \\ 6=2+2t \\ -2=-4+3t \end{cases}$ n'a pas de solution. Par exemple, la première équation donne $t = 2$ et la troisième équation $t = \frac{2}{3}$

Le point $C(4; 6; -2)$ n'est pas un point de d.

Le système $\begin{cases} -1=2+t \\ -4=2+2t \\ -13=-4+3t \end{cases}$ a pour solution $t = -3$.

Le point $D(-1; -4; -13)$ est un point de d.

3) Le point de d d'abscisse 5 a pour paramètre $t = 5 - 2 = 3$

Le point $E(5; 8; 5)$ est le point de d d'abscisse 5

Le point de d d'ordonnée 10 a pour paramètre $t = \frac{10-2}{2} = 4$

Le point $F(6; 10; 8)$ est le point de d d'ordonnée 10.

Le point de d de cote 3 a pour paramètre $t = \frac{7}{3}$

Le point $G(\frac{13}{3} ; \frac{20}{3} ; 3)$ est le point de d de cote 3.

4) Un point du plan (xOy) a pour cote $z = 0$, d'où, le point H, intersection de d et du plan (xOy) a pour paramètre $\frac{4}{3}$.

$H(\frac{10}{3} ; \frac{14}{3} ; 0)$

Un point du plan (xOz) a pour ordonnée $y = 0$, d'où, le point I, intersection de d et du plan (xOz) a pour paramètre -1.
$I(1; 0; -7)$

Un point du plan (yOz) a pour abscisse $x = 0$, d'où, le point J, intersection de d et du plan (yOz) a pour paramètre -2.
$J(0 ; -2; -10)$

35 page 368

$\begin{cases} x=1-2k \\ y=2-2k \\ z=k \end{cases}$ ($k \in \mathbb{R}$) est la représentation paramétrique de la droite (d) passant par le point $A(1; 2; 0)$ et de vecteur directeur $\vec{u}\begin{pmatrix}-2\\-2\\1\end{pmatrix}$.

$\begin{cases} x=8-t \\ y=2t \\ z=1-t \end{cases}$ ($t \in \mathbb{R}$) est la représentation paramétrique de la droite (d') passant par le point $B(8; 0; 1)$ et de vecteur directeur $\vec{v}\begin{pmatrix}-1\\2\\-1\end{pmatrix}$.

$\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires, car, il n'existe pas de réel α tel que $\vec{v} = \alpha\,\vec{u}$.

Si $-2\times\alpha = -1$ alors $\alpha = \frac{1}{2}$, mais, $\frac{1}{2}\times(-2) \neq 2$.

Les droites (d) et (d') ne sont pas parallèles.

Un point appartient aux deux droites si et seulement si il existe k et t tels que:

$\begin{cases} 1-2k=8-t & (L1) \\ 2-2k=2t & (L2) \\ k=1-t & (L3) \end{cases}$

D'après (L3), $k = 1 - t$, d'où, dans (L1) et (L2), on a: $\begin{cases} 1-2(1-t)=8-t \\ 2-2(1-t)=2t \end{cases}$

On en déduit: $\begin{cases} t=3 \\ 0\times t=0 \end{cases}$. *(La deuxième égalité est vraie pour tout réel t en particulier lorsque t = 3.)*

Le système admet une et une seule solution. $t = 3$ et $k = -2$

Les droites sont sécantes en un point I de paramètre –2 sur (d) ou de paramètre 3 sur (d').

$I(5; 6; -2)$

---

36 page 368

$\begin{cases} x=1+t \\ y=2t \\ z=2t \end{cases}$ $(t\in \mathbb{R})$ est la représentation paramétrique de la droite d passant par le point $A(1 ; 0 ; 0)$ de vecteur directeur $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix}$

$\begin{cases} x=3-2u \\ y=2u \\ z=4-4u \end{cases}$ $(u\in \mathbb{R})$ est la représentation paramétrique de la droite d' passant par le point $A'(3 ; 0 ; 4)$ de vecteur directeur $\vec{u'}\begin{pmatrix}-2\\2\\-4\end{pmatrix}$

Les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{u'}$ n'étant pas colinéaires, les droites ne sont pas parallèles.

Le système : $\begin{cases}1+t=3-2u\\2t=2u\\2t=4-4u\end{cases}$ équivaut à $\begin{cases}t=u\\1+u=3-2u\\2u=4-4u\end{cases}$ équivaut à $\begin{cases}t=u\\3u=2\\6u=4\end{cases}$

qui a pour solution unique $t = u = \dfrac{2}{3}$

Le point $I(\dfrac{5}{3}\ ;\ \dfrac{4}{3}\ ;\ \dfrac{4}{3})$ de paramètre $\dfrac{2}{3}$ dans chacune des représentations est le point d'intersection de d et de d'.

---

39 page 368

1) $\mathscr{P} : x + y - z + 6 = 0$ a pour vecteur normal $\vec{n}\begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix}$

$\mathscr{P}' : 3x + y - 2z + 1 = 0$ a pour vecteur normal $\vec{n'}\begin{pmatrix}3\\1\\-2\end{pmatrix}$

Les vecteurs $\vec{n}$ et $\vec{n'}$ ne sont pas colinéaires, donc, les plans $\mathscr{P}$ et $\mathscr{P}'$ sont sécants en une droite Δ dont les coordonnées des points sont les solutions du système $\begin{cases}x+2y-z+6=0\\3x+y-2z+1=0\end{cases}$

Représentation paramétrique de Δ : (On cherche à exprimer x , y et z en fonction d'un paramètre t .

(En remarquant que la ligne (3) – 2×la ligne (1) donne 1×x ... en fonction de y et que le coefficient de z est l'unité ...)

Posons $y = t$, on a lors : $\begin{cases}y=t\\x+2y-z+6=0\\3x+y-2z+1=0\end{cases}$ équivaut à $\begin{cases}y=t\\x-z=-2t-6\\3x-2z=-t-1\end{cases}$ équivaut

$$\begin{cases}y=t\\x=-t-1-2(-2t-6)\\-t-1-2(-2t-6)+2t-z+6=0\end{cases}$$

On a donc en réorganisant : $\begin{cases}x=11+3t\\y=t\\z=17+5t\end{cases}$ ($t \in \mathbb{R}$).

Δ est la droite passant par $A(11\ ;\ 0\ ;\ 17)$ et de vecteur directeur $\vec{u}\begin{pmatrix}3\\1\\5\end{pmatrix}$

Vérifications à effectuer : A appartient à $\mathscr{P}$ et $\mathscr{P}'$ $11 + 2\times0 - 17 + 6 = 0$ (Vrai) et $3\times11 + 0 - 2\times17 + 1 = 0$ (Vrai)

$\vec{n}\cdot\vec{u} = 0$ (vrai) et $\vec{n'}\cdot\vec{u} = 0$

2) $\mathscr{P}$: $\frac{1}{2}$ $x - y + 2z - 1 = 0$ a pour vecteur normal $\vec{n}\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\-1\\2\end{pmatrix}$

$\mathscr{P}'$: $-x + 2y - 4z + 2 = 0$ a pour vecteur normal $\vec{n'}\begin{pmatrix}-1\\2\\-4\end{pmatrix}$

Les vecteurs $\vec{n}$ et $\vec{n'}$ sont colinéaires, donc, les plans $\mathscr{P}$ et $\mathscr{P}'$ sont parallèles.
On a : $\vec{n'} = -2\ \vec{n}$.
Comme en multipliant l'équation de $\mathscr{P}$ par -2 , on obtient : $-x + 2y - 4z + 2 = 0$ qui est l'équation de $\mathscr{P}'$, les deux plans sont confondus.

3) $\mathscr{P}$: $3\,x - y - z + 2 = 0$ a pour vecteur normal $\vec{n}\begin{pmatrix}3\\-1\\-1\end{pmatrix}$

$\mathscr{P}'$: $-6x + 2y + 2z = 3$ a pour vecteur normal $\vec{n'}\begin{pmatrix}-6\\2\\2\end{pmatrix}$

Les vecteurs $\vec{n}$ et $\vec{n'}$ sont colinéaires, donc, les plans $\mathscr{P}$ et $\mathscr{P}'$ sont parallèles.
On a : $\vec{n'} = -2\ \vec{n}$.
Comme en multipliant l'équation de $\mathscr{P}$ par -2 , on obtient : $-6x + 2y + 2z + 4 = 0$ qui est n'est pas équivalente à l'équation de $\mathscr{P}'$, les deux plans sont strictement parallèles.

