Table des matières

1 page 56

Propriété à connaître:
f étant dérivable en a, le coefficient directeur de la tangente à C_f au point d'abscisse a est le nombre dérivé de f en a.

fonction	dérivée	coefficient directeur de la tangente nombre dérivé en a
$f: x \mapsto x^2$	$f' : x \mapsto 2x$	$a = -1 \quad f'(-1) = -2$
$g : x \mapsto x^3$	$g' : x \mapsto 3x^2$	$a = -2 \quad g'(-2) = 12$
$h: x \mapsto \dfrac{1}{x}$	$h' : x \mapsto -\dfrac{1}{x^2}$	$a = 1 \quad h'(1) = -1$
$k : x \mapsto \sqrt{x}$	$h' : x \mapsto \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$	$a = 4 \quad k'(4) = \dfrac{1}{4}$

2 page 56

Propriété à connaître:
f étant dérivable en a, le coefficient directeur de la tangente à C_f au point d'abscisse a est le nombre dérivé de f en a.

fonction	dérivée	coefficient directeur de la tangente nombre dérivé en a
$f: x \mapsto x^2$	$f' : x \mapsto 2x$	$a = 3 \quad f'(3) = 6$

$g : x \mapsto \sin x$	$g' : x \mapsto \cos x$	$a = 0 \quad g'(0) = 1$
$h: x \mapsto \frac{1}{x}$	$h' : x \mapsto -\frac{1}{x^2}$	$a = -1 \quad h'(-1) = -1$
$k : x \mapsto \cos x$	$h' : x \mapsto -\sin x$	$a = \frac{\pi}{2} \quad k'(\frac{\pi}{2}) = -1$

Compléments :
Les équations de tangentes ne sont pas demandées dans cet exercice.
Connaissant un point de la droite tangente $A(a; f(a))$ et le coefficient directeur de cette droite, on sait:
$\frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(a)$ avec $\Delta y = y - f(a)$ et $\Delta x = x - a$ avec $M(x; y)$ un point courant de la tangente.
Ce qui donne $y = f'(a)(x - a) + f(a)$ est une équation de la tangente en A.

fonction	dérivée	coefficient directeur de la tangente nombre dérivé en a	$f(a)$	Équation de la tangente
$f: x \mapsto x^2$	$f' : x \mapsto 2x$	$a = -1 \quad f'(-1) = -2$	$f(-1) = 1$	$y = -2(x + 1) + 1$ $y = -2x - 1$
$g : x \mapsto x^3$	$g' : x \mapsto 3x^2$	$a = -2 \quad g'(-2) = 12$	$g(-2) = -8$	$y = 12(x + 2) - 8$ $y = 12x + 16$
$h: x \mapsto \frac{1}{x}$	$h' : x \mapsto -\frac{1}{x^2}$	$a = 1 \quad h'(1) = -1$	$h(1) = 1$	$y = -(x - 1) + 1$ $y = -x + 2$
$k : x \mapsto \sqrt{x}$	$h' : x \mapsto \frac{1}{2\sqrt{x}}$	$a = 4 \quad k'(4) = \frac{1}{4}$	$k(4) = 2$	$y = \frac{1}{4}(x - 4) + 2$ $y = \frac{1}{4}x + 1$
$f: x \mapsto x^2$	$f' : x \mapsto 2x$	$a = 3 \quad f'(3) = 6$	$f(3) = 9$	$y = 6(x - 3) + 9$ $y = 6x - 9$
$g : x \mapsto \sin x$	$g' : x \mapsto \cos x$	$a = 0 \quad g'(0) = 1$	$g(0) = 0$	$y = x$
$h: x \mapsto \frac{1}{x}$	$h' : x \mapsto -\frac{1}{x^2}$	$a = -1 \quad h'(-1) = -1$	$h(-1) = -1$	$y = -(x + 1) - 1$ $y = -x - 2$
$k : x \mapsto \cos x$	$h' : x \mapsto -\sin x$	$a = \frac{\pi}{2} \quad k'(\frac{\pi}{2}) = -1$	$k(\frac{\pi}{2}) = 0$	$y = -(x - \frac{\pi}{2})$ $y = -x + \frac{\pi}{2}$

7 page 56

$f(x) = \sqrt{x^2 + 4}$

$f(-2) = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$

On cherche $\lim\limits_{h \to 0} \frac{f(-2+h) - f(-2)}{h}$

$f(-2+h) = \sqrt{(-2+h)^2 + 4}$

$$\frac{\sqrt{(-2+h)^2+4}-\sqrt{8}}{h}=\frac{(\sqrt{(-2+h)^2+4}-\sqrt{8})(\sqrt{(-2+h)^2+4}+\sqrt{8})}{h(\sqrt{(-2+h)^2+4}+\sqrt{8})}=$$

$$\frac{(-2+h)^2+4-8}{h(\sqrt{(-2+h)^2+4}+\sqrt{8})}=\frac{h-4}{\sqrt{(-2+h)^2+4}+\sqrt{8}}$$

Par conséquent: $\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(-2+h)-f(-2)}{h}$ = $-\frac{1}{\sqrt{2}}$ après simplification par 4

f est dérivable en -2 et $f'(-2)=-\frac{1}{\sqrt{2}}$

$f'(-2)$ est le coefficient directeur de la tangente à C_f au point $(-2\,;2\sqrt{2})$

$g(x)=|x+2|$ $g(-2)=0$

On cherche $\lim\limits_{h\to 0}\frac{g(-2+h)-g(-2)}{h}=\lim\limits_{h\to 0}\frac{|h|}{h}$

Si $h<0$, alors $\frac{|h|}{h}=\frac{-h}{h}=-1$ et si $h>0$, alors $\frac{|h|}{h}=\frac{h}{h}=1$

La limite à gauche du taux d'accroissement est -1 et celle à droite est $+1$

Les limites étant différentes la fonction *g* n'est pas dérivable en 0

La limite à gauche valant -1 , la courbe C_g admet une demi tangente de pente -1 au point $(-2\,;0)$

La limite à droite valant 1, la courbe C_g admet une demi tangente de pente 1 au point $(-2\,;0)$