---

43 page 368

A$(-1; 3; 2)$ et $B(2; 1; -2)$ $\mathscr{P}$ est le plan $(O; \vec{j}\ ; \vec{k}\ )$

$M\ (x; y; z) \in (AB)$ si et seulement si , il existe un réel k tel que $\overrightarrow{AM} = k\ \overrightarrow{AB}$

On en déduit: $M\ (x; y; z) \in (AB)$ si et seulement si $\begin{cases} x-(-1)=k(2-(-1)) \\ y-3=k(1-3) \\ z-2=k(-2-2) \end{cases}$

$M\ (x; y; z) \in (AB)$ si et seulement si $\begin{cases} x=-1+3k \\ y=3-2k \\ z=2-4k \end{cases}$, $k \in \mathbb{R}$.

$M\ (x; y; z) \in (O; \vec{j}\ ; \vec{k}\ )$ si et seulement si $x = 0$

On en déduit: $M\ (x; y; z) \in (AB) \cap \mathscr{P}$ si et seulement si $\begin{cases} 0=-1+3k \\ y=3-2k \\ z=2-4k \end{cases}$

On en déduit: $k = \frac{1}{3}$.

Le point d'intersection de (AB) et $\mathscr{P}$ est le point $I(0; \frac{7}{3} ; \frac{2}{3})$

---

45 page 369

1) $\mathscr{P}$ d'équation $x + y - 2z - 5 = 0$

d: droite passant par $A(1; 0; 1)$ et de vecteur directeur $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ a pour représentation paramétrique

$$\begin{cases} x=1+t \\ y=t \\ z=1+t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$$

Un point $M(x; y; z) \in \mathscr{P} \cap d$ si et seulement si $\begin{cases} x+y-2z-5 \\ x=1+t \\ y=t \\ z=1+t \end{cases}$.

On a donc: $1+ t + t - 2(1 + t) - 5 = 0$ qui équivaut $-6 = 0$

Il n'y a pas de points communs à $\mathscr{P}$ et d ($d \parallel \mathscr{P}$)

2) $\mathscr{P}$ d'équation $3x - y + z + 3 = 0$

d: droite passant par $A(1; 1; -5)$ et $B(2; 7; -2)$.

On a donc: $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}1\\6\\3\end{pmatrix}$

d a pour représentation paramétrique $\begin{cases} x=1+t \\ y=1+6t \\ z=-5+3t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$

Un point $M(x; y; z) \in \mathscr{P} \cap d$ si et seulement si $\begin{cases} 3x-y+z+3=0 \\ x=1+t \\ y=1+6t \\ z=-5+3t \end{cases}$.

On a donc: $3(1+ t) - (1 + 6t) - 5 + 3t + 3 = 0$ qui équivaut $0 = 0$

Tous les points de d sont des points de $\mathscr{P}$. $d \subset \mathscr{P}$.

3) $\mathscr{P}$ d'équation $x + y - z - 1 = 0$

d a pour représentation paramétrique

$$\begin{cases} x=3-t \\ y=5-t \\ z=2+t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$$

Un point $M(x; y; z) \in \mathscr{P} \cap d$ si et seulement si $\begin{cases} x+y-z-1=0 \\ x=3-t \\ y=5-t \\ z=2+t \end{cases}$.

On a donc: $3 - t + 5 - t - (2 + t) - 1 = 0$ qui équivaut $t = \dfrac{5}{3}$

$d \cap \mathscr{P} = \{I\}$ avec $I(\frac{4}{3}\ ;\ \frac{10}{3}\ ;\ \frac{11}{3})$

---

46 page 369

$A(1;0;0)$, $B(0;2;0)$ et $C(0;0;-3)$

*** A, B, C forment un plan ? (ne sont pas alignés).

On montre que les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas colinéaires (ou $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BC}$) (ou $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{BC}$)

$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-1\\2\\0\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}-1\\0\\-3\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix}0\\-2\\-3\end{pmatrix}$

Il est évident que $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas colinéaires.

*** Des équations du plan (ABC).

Un point $M(x, y, z) \in (ABC)$ si et seulement si , il existe deux réels λ et μ tels que $\overrightarrow{AM} = \lambda\,\overrightarrow{AB} + \mu\,\overrightarrow{AC}$.

On en déduit: $\begin{cases} x=1-\lambda-\mu \\ y=0+2\lambda+0\times\mu \\ z=0+0\times\lambda-3\times\mu \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1-\lambda-\mu \\ y=2\lambda \\ z=-3\mu \end{cases}$ $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$. (Représentation paramétrique de (ABC))

En remplaçant λ et μ dans l'équation de ce système , il vient: $6x = 6 - 3y + 2z$.

Une équation cartésienne de (ABC) est: $6x + 3y - 2z - 6 = 0$ (On peut vérifier que les coordonnées des points A, B et C vérifient cette équation)

Autre méthode:

Un vecteur $\vec{n}\begin{pmatrix}\alpha\\\beta\\\gamma\end{pmatrix}$ est un vecteur normal de (ABC) si et seulement si $\vec{n} \perp \overrightarrow{AB}$ et $\vec{n} \perp \overrightarrow{AC}$ et $\vec{n} \neq \vec{0}$.

On a donc: $\begin{cases} -\alpha+2\beta+0\times\gamma=0 \\ -\alpha+0\times\beta-3\times\gamma=0 \end{cases}$ qui mène à $2\beta = \alpha$ et $3\gamma = -\alpha$.

En posant $\alpha = t$ ($t \neq 0$), on peut prendre $\vec{n}\begin{pmatrix} t \\ \frac{1}{2}t \\ -\frac{1}{3}t \end{pmatrix}$

(ou tout vecteur non nul colinéaire à $\vec{n}$ en particulier $\begin{pmatrix}6\\3\\-2\end{pmatrix}$)

Un point $M(x, y, z) \in (ABC)$ si et seulement si $\overrightarrow{AM}\cdot\vec{n} = 0$

ce qui donne $(x-1)\times 6 + (y-0)\times 3 + (z-0)\times(-2) = 0$.

Conclusion: $6x + 3y - 2z - 6 = 0$ est une équation cartésienne de (ABC)

*** Caractérisation de la droite d.

Un point $M(x; y; z) \in d$ passant par $E(1; -1; 0)$ et de vecteur directeur $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\2\\6\end{pmatrix}$ si et seulement si

$\overrightarrow{EM} = k\,\vec{u}$, $k \in \mathbb{R}$.

Soit: $\begin{cases} x = 1 + k \\ y = -1 + 2k \\ z = 0 + 6k \end{cases}$, $k \in \mathbb{R}$ (Représentation paramétrique de d)

*** Intersection de (ABC) et de d.

Un point M appartient à l'intersection si et seulement si $6(1 + k) + 3(-1 + 2k) - 2\times 6k = 0$

Cette équation n'ayant aucune solution, $d \cap (ABC) = \emptyset$.

*** Commentaires:

Les vecteurs $\vec{u}$, $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont coplanaires.

En effet: $\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AC} = \vec{u}$.

Le point $E \notin (ABC)$.

La droite d est donc strictement parallèle au plan (ABC).

---

63 page 370:

Rappel(!): le plan médiateur du segment $[AB]$ est le plan perpendiculaire à $[AB]$ en son milieu ou encore

Le plan médiateur du segment $[AB]$ est l'ensemble des points équidistants de A et B.

Lieu des points *M* de l'espace tels que *MA = k MB*.

$A \neq B$. $k > 0$

E est l'ensemble des points M de l'espace tels que $\dfrac{MA}{MB} = k$.

1) $k = 1$

$\dfrac{MA}{MB} = 1 \Leftrightarrow MA = MB$.

E est le plan médiateur du segment $[AB]$

2) $k \neq 1$.

a) Soit M sur la droite (AB). $MA = kMB \Leftrightarrow \overrightarrow{MA} = k\,\overrightarrow{MB}$ ou $\overrightarrow{MA} = -k\,\overrightarrow{MB}$.

$\overrightarrow{MA} - k\,\overrightarrow{MB} = \vec{0}$ ou $\overrightarrow{MA} + k\,\overrightarrow{MB} = \vec{0}$.