---

14 page 57

$f(x) = -3x^4 + 2x^2 + 1$ $f'(x) = -12x + 4x$

Remarque: *f est définie et dérivable sur* ℝ *(fonction polynôme)*

$g(x) = -x + \sqrt{x}$ $g'(x) = -1 + \frac{1}{2\sqrt{x}}$

Remarque: *g est définie sur [0; +∞[et dérivable sur]0; +∞[(fonction racine carrée)*

$h(x) = \frac{x^2+1}{x}$ $h'(x) = \frac{2x\times x-1\times(x^2+1)}{x^2} = \frac{x^2-1}{x^2} = \frac{(x-1)(x+1)}{x^2}$

Remarque: *h est définie sur]−∞; 0[∪]0; +∞[et*
dérivable sur chacun des intervalles: sur]−∞; 0[et sur]0; +∞[(fonction rationnelle)

ou $h(x) = x + \frac{1}{x}$ $h'(x) = 1 - \frac{1}{x^2} = \frac{x^2-1}{x^2} = \frac{(x-1)(x+1)}{x^2}$

$k(x) = (3x-1)^2$ $k'(x) = 2\times 3\times(3x-1) = 18x - 6$

Remarque: *k est définie et dérivable sur* ℝ *(fonction polynôme)*

Pour la fonction k, il est important de reconnaître une fonction composée de … suivie de …

$x \mapsto 3x-1 \mapsto (3x-1)^2$

---

18 page 57

1) $f(x) = \cos(x) \times \sin(x)$

f est le produit de deux fonctions dérivables sur ℝ, donc, *f* est dérivable sur ℝ, et, pour tout *x* réel,

$f'(x) = -\sin(x)\times\sin(x) + \cos(x)\times\cos(x) = (\cos(x))^2-(\sin(x))^2 = \cos(2x)$

2) $g(x) = 2x(1-x)^2$

g est définie sur $\mathbb{R}$.
g est le produit de deux fonctions $u: x \mapsto 2x$ et $v: x \mapsto (1-x)^2$

La fonction v est la fonction composée $x \mapsto 1-x \mapsto (1-x)^2$ (fonction affine suivie de la fonction carré) qui sont dérivables sur $\mathbb{R}$.
Les formules de dérivation s'appliquent donc sur $\mathbb{R}$
Pour tout x réel, on a: $g'(x) = 2\times(1-x)^2 + (-1)\times2\times(1-x)\times2x = 2\times(1-x)(1-x-2x) = -2\times(1-x)(1-3x)$

3) $h(x) = \dfrac{1}{x^2+x+1}$. Comme pour tout x réel, $x^2 + x + 1 \neq 0$ (calculer $\Delta = \ldots$), h est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ (fonction rationnelle)
$h'(x) = \dfrac{-2x+1}{x^2+x+1}$

4) $k(x) = \cos^2 x - \cos x$
La fonction cosinus est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$, et, la fonction carré est dérivable sur $\mathbb{R}$.
k est donc définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.
$x \mapsto \cos^2 x$ est la fonction composée de cosinus suivie de la fonction carré
Pour tout x réel, $k'(x) = 2\times(-\sin x)\times\cos x - (-\sin x) = \sin x(1 - 2\cos x)$

---

20 page 57

f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \sqrt{x^2+x+1}$ (Remarquer: $x^2 + x + 1 > 0$)
f est la composée de $u : x \mapsto x^2 + x + 1$ suivie de la fonction racine carrée, d'où, $f = \sqrt{u}$

Comme u est dérivable et **<u>strictement positive</u>** sur $\mathbb{R}$, f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f'(x) = \dfrac{2x+1}{2\sqrt{x^2+x+1}}$

g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = (x^2+3x)^4$
g est la composée de $u : x \mapsto x^2 - 3x$ suivie de la fonction $v : x \mapsto x^4$, d'où, $g = u^4$
Comme u est dérivable sur $\mathbb{R}$, g est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $g'(x) = 4(2x+3)(x^2+3x)^3$

---

21 page 57

f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \cos(x^2 + 1)$ est la composée de
$u: x \mapsto x^2 + 1$ suivie de la fonction cosinus. $f = \cos \circ u$.
Comme u est dérivable sur $\mathbb{R}$, f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f'(x) = 2x\times -\sin(x^2 + 1) = -2x\times \sin(x^2 + 1)$

g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = \sqrt{2+\cos x}$.
Comme $-1 \leqslant \cos x \leqslant 1$, on a: $1 \leqslant 2 + \cos x \leqslant 3$.
Le nombre $2 + \cos x$ est donc **strictement positif**.
D'autre part: $g = \sqrt{u}$ avec $u: x \mapsto 2 + \cos x$
Comme u est dérivable et **<u>strictement positive</u>** sur $\mathbb{R}$, g est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $g'(x) = \dfrac{-\sin x}{2\sqrt{2+\cos x}}$.

---

22 page 57

La fonction f est définie par $f(x) = (\sqrt{x} + 2)^3$

f est la composée de $u : x \mapsto \sqrt{x} + 2$ suivie de la fonction cube.

Domaine de définition:

f est définie sur $[0; +\infty[$

Domaine de dérivabilité

f est dérivable sur $]0; +\infty[$

Dérivée:

Pour tout $x > 0$, $f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}} \times 3 \times (\sqrt{x} + 2)^2$

La fonction g est définie par $g(x) = \sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}}$

g est la composée de $u : x \mapsto \dfrac{1-x}{1+x}$ suivie de la fonction $\sqrt{\ }$.

Domaine de définition:

g est définie sur $]-1; 1]$.

En effet, le signe de $\dfrac{1-x}{1+x}$ est celui de $(1-x)(1+x)$ et $1 + x \neq 0$

Domaine de dérivabilité

g est dérivable sur $]-1; 1[$. En effet, la fonction $\sqrt{\ }$ n'est pas dérivable en 0

Dérivée:

Pour tout $x \in\ ]-1; 1[$, $g'(x) = \dfrac{-1\times(1+x)-1\times(1-x)}{(1+x)^2} \times \dfrac{1}{2\sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}}} = -\sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}} \times \dfrac{1}{(1+x)^2}$

---

26 page 57

Étude de $\dfrac{\sqrt{x^2+4-2}}{x}$

Posons $f(x) = \sqrt{x^2+4}$;

On a donc: $f(0) = 2$ et $\dfrac{\sqrt{x^2+4-2}}{x} = \dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}$.

Si f est dérivable en 0 alors $\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}$ tend vers $f'(0)$ quand x tend vers 0.

Étude de la dérivabilité et de la dérivée de la fonction f.

f est une fonction composée de la forme $f = \sqrt{u}$ avec u: $x \mapsto x^2 + 4$

Comme u est dérivable et **strictement positive** sur $\mathbb{R}$, f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f'(x) = \dfrac{2x}{2\sqrt{x^2+4}} = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+4}}$

$f'(0) = 0$

Conclusion:

$\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sqrt{x^2+4}}{x} = f'(0) = 0$

Étude de $\dfrac{\cos x - 1}{x}$

Comme cos 0 = 1, on reconnaît $\dfrac{\cos x - \cos 0}{x - 0}$

On a donc: $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\cos x - 1}{x} = \cos'(0) = -\sin(0) = 0$

---

27 page 57

Étude de $\dfrac{\cos x}{x - \dfrac{\pi}{2}}$

Comme cos $\dfrac{\pi}{2}$ = , on reconnaît $\dfrac{\cos x - \cos\dfrac{\pi}{2}}{x - \dfrac{\pi}{2}}$

Par conséquent, la fonction cosinus étant dérivable en $\dfrac{\pi}{2}$,

on a: $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}} \dfrac{\cos x - \cos\dfrac{\pi}{2}}{x - \dfrac{\pi}{2}} = \cos'\dfrac{\pi}{2} = -\sin\dfrac{\pi}{2} = -1$

Étude de $\dfrac{\sin(2x)}{x - \pi}$

Posons $f(x) = \sin(2x)$

$f(\pi) = 0$ et donc $\dfrac{\sin(2x)}{x - \pi} = \dfrac{f(x) - f(\pi)}{x - \pi}$

f, étant dérivable en π (fonction composée $x \mapsto 2x$ suivie de sinus), on a:

$\lim\limits_{x \to \pi} \dfrac{f(x) - f(\pi)}{x - \pi} = f'(\pi)$

Or, $f'(x) = 2 \times \cos(2x)$, d'où, $f'(\pi) = 2\cos(2\pi) = 2$

Conclusion: $\lim\limits_{x \to \pi} \dfrac{\sin(2x)}{x - \pi} = 2$

---

66 page 60

Vitesse initiale du ballon: $v(0) = 0$

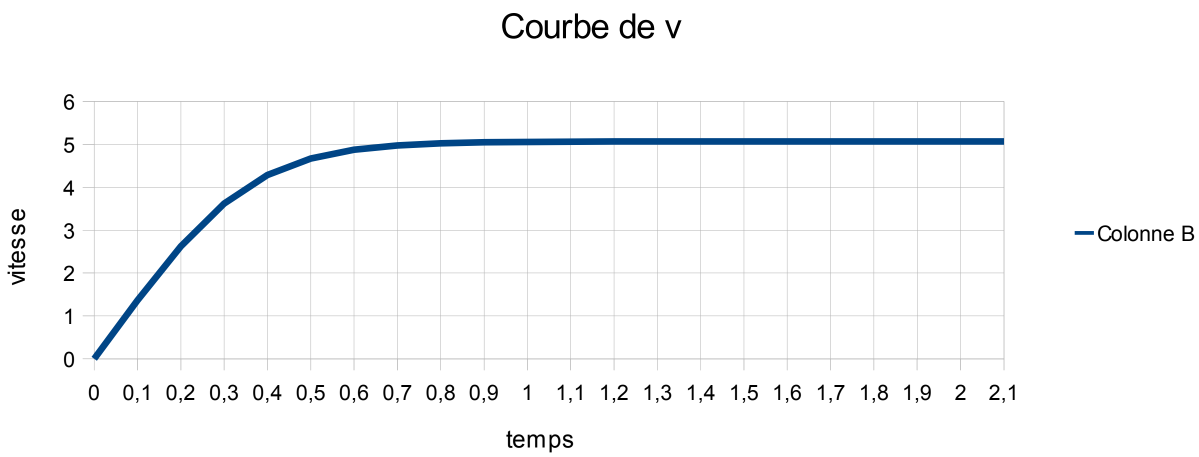
1) La vitesse v est une fonction vérifiant: $v''(t) = 13{,}6 - 0{,}53(v(t))^2$

Méthode d4euler: $v(a + h) \approx v(a) + h \times v'(a)$

t	$v(t)$	$v'(t)$
0	0	13,6

t	$v(t)$	$v\,'(t)$
0,1	$v(0+0{,}1) \approx v(0) + 0{,}1 \times v\,'(0)$ $v(0{,}1) \approx 1{,}36$	$v\,'(0{,}1) \approx 13{,}6 - 0{,}53 \times 1{,}36^2$ $v\,'(0{,}1) \approx 12{,}62$
0,2	$v(0{,}1+0{,}1) \approx v(0{,}1) + 0{,}1 \times v\,'(0{,}1)$ $v(0{,}2) \approx 2{,}6$	$v\,'(0{,}2) \approx 13{,}6 - 0{,}53 \times 2{,}66^2$ $v\,'(0{,}2) \approx 9{,}96$

etc..



3) **Il semble** que la vitesse limite du ballon vaut 5 m.s^{-1}

Remarque: lorsque les fonctions exponentielles et logarithmes seront étudiées, il sera possible de déterminer la fonction v de cet exercice:

Si je n'ai pas fait d'erreurs de calculs, on trouve

$v(t) = \sqrt{\dfrac{13{,}6}{0{,}53}} \times \dfrac{e^{\sqrt{28{,}832}\,t} - 1}{e^{\sqrt{28{,}832}\,t} + 1}$ et la limite vaut $\sqrt{\dfrac{13{,}6}{0{,}53}}$

---

70 page 61

Reconnaître les fonctions composées.