Comme $k \neq 1$, $1 - k \neq 0$ et comme $k > 0$, $1 + k \neq 0$, on a ainsi:

I le barycentre du système $\{(A, 1), (B, -k)\}$ et J le barycentre du système $\{(A, 1), (B, k)\}$

b) Comme les nombres sont tous strictement positifs, $\dfrac{MA}{MB} = k \Leftrightarrow \left(\dfrac{MA}{MB}\right)^2 = k^2 \Leftrightarrow MA^2 - k^2MB^2 = 0$

Or, $MA^2 = \overrightarrow{MA}^2$ et $MB^2 = \overrightarrow{MB}^2$

$\dfrac{MA}{MB} = k \Leftrightarrow \overrightarrow{MA}^2 - k^2\,\overrightarrow{MB}^2 = 0 \Leftrightarrow (\overrightarrow{MA} - k\,\overrightarrow{MB}).(\overrightarrow{MA} + k\,\overrightarrow{MB}) = 0 \Leftrightarrow (1 - k)\,\overrightarrow{MI}\,.\,(1 + k)\,\overrightarrow{MJ} = 0$

$\dfrac{MA}{MB} = k \Leftrightarrow \overrightarrow{MI}\cdot\overrightarrow{MJ} = 0$ (puisque $(1 - k)$ et $(1 + k)$ sont non nuls)

c) $\overrightarrow{MI}\cdot\overrightarrow{MJ} = 0 \Leftrightarrow \overrightarrow{MI} \perp \overrightarrow{MJ}$.
E est la sphère de diamètre $[IJ]$

64 page 370

1) ABC isocèle en A de hauteur $[AH]$, donc, H est le milieu de $[BC]$ (ou H isobarycentre des points B et C).

Par associativité, le point G barycentre du système $\{(A; 2), (B; 1), (C; 1)\}$ est le barycentre de $\{(A; 2), (H; 2)\}$

G est donc le milieu de $[AH]$.

2) a) $\vec{V} = 2\ \overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC} = 2\ \overrightarrow{MA} - 2\ \overrightarrow{MH} = 2\ \overrightarrow{HA}$

D'où, $\|\vec{V}\| = 2\times \|\overrightarrow{HA}\| = 2\times 4 = 8$

b) On cherche l'ensemble $\mathcal{E}_1$ des points M vérifiant l'égalité:

$\|2\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\| = \|\vec{V}\|$ (1)

Comme G barycentre du système $\{(A; 2), (B; 1), (C; 1)\}$, on a: $2\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = 4\ \overrightarrow{MG}$

L'égalité (1) équivaut à $4\times MG = 8$, soit $MG = 2$

$\mathcal{E}_1$ est le cercle de centre G et de rayon 2. (Remarque: $A \in \mathcal{E}_1$)

Complément: Dans l'espace, remplacer « cercle » par « sphère ». Toute la démarche est identique.

3) G_n barycentre du système $\{(A; 2), (B; n), (C; n)\}$

a) Comme $n\in\mathbb{N}$, $2 + 2n \geqslant 2$, donc, $2 + 2n \neq 0$.

Le point G_n est bien défini.

b) G_n barycentre du système $\{(A; 2), (B; n), (C; n)\}$ est le barycentre de $\{(A; 2), (H; 2n)\}$

2 et $2n$ sont de même signe,

G_n est donc un point du segment $[AH]$.

c) Pour tout point M, $2\overrightarrow{MA} + n\ \overrightarrow{MB} + n\ \overrightarrow{MC} = (2 + 2n)\ \overrightarrow{MG_n}$

En particulier, lorsque $M = A$, $n\ \overrightarrow{AB} + n\ \overrightarrow{AC} = (2 + 2n)\ \overrightarrow{AG_n}$.

$(2 + 2n)\ \overrightarrow{AG_n} = n\ \overrightarrow{AB} + n\ \overrightarrow{AC} = n \times 2\ \overrightarrow{AH}$

On en déduit: $AG_n = \dfrac{2n}{2+2n}\ AH = \dfrac{n}{1+n}\times 4$.

$\lim\limits_{n\to+\infty} AG_n = 4$ car $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n}{1+n} = 1$

Le point G_n se rapproche de H quand n tend vers $+\infty$ sur le segment $[AH]$.

d) On cherche l'ensemble $\mathcal{E}_n$ des points M vérifiant l'égalité:

$\|2\overrightarrow{MA}+n\overrightarrow{MB}+n\overrightarrow{MC}\| = n\ \|\vec{V}\|$ (2)

Comme G_n barycentre du système $\{(A; 2), (B; n), (C; n)\}$, on a: $2\overrightarrow{MA} + n\ \overrightarrow{MB} + n\ \overrightarrow{MC} = (2 + 2n)\ \overrightarrow{MG}$

L'égalité (2) équivaut à $(2 + 2n)\times MG_n = n\times 8 = 8n$, soit $MG_n = \dfrac{4n}{1+n}$.

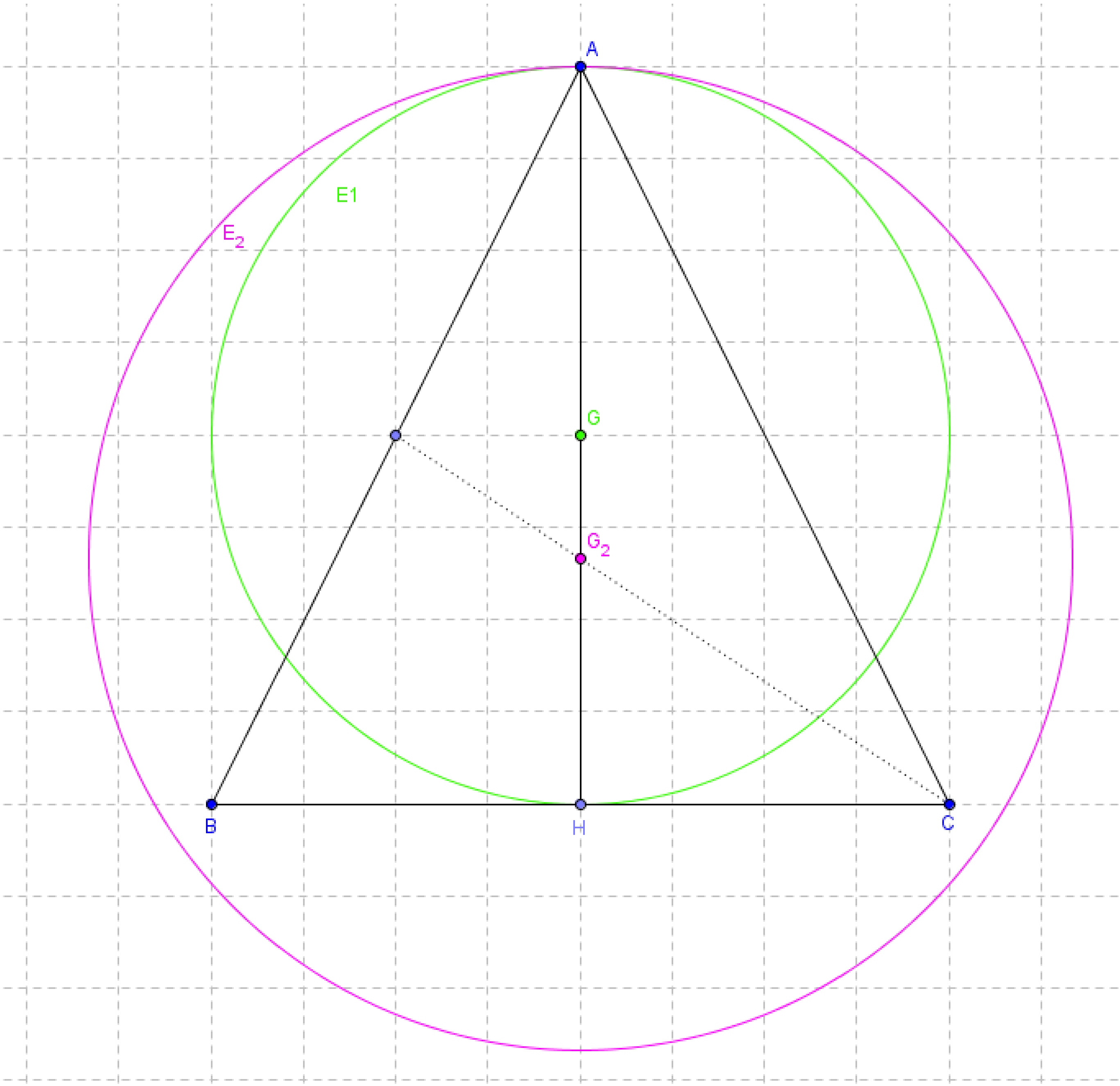
Or, $AG_n = \dfrac{n}{1+n} \times 4$, donc, $A \in \mathcal{E}_n$

$\mathcal{E}_n$ est le cercle de centre G_n et de rayon $R_n = \dfrac{4n}{1+n}$.

Complément: Dans l'espace, remplacer « cercle » par « sphère ». Toute la démarche est identique.

e) $\mathcal{E}_2$ est le cercle de centre G_2 passant par A et G_2 est le point défini par: $\overrightarrow{AG_2} = \dfrac{2}{3}\overrightarrow{AH}$.

G_2 est l'isobarycentre des points A, B, C.



82 page 372

d: $\begin{cases} x=1+t \\ y=2-3t \\ z=-1-t \end{cases}$, $(t\in\mathbb{R})$; d': $\begin{cases} x=7+2k \\ y=-1-k \\ z=2+k \end{cases}$, $(k\in\mathbb{R})$

a) d et d' sont sécantes si et seulement si le système suivant a une et une seule solution $\begin{cases} 1+t=7+2k \\ 2-3t=-1-k \\ -1-t=2+k \end{cases}$

La somme des deux dernières équations du système mène à : $t=0$, puis $k=-3$.
Il est nécessaire de vérifier l'autre équation: $1+0=7+2\times(-3)$ est vraie.
(voir contre-exemples après l'exercice)
Le système admet une et une seule solution.

Les droites d et d' sont sécantes en A de coordonnées $(1;2;-1)$
b) Les droites étant sécantes, elles déterminent un plan $\mathscr{P}$.
Une méthode:
Soit $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\-3\\-1\end{pmatrix}$ et $\vec{u'}\begin{pmatrix}2\\-1\\1\end{pmatrix}$ des vecteurs directeurs respectivement de d et d'.
Comme $A \in \mathscr{P}$, un point $M(x;y;z) \in \mathscr{P}$ si et seulement si les vecteurs $\overrightarrow{AM}$, $\vec{u}$ et $\vec{u'}$ sont coplanaires
si et seulement si, il existe deux réels α et β tels que $\overrightarrow{AM} = \alpha\,\vec{u} + \beta\,\vec{v}$
si et seulement si $\begin{cases}x-1=1.\alpha+2\beta\\ y-2=-3\alpha+(-1)\beta\\ z+1=-1.\alpha+1.\beta\end{cases}$ $\alpha \in \mathbb{R}$ et $\beta \in \mathbb{R}$ (représentation paramétrique du plan)
On en tire (à partir des deux premières équations): $x-1+2(y-2)=\alpha+2\beta-6\alpha-2\beta$ donc: $\alpha=-\dfrac{x+2y-5}{5}$
puis, $2\beta=x-1+\dfrac{x+2y-5}{5}=\dfrac{6x+2y-10}{5}$ et en prenant la troisième équation:
$z+1=\dfrac{x+2y-5}{5}+\dfrac{3x+y-5}{5}=\dfrac{4x+3y-10}{5}$
Une équation de $\mathscr{P}$ est: $4x+3y-5z-15=0$
Une autre méthode
Après avoir déterminé des vecteurs directeurs de d et d' à partir de leurs représentations paramétriques, on détermine un vecteur $\vec{n}\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$ orthogonal à ces deux vecteurs.
On a alors le système: $\begin{cases}a-3b-c=0\\ 2a-b+c=0\end{cases}$ Par addition, il vient: $3a-4b=0$.
On choisit une valeur pour a (pourquoi pas 4) ainsi: $a=4$, $b=3$ et $c=-5$ donnent les coordonnées d'un vecteur normal à $\mathscr{P}$.
Comme $A \in \mathscr{P}$, ses coordonnées vérifient l'équation: $4x+3y-5z+d=0$. Le calcul donne $d=-15$
Résolution de systèmes à deux inconnues, trois équations:
1) Supposons les deux droites définies par:
d: $\begin{cases}x=2+t\\ y=2-3t,\ (t\in\mathbb{R})\\ z=-1-t\end{cases}$; d': $\begin{cases}x=7+2k\\ y=-1-k,\ (k\in\mathbb{R})\\ z=2+k\end{cases}$
Comme pour les droites précédentes la résolution du système $\begin{cases}2+t=7+2k\\ 2-3t=-1-k\\ -1-t=2+k\end{cases}$ mène par addition des deux dernières équations à $t=0$ et $k=3$. Mais, la première équation n'est pas vérifiée.
Le système n'a aucune solution. Les droites n'étant pas parallèles, elles sont non coplanaires.
2) Supposons les deux droites définies par:
d: $\begin{cases}x=2+6\mathrm{t}\\ y=2-3t,\ (t\in\mathbb{R})\\ z=-1+3t\end{cases}$; d': $\begin{cases}x=7+2k\\ y=-1-k,\ (k\in\mathbb{R})\\ z=2+k\end{cases}$ (Elles sont parallèles: pourquoi?)
la résolution du système $\begin{cases}2+6\mathrm{t}=7+2k\\ 2-3t=-1-k\\ -1+3t=2+k\end{cases}$ mène par addition des deux dernières équations à $1=1$.
N'importe quel couple $(t;k)$ avec $k=-3+3t$ est solution de ces deux dernières équations. En remplaçant dans la première équation, on a: $2+6t=1+6t$ qui n'admet aucune solution.

Les droites sont strictement parallèles.

3) Supposons les deux droites définies par:

d: $\begin{cases} x=1+6t \\ y=2-3t \\ z=-1+3t \end{cases}$, $(t\in\mathbb{R})$; d': $\begin{cases} x=7+2k \\ y=-1-k \\ z=2+k \end{cases}$, $(k\in\mathbb{R})$ (Elles sont parallèles: pourquoi?)

la résolution du système $\begin{cases} 1+6t=7+2k \\ 2-3t=-1-k \\ -1+3t=2+k \end{cases}$ mène par addition des deux dernières équations à $1=1$.

N'importe quel couple $(t;k)$ avec $k=-3+3t$ est solution de ces deux dernières équations. En remplaçant dans la première équation, on a: $1+6t=1+6t$ qui admet tout réel comme solution.

Les droites sont confondues.

Par exemple: le point de paramètre 0 sur d est le point de paramètre –3 sur d'.

le point de paramètre 1 sur d est le point de paramètre 0 sur d'.

Plus généralement, le point de paramètre t sur d est le point de paramètre $3t-3$ sur d'.

93 page 374

Plan médiateur d'un segment [AB] :

- Les deux propositions suivantes sont équivalentes

(1) Le plan médiateur du segment [AB] est l'ensemble des points de l'espace équidistants de A et de B.

(2) Le plan médiateur de [AB] est le plan orthogonal à [AB] en son milieu I.

Remarques :

(1) est utile pour déterminer le plan médiateur de [AB] dès que l'on connaît trois points non alignés à égale distance de A et de B

(1) est utile pour démontrer l'égalité de longueur quand on sait qu'un point est dans le plan médiateur de [AB]

(2) est utile pour déterminer le plan médiateur de [AB] dès que l'on connaît les points A et B.

(2) est utile pour démontrer l'orthogonalité quand on sait qu'un plan est le plan médiateur de [AB]

$A(2 ; 0 ; 0)$, $B(-4 ; 0 ; 0)$, $C(0 ; 6 ; 0)$

I milieu de [BC] a pour coordonnées $I(-2 ; 3 ; 0)$ et $\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix} 4 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix}$

J milieu de [CA] a pour coordonnées $J(1 ; 3 ; 0)$ et $\overrightarrow{CA}\begin{pmatrix} 2 \\ -6 \\ 0 \end{pmatrix}$

K milieu de [AB] a pour coordonnées $K(-1 ; 0 ; 0)$ et $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} -6 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\mathscr{P}_1$ plan médiateur de [BC]

$M(x\,;y\,;z) \in \mathscr{P}_1$ si et seulement si $\overrightarrow{IM}\cdot\overrightarrow{BC} = 0$ si et seulement si $(x+2)\times 4 + (y-3)\times 6 + (z-0)\times 0 = 0$
Une équation de $\mathscr{P}_1$ est : $2x + 3y - 5 = 0$ (après réduction et factorisation de 2)

$\mathscr{P}_2$ plan médiateur de $[CA]$
$M(x\,;y\,;z) \in \mathscr{P}_2$ si et seulement si $\overrightarrow{JM}\cdot\overrightarrow{CA} = 0$ si et seulement si $(x-1)\times 2 + (y-3)\times(-6) + (z-0)\times 0 = 0$
Une équation de $\mathscr{P}_2$ est : $x - 3y + 8 = 0$ (après réduction et factorisation de 2)

$\mathscr{P}_3$ plan médiateur de $[AB]$
$M(x\,;y\,;z) \in \mathscr{P}_3$ si et seulement si $\overrightarrow{KM}\cdot\overrightarrow{AB} = 0$ si et seulement si $(x+1)\times(-6) + (y-0)\times 0 + (z-0)\times 0 = 0$
Une équation de $\mathscr{P}_3$ est : $x + 1 = 0$

Analyse de la situation géométrique :
Un point M appartient aux trois plans médiateurs si et seulement si M est équidistant des points A, B et C.
En particulier le point Ω centre du cercle circonscrit au triangle ABC est équidistant des points A, B et C.
D'autre part, le vecteur $\vec{n}$ normal au plan ABC est un vecteur directeur de chacun des trois plans médiateurs.
La droite passant par Ω et de vecteur directeur $\vec{n}$ est donc une droite commune à ces trois plans médiateurs.