Pour tout x réel, $f^2(x) = [f(x)]^2$ *et* f^2 *est la composée* $x \mapsto f(x) \mapsto [f(x)]^2$

Pour tout x réel, $f'^2(x) = [f'(x)]^2$ *et* f'^2 *est la composée* $x \mapsto f'(x) \mapsto [f'(x)]^2$

f est une fonction définie et deux fois dérivables sur I telle que $f'' + f = 0$
$f^2 + f'^2$ a pour dérivée $(f^2 + f'^2)' = (f^2)' + (f'^2)' = 2.f'.f + 2f''.f' = 2.f'.(f + f'') = 0$.

La dérivée étant nulle sur l'intervalle I, la fonction $f^2 + f'^2$ est constante sur I.
Remarque:
On connaît des fonctions qui vérifient la condition:
" f est une fonction définie et deux fois dérivables sur I telle que $f'' + f = 0$ "
Par exemple:

$f = \cos$, $f' = -\sin$, $f'' = -\cos$.
$f + f'' = 0$
$f^2 + f'^2 = \cos^2 + (-\sin)^2 = 1$

71 page 61

f est une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que $f'(-x) = -f'(x)$ pour tout x de $\mathbb{R}$ (f' est impaire)
On pose $g(x) = f(x) - f(-x)$
1) g est la somme de deux fonctions : la fonction f et la fonction h: $x \mapsto f(-x)$

h est la composée de deux fonctions: $x \mapsto -x \mapsto f(-x)$

Chacune de ces fonctions étant dérivable sur $\mathbb{R}$, la fonction g est dérivable sur $\mathbb{R}$.
Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $g'(x) = f'(x) - h'(x)$ et $h'(x) = -f'(-x)$.
Finalement, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $g'(x) = 0$.
la dérivée étant nulle, la fonction g est constante sur $\mathbb{R}$.
Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $g(x) = C$ où $C \in \mathbb{R}$.
2) Calculons en particulier $g(0)$.
$g(0) = f(0) - f(-0) = f(0) - f(0) = 0$
d'où, $C = 0$ et, il en résulte: Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $g(x) = 0$, soit: $f(-x) = -f(x)$
La courbe de f, C_f, est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées dans un repère orthogonal.

85 page 63

1) Question de cours:

La fonction tangente, notée tan, est définie sur $I = \left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$ par: tan : $x \mapsto \frac{\sin x}{\cos x}$

La fonction sinus est dérivable sur I et la fonction cosinus est dérivable et **ne s'annule pas sur** I, d'où, d'après la dérivée d'un quotient de fonctions dérivables, la fonction tangente est dérivable sur I et : pour tout x de I, $\tan' x$ $= \frac{\cos x \times \cos x - (-\sin x) \times \sin x}{(\cos x)^2} = \frac{(\cos x)^2 + (\sin x)^2}{(\cos x)^2} = \frac{1}{(\cos x)^2}$

Remarque, on a aussi: $\tan' x = \frac{(\cos x)^2 + (\sin x)^2}{(\cos x)^2} = \frac{(\cos x)^2}{(\cos x)^2} + \frac{(\sin x)^2}{(\cos x)^2} = 1 + (\tan x)^2$

2) Le coefficient directeur de la courbe représentative $C_{\tan}$ de la fonction tangente est égale à 1 si et seulement si ($x \in I$ et $\tan' x = 1$)

Résolution sur I de $\frac{1}{(\cos x)^2} = 1$

$(\cos x)^2 = 1$ si et seulement si ($\cos x = 1$ ou $\cos x = -1$) si et seulement si ($x = 0 + 2k\pi$; $k \in \mathbb{Z}$ ou $x = \pi + 2k\pi$; $k \in \mathbb{Z}$)
La seule solution dans I est $x = 0$.
Or, $\tan 0 = 0$, d'où, le point de $C_{\tan}$ où la tangente a un coefficient directeur égal à 1 est le point origine du repère
3) D'après la question 2), une équation T_0 de la tangente à $C_{\tan}$ au point $O(0; 0)$ est: $y = x$
La position relative de T_0 et $C_{\tan}$ est donnée par le signe sur I de $f(x) = x - \tan x$.

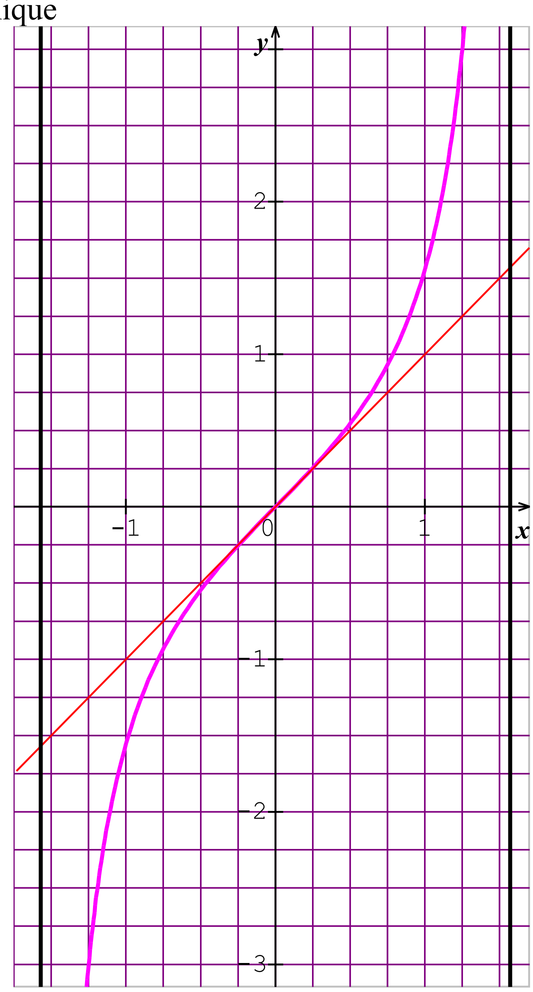
on a: $f'(x) = 1 - \frac{1}{(\cos x)^2} = 1 - (1 + (\tan x)^2) = -(\tan x)^2$

La dérivée s'annule en une seule valeur $x = 0$ et est strictement négative sur $I - \{0\}$, d'où, f est strictement décroissante sur I.