Traitement du système :

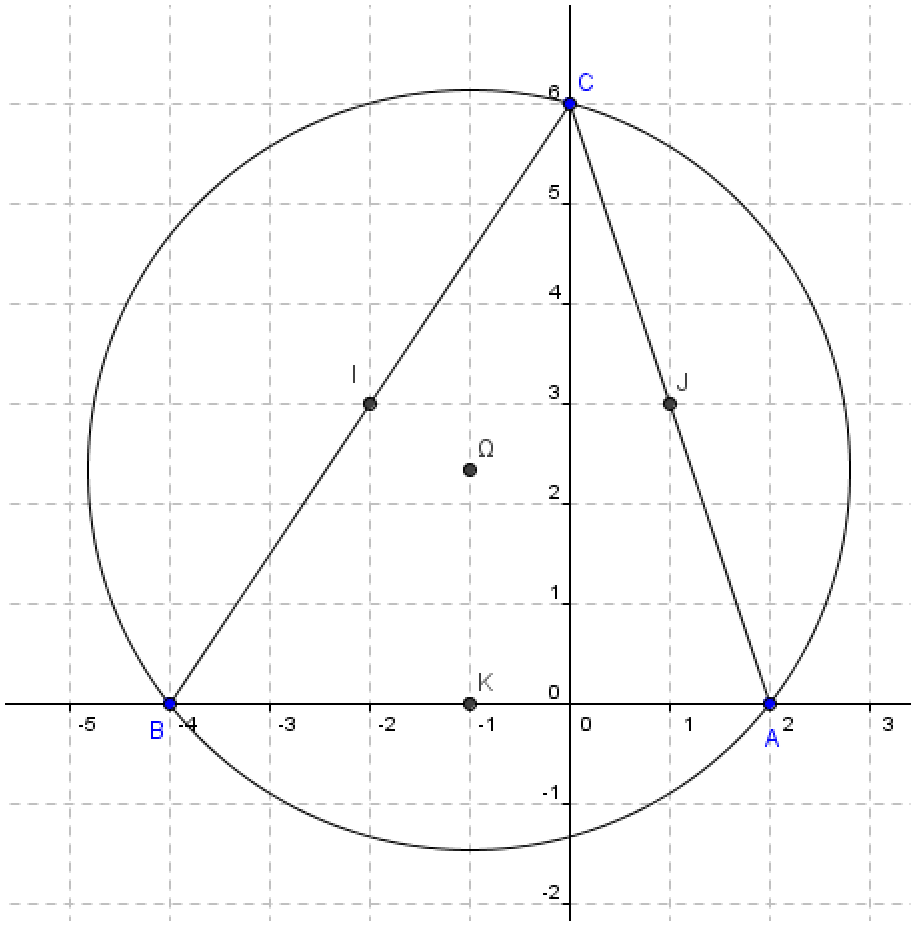
Un point $M(x\,;y\,;z)$ est commun aux trois plans médiateurs si et seulement si $\begin{cases} 2x+3y-5=0 \\ x-3y+8=0 \\ x+1=0 \end{cases} \begin{pmatrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{pmatrix}$

Ce système à trois équations se réduit à un système à deux équations, car, $(L_1) + (L_2)$ est équivalente à (L_3),
Gardons par exemple (L_2) et (L_3)

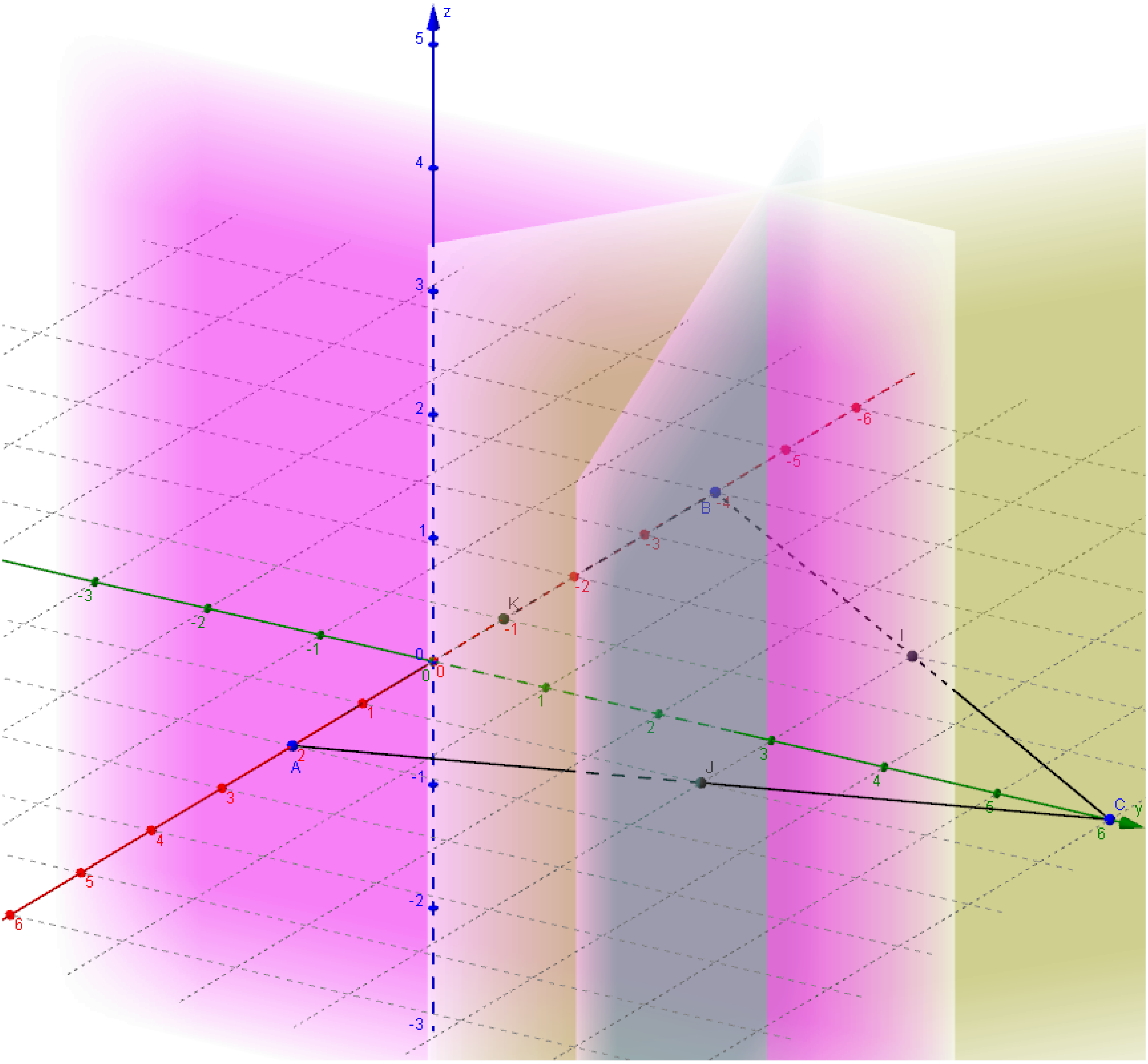
$$\begin{cases} 2x+3y-5=0 \\ x-3y+8=0 \\ x+1=0 \end{cases} \text{ équivaut à } \begin{cases} x-3y+8=0 \\ x+1=0 \end{cases} \text{ équivaut à } \begin{cases} x=-1 \\ y=\dfrac{7}{3} \\ z=t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$$

La droite commune aux trois plans est la droite Δ passant par $\Omega\left(-1\,;\,\dfrac{7}{3}\,;\,0\right)$ et dirigée par $\vec{n}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Vue du plan (xOy).



Vue dans l'espace :



Problèmes

Problème 1 page 386 *La strophoïde*

1) Dans un repère orthonormal direct: $A(1;\,0)$, Δ d'équation $x = 1$ et Γ le cercle de centre A et de rayon 1.
Par conséquent, une équation de Γ est $(x-1)^2 + y^2 = 1$, soit: $x^2 - 2x + y^2 = 0$.
a) d d'équation $y = tx$ avec $t \geqslant 0$.
d est la droite passant par O et de coefficient directeur t.
I_1 et I_2 points d'intersection de d avec Δ et Γ.
$I_1\,(x;\,y) \in d \cap \Delta$ équivaut à $\begin{cases} x = 1 \\ y = tx \end{cases}$. On a donc: $I_1(1;\,t)$

$I_2\,(x;\,y) \in d \cap \Gamma$ équivaut à $\begin{cases} y = tx \\ x^2 - 2x + y^2 = 0 \end{cases}$

En remplaçant y par tx dans la deuxième équation, on obtient:
$x^2 - 2x + (tx)^2 = 0$, soit: $(1 + t^2)x^2 - 2x = 0$
En factorisant x, il vient: $x[(1 + t^2)x - 2] = 0$.
Un produit est nul si et seulement si …..
$x^2 - 2x + (tx)^2 = 0$ a pour solutions: 0 et $\dfrac{2}{1+t^2}$.

Si $x = 0$ alors $y = 0$. d rencontre Γ en $O(0;0)$ et en I_2
$x = \dfrac{2}{1+t^2}$ et $y = tx = \dfrac{2t}{1+t^2}$ $\qquad\qquad I_2\left(\dfrac{2}{1+t^2};\dfrac{2t}{1+t^2}\right)$

b) $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{I_1 I_2}$
$M(x;\,y)$ équivaut à $\overrightarrow{OM}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

Or, $\overrightarrow{I_1 I_2}\begin{pmatrix} \dfrac{2}{1+t^2} - 1 \\ \dfrac{2t}{1+t^2} - t \end{pmatrix} .= \begin{pmatrix} \dfrac{1-t^2}{1+t^2} \\ \dfrac{t-t^3}{1+t^2} \end{pmatrix}$

On en déduit: $x = \dfrac{1-t^2}{1+t^2}$ et $y = \dfrac{t-t^3}{1+t^2} = t \times \dfrac{1-t^2}{1+t^2} = tx$.

c) De $x = \dfrac{1-t^2}{1+t^2}$, on tire: $x(1 + t^2) = 1 - t^2$, puis, $t^2(x + 1) = 1 - x$

Remarquer: nécessité d'avoir $\dfrac{1-x}{1+x} \geqslant 0$, soit: $x \neq -1$ (quotient) et $-1 < x \leqslant 1$ (positivité)

Comme $\boldsymbol{t \geqslant 0}$, on en déduit: $t = \sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}}$ avec $\boldsymbol{-1 < x \leqslant 1}$, puis, $y = x\sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}}$

2) f est la fonction définie sur $]-1;\,1]$ par $f(x) = x\sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}}$

a) f est le produit de deux fonctions: $u\colon x \mapsto x$ et $v : x \mapsto \sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}}$

v est de la forme $\sqrt{w}$ (composée de deux fonctions) avec $w\colon x \mapsto \dfrac{1-x}{1+x}$

v est dérivable sur $]-1;\,1[$, car w est dérivable et **strictement** positif sur $]-1;\,1[$.

$w'(x) = \dfrac{-1\times(1+x) - 1\times(1-x)}{(1+x)^2} = \dfrac{-2}{(1+x)^2}$

et $v'(x) = \dfrac{-2}{(1+x)^2} \times \dfrac{1}{2\sqrt{w(x)}} = -\sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}} \times \dfrac{1}{(1+x)^2}$

Conclusion: $f'(x) = 1 \times \sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}} + x \times \left(-\sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}} \times \dfrac{1}{(1+x)^2}\right)$ pour $-1 < x < 1$.

Étude de $f'(x)$
En remarquant que $1 - x > 0$ et $1 + x > 0$ sur $]-1; 1[$, on a:

$$f'(x) = \frac{\sqrt{1-x}\times\sqrt{1-x}\times(1+x)^2 - x\times\sqrt{1+x}\times\sqrt{1+x}}{(1+x)^2\times\sqrt{1+x}}$$

$$f'(x) = \frac{(1-x)(1+x)^2 - x(1+x)}{(1+x)^2\sqrt{1+x}} = \frac{(1+x)[(1-x)(1+x)-x]}{(1+x)^2\sqrt{1+x}} = \frac{1-x^2-x}{(1+x)\sqrt{1+x}}$$

Le signe de $f'(x)$ est donc celui de $-x^2 - x + 1$

$\Delta = 1 + 4 = 5$ $\quad -x^2 - x + 1$ s'annule sur $]-1; 1[$ en $x_1 = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$ (l'autre racine est inférieure à -1)

x	-1		x_1		1
$f'(x)$	‖	$+$	0	$-$	‖
$f(x)$	‖ $-\infty$	$\nearrow$	M	$\searrow$	0

$$f\left(\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right) = \frac{(-1+\sqrt{5})}{2}\sqrt{\frac{3-\sqrt{5}}{1+\sqrt{5}}} = \frac{(-1+\sqrt{5})}{2}\sqrt{\frac{(3-\sqrt{5})(1-\sqrt{5})}{-4}} = \frac{(-1+\sqrt{5})}{2}\sqrt{\sqrt{5}-2} \approx 0{,}3$$

b) Recherche de la limite en -1

Sur $]-1; 1[$, $\lim\limits_{x\to-1} 1+x = 0$ avec $1 + x0$ et $\lim\limits_{x\to-1} 1-x = 2$, d'où, $\lim\limits_{x\to-1}\sqrt{\frac{1-x}{1+x}} = +\infty$

On en déduit: $\lim\limits_{x\to-1} f(x) = -\infty$

La droite d'équation $x = -1$ est donc asymptote à C

c) Dérivabilité en 1. (Pour que la question ait un sens, il faut f définie en 1 ($f(1) = 0$ ne pose pas de problème pour la définition du 2))

Étude de $\tau(h) = \frac{f(1+h)-f(1)}{h}$ où $-2 < h < 0$.

<u>Remarquer</u>: $h = (\sqrt{-h})^2$

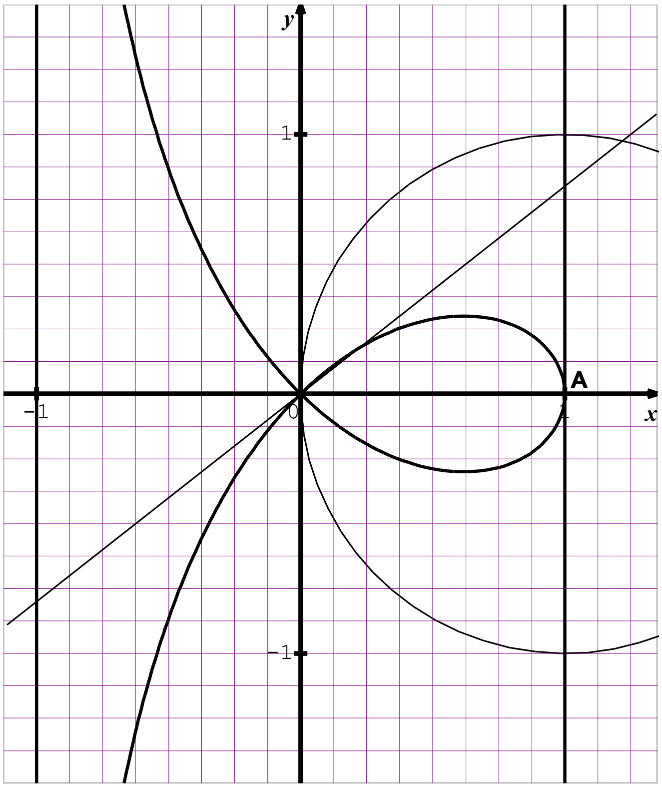
$$\tau(h) = \frac{f(1+h)-f(1)}{h} = (1+h)\sqrt{\frac{-h}{2+h}} \times \frac{1}{h} = (1+h)\sqrt{\frac{1}{(-h)(2+h)}}$$

On en déduit: $\lim\limits_{h\to0}\tau(h) = +\infty$.