On a alors:
Si $x \in I$ et $x \leqslant 0$, alors $f(x) \geqslant f(0)$, soit $f(x) \geqslant 0$. La tangente T_0 est au-dessus de la courbe $C_{\tan}$
Si $x \in I$ et $x \geqslant 0$, alors $f(x) \leqslant f(0)$, soit $f(x) \leqslant 0$. La tangente T_0 est au-dessous de la courbe $C_{\tan}$
Résumé dans un tableau

x	$-\pi/2$		0		$\pi/2$
$f'(x)$	‖	$-$		$-$	‖
$f(x)$	‖	↘	0	↘	‖
Signe de $f(x)$	‖	$+$		$-$	‖
Position relative des courbes	‖	tangente au-dessus de la courbe		tangente en-dessous de la courbe	‖

Complément: représentation graphique



88 page 63

f définie sur $\left]-\dfrac{\pi}{2}\,;\dfrac{\pi}{2}\right[$ par $f(x) = \dfrac{1}{\cos(x)} - 1 - \dfrac{x^2}{2}$

a) f est la somme des fonctions: u: $x \mapsto \dfrac{1}{\cos(x)}$ et du polynôme $v : x \mapsto -1 - \dfrac{x^2}{2}$

Comme cos x ne s'annule pas sur $\left]-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right[$ et que la fonction cosinus est dérivable sur $\left]-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right[$, alors, f est dérivable sur $\left]-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right[$ et pour tout x de $\left]-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right[$, on a:

$$f'(x) = \frac{-(-\sin(x))}{(\cos(x))^2} - x = \frac{\sin(x)}{(\cos(x))^2} - x$$

Pour les mêmes raisons, f est dérivable sur $\left]-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right[$ et pour tout x de $\left]-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right[$, on a:

$$f''(x) = \frac{\cos(x)\times(\cos(x))^2-\sin(x)\times 2\times(-\sin(x))\times\cos(x)}{(\cos(x))^4} - 1 = \frac{(\cos(x))^2+2(\sin(x))^2}{(\cos(x))^3} - 1$$

Or, $(\sin(x))^2 = 1 - (\cos(x))^2$

D'où, après réduction au même dénominateur:

$$f''(x) = \frac{-(\cos(x))^2+2-(\cos(x))^3}{(\cos(x))^3} = \frac{-\cos^3(x)-\cos^2(x)+2}{\cos^3(x)}$$

Par convention: $\cos^2(x) = (\cos(x))^2$

Le développement $(1-\cos(x))(\cos^2(x)+2\cos(x)+2) =$
$\cos^2(x)+2\cos(x)+2-\cos^3(x)-2\cos^2(x)-2\cos(x) = -\cos^3(x)-\cos^2(x)+2$

Finalement: $f''(x) = \dfrac{(1-\cos(x))(\cos^2(x)+2\cos(x)+2)}{\cos^3(x)}$

b) Variations de f'

Pour tout x, cos $x \leqslant 1$, d'où, $1 - \cos x \geqslant 0$

Posons cos $x = X$ et étudions X^2+2X+2

$X^2+2X+2 = (X+1)^2+1$ qui est un réel strictement positif quelque soit X, d'où, $\cos^2(x)+2\cos(x)+2 > 0$

$\cos^3(x)$ est du signe de cos x, d'où, $\cos^3 x > 0$ sur $\left]-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right[$

Finalement: $f''(x) \geqslant 0$ sur $\left]-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right[$ et la seule valeur qui annule f'' est 0

f' est donc une fonction strictement croissante sur $\left]-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right[$

$f'(0) = 0$ (car, $\sin(0) = 0$)

Si $x < 0$, alors $f'(x) < f'(0)$ (fonction croissante), donc $f'(x) < 0$ sur $\left]-\dfrac{\pi}{2};0\right[$

Si $x > 0$, alors $f'(x) > f'(0)$ (fonction croissante), donc $f'(x) > 0$ sur $\left]0;\dfrac{\pi}{2}\right[$

x	$-\pi/2$		0		$\pi/2$
f''(x)		+	0	+	
f'(x)			0		
Signe de f ' (x)		−	0	+	

c) Variations de f

D'après le signe de $f'(x)$, on a: f est strictement décroissante sur $\left]-\frac{\pi}{2};0\right]$ et strictement croissante sur $\left[0;\frac{\pi}{2}\right[$

Donc f admet un minimum en 0.

Or $f(0) = \frac{1}{1}-1-\frac{0^2}{2} = 0$

x	$-\pi/2$		0		$\pi/2$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\searrow$	0	$\nearrow$	

On a alors, pour tout x de $\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$, $f(x) \geqslant 0$.

Finalement: $\frac{1}{\cos(x)} - 1 - \frac{x^2}{2} \geqslant 0$, soit, $\frac{1}{\cos(x)} \geqslant 1 + \frac{x^2}{2}$ pour tout x de $\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$. Index

91 page 64

1) $0 \leqslant x < 1$

x est une longueur et la longueur DH ne peut pas être supérieure ou égale à celle de l'hypoténuse AD du triangle rectangle ADH

Remarque: Cela signifie que dans la suite de l'exercice l'étude est faite sur [0; 1[

2) Aire $A(x)$ du trapèze $ABCD$: $A(x)=\frac{(DC+AB)\times AH}{2}=\frac{(2x+1+1)\sqrt{(1-x^2)}}{2}=(x+1)\sqrt{(1-x^2)}$

Puisque $0 \leqslant x < 1$, le nombre $\sqrt{1-x^2}$ est bien défini.