***f* n'est pas dérivable en 1.**

La tangente au point $A(1;0)$ est parallèle à l'axe des ordonnées.

d) Construction.



3) C' d'équation $y = -f(x)$ est symétrique de $\mathscr{C}$ par rapport à (Ox)

Problème 3 page 387

$I = [0;\ 1]$ et f définie sur I par $f(x) = \dfrac{3x+2}{x+4}$

1) f est une fonction rationnelle dérivable sur I, et pour tout x de I, $f'(x) = \dfrac{3.(x+4)-1.(3x+2)}{(x+4)^2} = \dfrac{10}{(x+4)^2}$.

Comme $f'(x) > 0$, la fonction f est strictement croissante sur I,

par conséquent, si $0 \leqslant x \leqslant 1$ alors $f(0) \leqslant f(x) \leqslant f(1)$.

$f(0) = \dfrac{1}{2}$ et $f(1) = 1$. si $0 \leqslant x \leqslant 1$ alors $\dfrac{1}{2} \leqslant f(x) \leqslant 1$.

Conclusion: Si $x \in I$ alors $f(x) \in I$.

2) (u_n) est la suite définie par $\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = \dfrac{3u_n+2}{u_n+4} \end{cases}$

Remarquer: Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$.

Proposition à démontrer: Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \in I$.

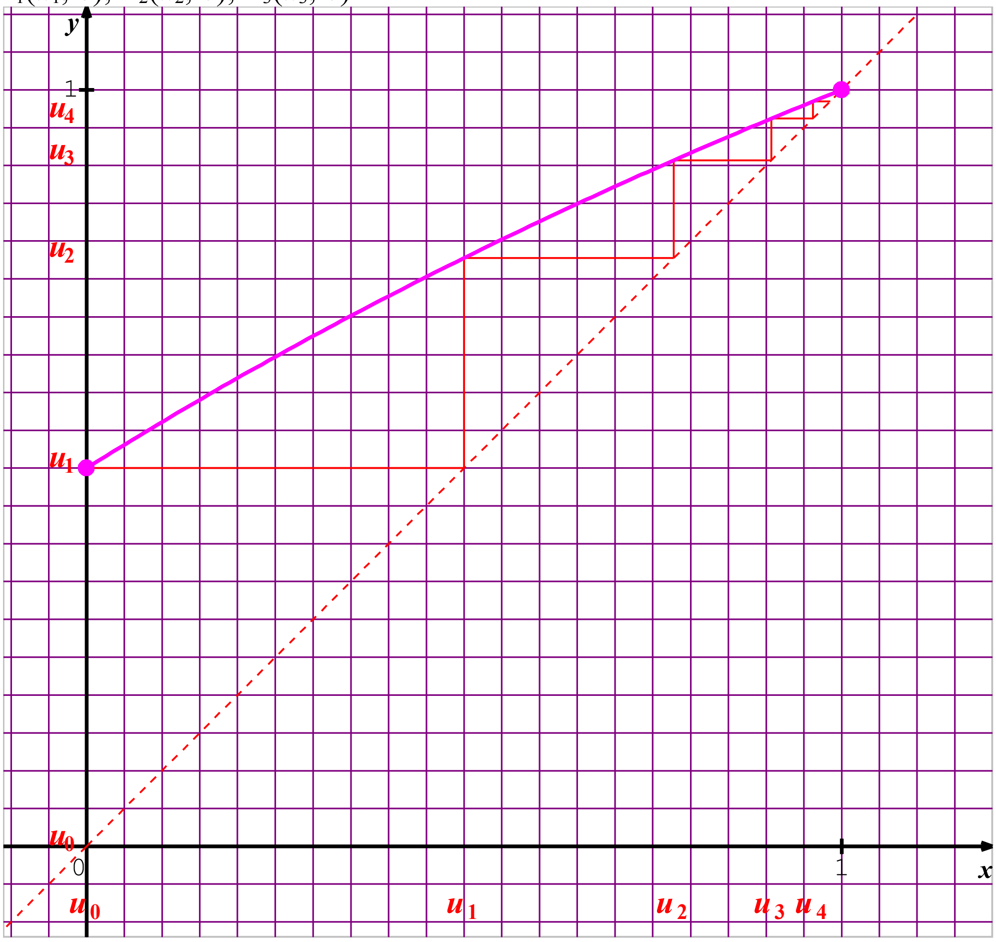
Initialisation: $u_0 = 0$ et $0 \in I$.

Hérédité: Soit un entier naturel k tel que $u_k \in I$.

D'après le 1), $f(u_k) \in I$.

Comme $u_{k+1} = f(u_k)$., on a montré: si $u_k \in I$ alors $u_{k+1} \in I$.

Conclusion:
D'après l'axiome de récurrence, pour tout $n\in\mathbb{N}$, $u_n \in I$.
Première méthode:
3 a) b) A_0 (0; 0), $A_1(u_1, 0)$, $A_2(u_2, 0)$, $A_3(u_3, 0)$



Le point de C_f d'abscisse u_0 a pour ordonnée $f(u_0) = u_1$,
le point de C_f d'abscisse u_1 a pour ordonnée $f(u_1) = u_2$, etc.
Il semble que la suite (u_n) converge vers le réel 1.

c) $u_{n+1} - u_n = \dfrac{3u_n+2}{u_n+4} - u_n = \dfrac{3u_n+2-(u_n)^2-4u_n}{u_n+4} = \dfrac{-(u_n)^2-u_n+2}{u_n+4}$

Comme $-X^2 - X + 2$ a pour racines 1 et -2, on a: $-X^2 - X + 2 = -(X-1)(X+2) = (1-X)(X+2)$

Conclusion: $u_{n+1} - u_n = \dfrac{(1-u_n)(u_n+2)}{u_n+4}$

Comme pour tout $n\in\mathbb{N}$, $0 \leqslant u_n \leqslant 1$, on a: $1 - u_n \geqslant 0$, $2 + u_n \geqslant 2$ et $u_n + 4 \geqslant 4$.
On en déduit: $u_{n+1} - u_n \geqslant 0$.
La suite (u_n) est une suite croissante.
d) La suite (u_n) étant croissante et majorée par 1 est convergente.
e) Il existe un réel l compris entre 0 et 1 tel que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = l$.

On a aussi: $\lim\limits_{n\to+\infty} u_{n+1} = l$.

Comme f est continue en l , on sait: $\lim\limits_{x\to l} f(x) = f(l)$.

Comme $u_{n+1} = f(u_n)$, d'après la limite des fonctions composées $\lim\limits_{n\to+\infty} u_{n+1} = \lim\limits_{x\to l} f(x) = f(l)$.

Conclusion: La limite l de (u_n) vérifie l'égalité $l = f(l)$.
l est donc une des solutions de l'équation $f(x) = x$.

Résolution de $f(x) = x$.

$\frac{3x+2}{x+4} = x$ équivaut à $x \neq -4$ et $3x + 2 = x(x + 4)$ équivaut à $x \neq -4$ et $x^2 + x - 2 = 0$

Cette équation a deux solutions dans $\mathbb{R}$: -2 et 1.

Comme f est définie sur I , la solution -2 est exclue.

Conclusion: $l = 1$

Deuxième méthode:

(v_n) est la suite définie par $v_n = \frac{u_n-1}{u_n+2}$.

4 a) Pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$v_{n+1} = \frac{u_{n+1}-1}{u_{n+1}+2} = \frac{\frac{3u_n+2}{u_n+4}-1}{\frac{3u_n+2}{u_n+4}+2} = \frac{3u_n+2-u_n-4}{3u_n+2+2u_n+8} = \frac{2u_n-2}{5u_n+10} = \frac{2(u_n-1)}{5(u_n+2)} = \frac{2}{5}v_n.$$

Ce qui prouve que (v_n) est une suite géométrique de raison $\frac{2}{5}$

b) et de premier terme $v_0 = -\frac{1}{2}$, par conséquent: $v_n = -\frac{1}{2} \times \left(\frac{2}{5}\right)^n$.

c) Comme $u_n \neq 2$, l'égalité $v_n = \frac{u_n-1}{u_n+2}$ équivaut à $v_n(u_n + 2) = u_n - 1$

On obtient $u_n(1 - v_n) = 2v_n + 1$, d'où, $u_n = \frac{2v_n+1}{1-v_n}$ puisque $v_n \neq 1$ (L'égalité $\frac{u_n-1}{u_n+2} = 1$ est impossible)

$2v_n + 1 = -\left(\frac{2}{5}\right)^n + 1$ et $1 - v_n = 1 + \frac{1}{2} \times \left(\frac{2}{5}\right)^n$.

d) Comme $0 < \frac{2}{5} < 1$, la suite (v_n) converge vers 0.