3) La hauteur du prisme est BB', d'où, $V(x)=A(x)\times 2=2(x+1)\sqrt{(1-x^2)}$

4) V est le produit de deux fonctions: $u : x \mapsto 2(x+1)$ et $v : x \mapsto \sqrt{1-x^2}$

v est la composée de deux fonctions: $x \mapsto 1-x^2 \mapsto \sqrt{1-x^2}$ dérivable sur [0; 1[car $1-x^2 > 0$

$$v'(x)=\frac{-2x}{2\sqrt{(1-x^2)}}=\frac{-x}{\sqrt{(1-x^2)}}$$

D'où, $V'(x)=2\times\sqrt{(1-x^2)}+2(x+1)\left(\frac{-x}{\sqrt{(1-x^2)}}\right) = 2\times\frac{(1-x^2)-x^2-x}{\sqrt{1-x^2}}=2\times\frac{1-x-2x^2}{\sqrt{1-x^2}}$

Important: La fonction $\sqrt{\ }$ est dérivable sur]0;+∞[et lorsque *u* est dérivable sur un intervalle *I*, il faut nécessairement *u* > 0 pour la dérivabilité de $\sqrt{u}$; $(\sqrt{u})'=\frac{u'}{2\sqrt{u}}$

5) Le volume admet un extremum lorsque la dérivée s'annule en changeant de signe:

$$1-x-2x^2 = -2\left(x^2+\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}\right) = -2\left[\left(x+\frac{1}{4}\right)^2-\frac{1}{16}-\frac{1}{2}\right]$$

$$= -2\left(x + \frac{1}{4} - \frac{3}{4}\right)\left(x + \frac{1}{4} + \frac{3}{4}\right) = -2\left(x - \frac{1}{2}\right)(x + 1)$$

ou $\Delta = ... = 9$, ...
Par conséquent: sur [0; 1[, $1 - x - 2\,x^2$ s'annule en changeant de signe en $\frac{1}{2}$

Si $0 \leqslant x < \frac{1}{2}$ alors $V'(x) < 0$, et si $\frac{1}{2} < x < 1$, $V'(x) < 0$

V admet donc un maximum en $\frac{1}{2}$ qui vaut $V\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{3\sqrt{3}}{2}\,m^3$

x	0		1/2		1
$V'(x)$		+	0	−	‖
$V(x)$	2	$\nearrow$	max	$\searrow$	0 ‖

Index

Exercice B page 68

f sont les fonctions définies et dérivables sur [0; +∞[vérifiant (1): $\begin{cases} f(0) = 1 \\ \text{pour tout } x \text{ de } [0, +\infty[,\ f(x)\,f'(x) = 1 \end{cases}$

I)

x	$f(x)$	$f'(x) = \frac{1}{f(x)}$
0	1	1
0,1	$f(0{,}1) = f(0 + 0{,}1) \approx$ $f(0) + 0{,}1 \times f'(0) = 1{,}1$	$f'(0{,}1) \approx$ $\frac{1}{1{,}1} = \frac{10}{11}$
0,2	$f(0{,}2) = f(0{,}1 + 0{,}1) \approx$ $f(0{,}1) + 0{,}1 \times f'(0{,}1) = \frac{11}{10} + \frac{1}{11} = \frac{122}{110} = \frac{61}{55}$	$f'(0{,}1) \approx$ $\frac{55}{61}$
0,3	$f(0{,}3) = f(0{,}2 + 0{,}1) \approx$ $f(0{,}2) + 0{,}1 \times f'(0{,}2) = \frac{61}{55} + 0{,}1 \times \frac{55}{61} =$	$f'(0{,}2) \approx$
0,4	Voir dernière question	
0,5		

II)
a) f vérifie (1) , donc, pour tout $x \geqslant 0$, le produit $f(x).f'(x) = 1$
Le produit est non nul, donc aucun des facteurs n'est nul.
$f(x) \neq 0$
Un peu de logique:
Proposition:
Si un des facteurs est nul alors le produit de facteurs est nul.
Contraposée de la proposition:

Si un produit de facteurs est non nul alors aucun des facteurs n'est nul.

Autre méthode: (Raisonnement par l'absurde)
Supposons qu'il existe une valeur réelle $\alpha \geqslant 0$ telle que $f(\alpha) = 0$,
on alors: $f(\alpha)\times f'(\alpha) = 0$, ce qui contredit: pour tout $x \geqslant 0$, le produit $f(x).f'(x) = 1$

b) f étant dérivable sur $[0; +\infty[$ est continue sur $[0; +\infty[$.
On sait $f(0) = 1$ et $f(a) < 0$ avec $a > 0$.
D'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe au moins un réel α de $[0; a]$ tel que $f(\alpha) = 0$.

Commentaire:
f(a) < 0 implique f ' (a) < 0, mais, cela ne veut pas dire que f ' est négative sur un intervalle.
On ne peut pas en conclure que f est décroissante sur un intervalle.
Dans cet exercice, aucune des données ne permet de dire que la fonction dérivée première est continue en a.
Il existe des fonctions qui sont dérivables mais dont la dérivée n'est pas continue.

c) Cette conclusion étant contradictoire avec a), l'hypothèse du b) n'est pas valide.
Si f existe alors on a: $f(x) \neq 0$ et il n'existe aucun réel strictement positif a tel que $f(a) < 0$.
Comme $f(0) = 1$, pour tout $x \geqslant 0$, on a: $f(x) > 0$

III) f vérifie (1) , donc, pour tout $x \geqslant 0$, le produit $f(x).f'(x) = 1$ et $f(0) = 1$
a) $g(x) = f^2(x) - 2x$.
g est la somme de fonctions dérivables, donc, g est dérivable et,
pour tout $x \geqslant 0$, $g'(x) = 2.f'(x).f(x) - 2 = 2\times 1 - 2 = 0$

b) On en déduit que g est une fonction constante sur $[0; +\infty[$, d'où,
pour tout $x \geqslant 0$, $g(x) = C$ avec $g(0) = \ldots = 1$.
On en déduit: $f^2(x) = 1 + 2x$ et comme $f(x) \geqslant 0$, on a: $f : x \mapsto \sqrt{1+2x}$

On peut vérifier: $f(0) = 1$ et $f'(x) = \dfrac{2}{2\sqrt{1+2x}} = \dfrac{1}{f(x)}$.

c) Comparaison entre les valeurs approchées du I) et les valeurs de $f(x)$ (arrondies au millième)

x	f(x) (Euler)	f'(x) Euler	f(x) (fonction)	f'(x) fonction)
0	1,000	1,000	1,000	1,000
0,1	1,100	0,909	1,095	0,913
0,2	1,191	0,840	1,183	0,845
0,3	1,275	0,784	1,265	0,791
0,4	1,353	0,739	1,342	0,745
0,5	1,427	0,701	1,414	0,707