On en déduit: $2v_n + 1$ converge vers 1

$1 - v_n$ converge vers 1

et le quotient u_n converge vers $\frac{1}{1} = 1$.

Problème 20 page 400

QCM

1) " Si a est un nombre réel quelconque et f une fonction définie et strictement décroissante sur $[a; +\infty[$, alors $\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$ " est une proposition FAUSSE.

Contre-exemple: Toute fonction décroissante admettant une asymptote horizontale est un contre-exemple.

2) " Soient f et g deux fonctions définies sur $[0; +\infty[$, g ne s'annulant pas:

$\begin{cases} \text{si } \lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty \\ \text{si } \lim_{x\to+\infty} g(x) = +\infty \end{cases}$ alors $\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = -1$ " est une proposition FAUSSE.

Contre-exemple: $f(x) = -x + 1$ tend vers $-\infty$ en $+\infty$

et $g(x) = x^2 + 1$ tend vers $+\infty$ en $+\infty$

Le quotient $h(x) = \dfrac{-x+1}{x^2+1} = \dfrac{-1+\dfrac{1}{x}}{x+\dfrac{1}{x}}$ tend vers 0 en $+\infty$.

3) " Si f est une fonction définie sur $[0; +\infty[$ telle que $0 \leqslant f(x) \leqslant \sqrt{x}$ sur $[0; +\infty[$ alors $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x} = 0$ " est une proposition VRAIE.

Preuve: Soit $x > 0$.

On a alors: $0 \leqslant \dfrac{f(x)}{x} \leqslant \dfrac{1}{\sqrt{x}}$ et on applique le théorème des gendarmes.

4) " Si f est une fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ alors la droite d'équation $x = 0$ est asymptote à la courbe représentative de f dans le repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$ " une proposition FAUSSE.

Contre-exemples:

1) La fonction $f: x \mapsto \dfrac{|x|}{x}$ n'est pas définie en 0.

Si $x < 0$, $f(x) = -1$, si $x > 0$, $f(x) = 1$. La fonction n'admet pas de limite en 0.

2) La fonction $f: x \mapsto \dfrac{\ln(1+x)}{x}$ n'est pas définie en 0.

$\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 1$ (c'est le nombre dérivé de la fonction ln en 0).

5) " La fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (x^2 + 3x + 1)e^x$ est une solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle $y' - y = (2x + 3)e^x$ " est une proposition VRAIE

Preuve: $f'(x) = (2x + 3)e^x + (x^2 + 3x + 1)e^x = (2x + 3)e^x + f(x)$

6) Soient A, B, C trois points du plan. On appelle I le barycentre des points A et B affectés des coefficients respectifs 3 et -2.

" Si G est le barycentre des points A, B et C affectés respectivement des coefficients 3, -2 et 1 alors G est le milieu de $[CI]$ " est une proposition VRAIE

Preuve: Par définition de G, $3\,\overrightarrow{GA} - 2\,\overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$

Par définition de I, pour tout point G du plan: $3\,\overrightarrow{GA} - 2\,\overrightarrow{GB} = (3-2)\,\overrightarrow{GI} = \overrightarrow{GI}$

On a donc: $\overrightarrow{GI} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$, CQFD

7) Soient A, B, C trois points du plan et G le barycentre des points A, B et C affectés respectivement des coefficients 3, -2 et 1.

" L'ensemble des points M du plan tels que $\left\| 3\,\overrightarrow{MA} - 2\,\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} \right\| = 1$ est le cercle de centre G et de rayon 1 " est une proposition FAUSSE.

Preuve: Pour tout point M du plan, $3\,\overrightarrow{MA} - 2\,\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = (3-2+1)\,\overrightarrow{MG} = 2\,\overrightarrow{MG}$

L'égalité $\| 3\ \overrightarrow{MA} - 2\ \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\ \| = 1$ équivaut à l'égalité $\| 2\ \overrightarrow{MG}\ \| = 1$, soit $MG = \dfrac{1}{2}$.

" L'ensemble des points M du plan tels que $\| 3\ \overrightarrow{MA} - 2\ \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\ \| = 1$ est le cercle de centre G et de rayon $\dfrac{1}{2}$ "

8) Soient A et B deux points du plan. On désigne par M un point quelconque du plan.

" Le produit scalaire $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}$ est nul si et seulement si $M = A$ ou $M = B$ " est une proposition FAUSSE.

Preuve: $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB} = 0$ équivaut à $\overrightarrow{MA} \perp \overrightarrow{MB}$ ou $M = A$ ou $M = B$.

" L'ensemble des points M du plan tels que $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB} = 0$ est le cercle de diamètre $[AB]$.

Problème 21 page 401

1) Soit d la droite de représentation paramétrique: $\begin{cases} x = 2 + t \\ y = 3t \\ z = -3 \end{cases}$ $t \in \mathbb{R}$.

On considère les points $A(2; 3; -3)$, $B(2; 0; -3)$ et $C(0; 6; 0)$.

Le point A n'appartient pas à d. En effet, si $t = 0$, $x = 2$, $y = 0$, $z = -3$

Le point B appartient à d. ($t = 0$)

Le point C n'appartient pas à d. (Sa cote ne vaut pas -3).

La seule proposition exacte est la proposition (C): $d \neq (AB)$ et $d \neq (BC)$ et $d \neq (CA)$.

2) Les droites de représentations paramétriques respectives: $\begin{cases} x = 2 + t \\ y = 1 - t \\ z = 1 + t \end{cases}$ $t \in \mathbb{R}$ et $\begin{cases} x = -t' \\ y = -2 - 1{,}5t' \\ z = 3 + t' \end{cases}$ $t' \in \mathbb{R}$

admettent comme point commun le point de coordonnées $J(2; 1; 1)$

Preuve:

il suffit puisque les coordonnées sont données de vérifier les deux systèmes.

Si les points ne sont pas donnés, on cherche à résoudre: $\begin{cases} 2 + t = -t' \\ 1 - t = -2 - 1{,}5t' \\ 1 + t = 3 + t' \end{cases}$

De la ligne (1), on tire: $t' = -2 - t$.

En substituant dans les lignes (2) et (3), on a: $\begin{cases} t' = -2 - t \\ 1 - t = -2 - 1{,}5 \times (-2 - t) \\ 1 + t = 3 - 2 - t \end{cases}$, soit: $\begin{cases} t' = -2 - t \\ 2{,}5t = 0 \\ t = 0 \end{cases}$ qui admet pour solution: $t = 0$ et $t' = -2$

3) Les droites de représentations paramétriques respectives: $\begin{cases} x=1 \\ y=1+2t \\ z=1+t \end{cases}$ ($t \in \mathbb{R}$) et $\begin{cases} x=3-2t' \\ y=7-4t' \\ z=2-t' \end{cases}$ ($t' \in \mathbb{R}$) sont non coplanaires.

Preuve:

Un vecteur directeur de d est $\vec{u}$ $\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, un vecteur directeur de d' est $\vec{v}$ $\begin{pmatrix} -2 \\ -4 \\ -1 \end{pmatrix}$

Les vecteurs ne sont pas colinéaires. Les droites sont donc non coplanaires ou sécantes.

Résolution de $\begin{cases} 1=3-2t' \\ 1+2t=7-4t' \\ 1+t=2-t' \end{cases}$.

D'après la ligne (1) $t' = 1$, d'où, le système devient: $\begin{cases} t'=1 \\ 1+2t=3 \\ 1+t=1 \end{cases}$ qui équivaut à $\begin{cases} t'=1 \\ t=1 \\ t=0 \end{cases}$

Le système n'a pas de solutions.

4) La droite de représentation paramétrique $\begin{cases} x=-4t \\ y=1+3t \\ z=2+2t \end{cases}$ $t \in \mathbb{R}$ et le plan d'équation $x - 2y + 5z - 1 = 0$ sont parallèles.

Preuve:

Un vecteur directeur de d est $\vec{u}$ $\begin{pmatrix} -4 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$

Un vecteur normal de (P) est $\vec{n}$ $\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix}$.

Or, $\vec{n} \cdot \vec{u} = -4 \times 1 + 3 \times (-2) + 2 \times 5 = 0$, donc, $\vec{n} \perp \vec{u}$.

$\vec{u}$ est donc aussi un des vecteurs directeurs de (P)