Remarque:
La fonction $\phi : x \mapsto -\sqrt{1+2x}$ vérifie elle aussi sur $[0; +\infty[$ la condition $\phi(x)\times \phi'(x) = 1$

En effet, $\phi'(x) = -\dfrac{2}{2\sqrt{1+2x}} = \dfrac{1}{-\sqrt{1+2x}} = \dfrac{1}{\phi(x)}$

Exercice E page 68

Partie I

$I = \left[0\,;\frac{\pi}{2}\right[$

1) Étude de $f : x \mapsto \tan(x) - x$ sur I.

f est la somme de deux fonctions dérivables sur I, d'où, pour $x \in I$, on a: $f'(x) = 1 + (\tan(x))^2 - 1 = (\tan(x))^2$

On en déduit que f est strictement croissante sur I, d'où, pour $x \geqslant 0$, on a: $f(x) \geqslant f(0)$

Or, $f(0) = 0$

Conclusion: Pour tout x de I, $\tan(x) \geqslant x$.

Remarque sur la notation: On note $\tan^2 x = (\tan(x))^2$

2) Soit g définie sur I par: $g(x) = \tan(x) - x - \frac{1}{3}x^3$

a) g est la somme de trois fonctions dérivables sur I, d'où, pour $x \in I$, on a:

$g'(x) = 1 + (\tan(x))^2 - 1 - x^2 = (\tan(x))^2 - x^2 = (\tan(x) - x)(\tan(x) + x)$

b) Puisque d'après a), $\tan(x) \geqslant x$, le produit est positif et g est une fonction strictement croissante sur I.

On a par conséquent: pour $x \geqslant 0$, on a: $g(x) \geqslant g(0)$

Or, $g(0) = 0$

Conclusion: Pour tout x de I, $\tan(x) \geqslant x + \frac{1}{3}x^3$.

Partie II

$J = \left[0\,;\frac{\pi}{4}\right]$

1) Étude de $k : x \mapsto \tan(x) - 2x$ sur J.

k est la somme de deux fonctions dérivables sur J, d'où, pour $x \in J$, on a:

$k'(x) = 1 + (\tan(x))^2 - 2 = (\tan(x))^2 - 1 = (\tan(x) - 1)(\tan(x) + 1)$

Si $0 \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{4}$, alors $\tan(0) \leqslant \tan(x) \leqslant \tan\left(\frac{\pi}{4}\right)$ (tan est une fonction strictement croissante sur J)

Or $\tan\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1$, d'où, $\tan(x) \leqslant 0$ et comme $\tan(x) + 1 \geqslant 0$ sur J, on obtient: $k'(x) \leqslant 0$.

On en déduit que k est strictement décroissante sur J, d'où, pour $x \geqslant 0$, on a: $k(x) \leqslant k(0)$.

Or, $k(0) = 0$

Conclusion: Pour tout x de J, $\tan(x) \leqslant 2x$.

2) Soit h définie sur J par: $h(x) = \tan(x) - x - \frac{4}{3}x^3$

a) h est la somme de trois fonctions dérivables sur J, d'où, pour $x \in J$, on a:

$h'(x) = 1 + (\tan(x))^2 - 1 - 4x^2 = (\tan(x))^2 - 4x^2 = (\tan(x) - 2x)(\tan(x) + 2x)$

Puisque d'après a) $\tan(x) \leqslant 2x$, le produit est négatif et h est une fonction strictement décroissante sur J.

On a par conséquent: pour $x \geqslant 0$, on a: $h(x) \leqslant h(0)$.

Or, $h(0) = 0$

Conclusion: $\tan(x) \leqslant x + \frac{4}{3}x^3$

Partie III

Pour $0 \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{4}$, on a: $\frac{1}{3}x^3 \leqslant \tan(x) - x \leqslant \frac{4}{3}x^3$

En divisant par x^2 qui est **strictement positif**, on obtient: $\frac{1}{3}x \leq \frac{\tan x - x}{x^2} \leq \frac{4}{3}x$

Le théorème des gendarmes permet de conclure: $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\tan(x) - x}{x^2} = 0$ Index

---

Exercice G page 69

(ajouter les questions suivantes: - Établir le tableau de variations de f
- Établir le tableau de signes de $f''(x)$
- Faire le schéma d'une courbe susceptible de représenter f

en supposant que l'axe des abscisses est une asymptote à la représentation graphique de f' et que $f(-2) = 1$)

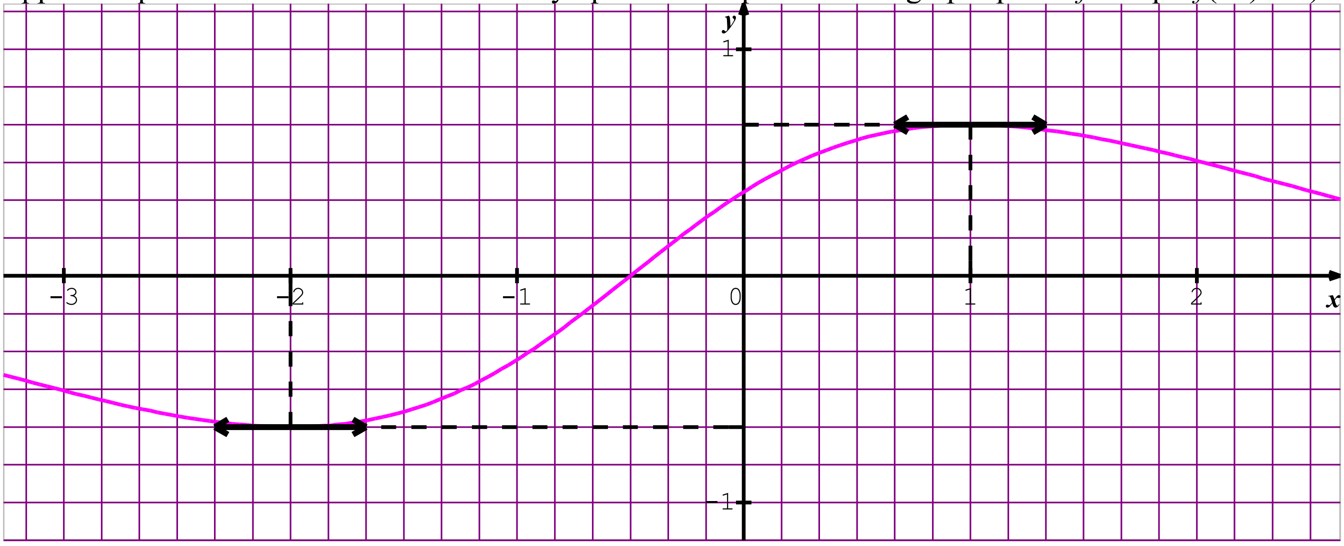


Tableau de signes de la dérivée première et tableau de variations de de la fonction:

x	$-\infty$		$-1/2$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		↘	min	↗	

Tableau de variations de la dérivée première et tableau de signes de la dérivée seconde

x	$-\infty$		-2		1		$+\infty$
$f''(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f'(x)$	0	↘	$-2/3$	↗	$2/3$	↘	0

Résumé:

x	$-\infty$		-2		$-1/2$		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
$f''(x)$		$-$	0	$+$		$+$	0	$-$	
$f(x)$		↘	1	↘	min	↗		↗	

1) f admet un minimum en $-\dfrac{1}{2}$ est VRAI (voir tableau)

2) f, étant deux fois dérivables, $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{f'(x) - f'(1)}{x-1} = f''(1)$ est le coefficient directeur de la tangente à la courbe de f'. Or, d'après le graphique, la tangente est parallèle à l'axe des abscisses.

$\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{f'(x) - f'(1)}{x-1} = 0$ est VRAI

3) f est décroissante sur $[1; +\infty[$ est FAUX (la dérivée est positive sur $[1; +\infty[$)

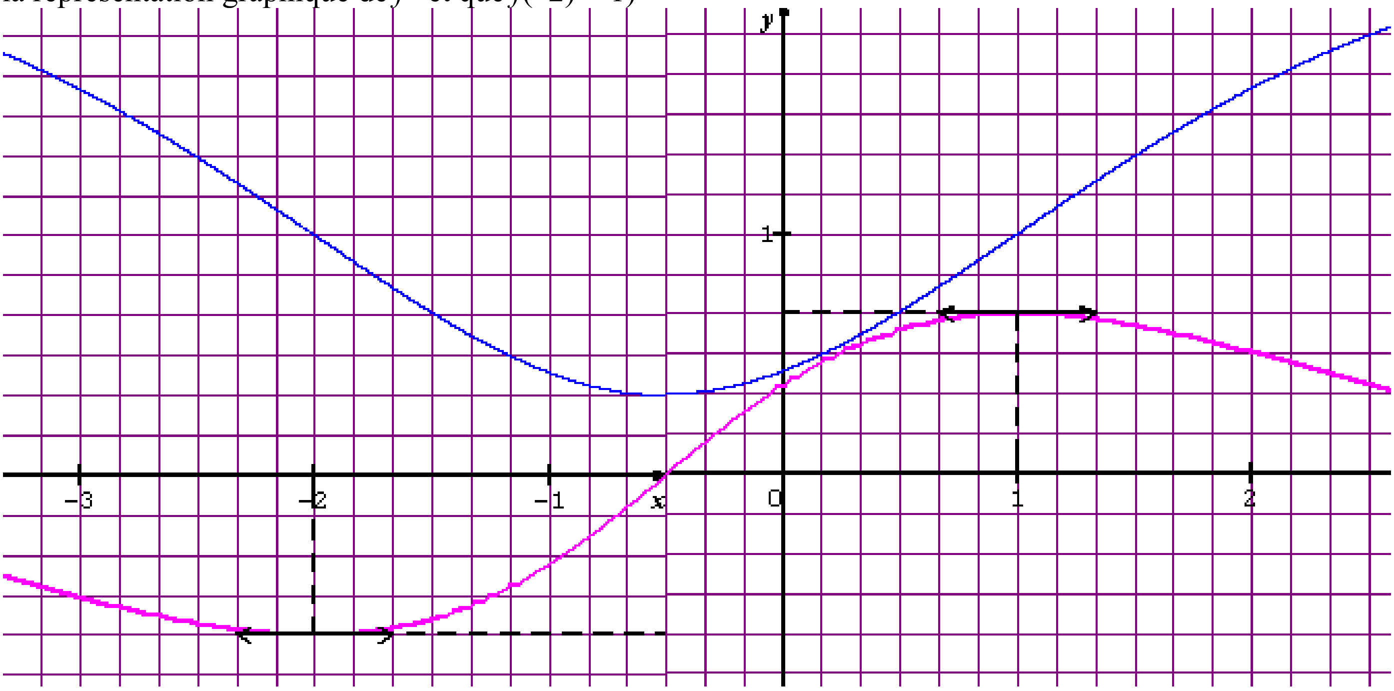
4) Si $f(-2) = 1$ alors , pour tout $x \in [-2; 1]$, $f(x) \geqslant 1$ est FAUX.
(La dérivée est strictement négative sur $[-2, -\dfrac{1}{2}[$, donc, f est strictement décroissante sur $[-2; -\dfrac{1}{2}]$)

5) L'équation de la tangente à C_f au point d'abscisse -2 est $y = -\dfrac{2}{3}$ est FAUX.

$-\dfrac{2}{3}$ est le coefficient directeur de la tangente au point d'abscisse -2, d'où, une équation de la tangente en ce point est:

$y = -\dfrac{2}{3}(x+2) + f(-2)$.

Complément:
Faire le schéma d'une courbe susceptible de représenter f en supposant que l'axe des abscisses est une asymptote à la représentation graphique de f' et que $f(-2) = 1$)



La pente de la tangente est le nombre dérivé lu sur le graphique en lisant l'ordonnée su la courbe de f'.
Lorsque cette ordonnée est proche de 0 la pente est faible.
Lorsque cette ordonnée s'éloigne de 0 la pente augmente.
Lorsque cette ordonnée est négative, la fonction f est décroissante.
Lorsque cette ordonnée est positive, la fonction f est croissante.