Index

"J'ai toujours pensé qu'il n'avait pas assez d'imagination pour devenir mathématicien !" ***Hilbert, David***
au sujet d'un étudiant qui a renoncé aux mathématiques pour la poésie

Activité 1 page 74.

$N(t)$ est le nombre de bactéries en millier à la date t en heures.

$N(0) = 1$, le nombre de bactéries double chaque heure et, pour une durée Δt donnée, $\dfrac{N(t+\Delta t)}{N(t)}$ est constant.

C'est-à-dire, il existe pour chaque Δt une constante réelle $\alpha_{\Delta t}$ tel que $N(t+\Delta t) = \alpha_{\Delta t}.N(t)$

1) On sait que la population double chaque heure; p_n est la population à l'heure n en milliers.

$p_0 = N(0) = 1$

$p_1 = 2\times p_0 = 2$ $\quad$ $p_2 = 2\times p_1 = 4$ $\quad$ $p_{n+1} = 2\times p_n$

La suite (p_n) est donc une suite géométrique de premier terme $p_0 = 1$ et de raison 2.

On en déduit: $p_n = 2^n$.

2 a) On sait que $\dfrac{N(t+0{,}5)}{N(t)} = \alpha_{0,5}$, on a donc: $\dfrac{N(0+0{,}5)}{N(0)} = \alpha_{0,5}$

On en déduit: $N(0{,}5) = \alpha_{0,5}$, puis, $N(1) = N(0{,}5+0{,}5) = \alpha_{0,5}.N(0{,}5) = (\alpha_{0,5})^2$

On a alors: $(\alpha_{0,5})^2 = 2$

Conclusion: $\alpha_{0,5} = \sqrt{2}$, puis, $N(1{,}5) = N(1+0{,}5) = \alpha_{0,5}\times N(1) = 2\sqrt{2} \neq 3$

b) à 23 heures, on a: $t = -1$ et comme $N(0) = N(-1+1) = 2\times N(-1)$, on obtient: $N(-1) = \dfrac{1}{2}$,

puis, à 22 heures, on a: $t = -2$ et comme $N(-1) = N(-2+1) = 2\times N(-2)$,

on obtient: $N(-2) = \dfrac{1}{2}\times N(-1) = \dfrac{1}{4}$

à 23 heures 30, on a: $t = -0{,}5$ et comme $N(0) = N(-0{,}5+0{,}5) = \sqrt{2}\times N(-0{,}5)$, on obtient: $N(-0{,}5) = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$

à 22 heures 30, on a: $t = -1{,}5$ et comme $N(-1) = N(-1{,}5+0{,}5) = \sqrt{2}\times N(-1{,}5)$,

on obtient: $N(-1{,}5) = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\times N(-1) = \dfrac{1}{2\sqrt{2}}$

(Graphique)

3) a) b) c) La démarche précédente peut s'appliquer à chaque fraction $\dfrac{1}{k}$ d'heure.

On a: $N\left(0+\dfrac{1}{k}\right) = \alpha_{\frac{1}{k}}.N(0) = \alpha_{\frac{1}{k}}$ $\qquad$ $N\left(\dfrac{1}{k}\right) = \alpha_{\frac{1}{k}}$

puis, $N\left(\dfrac{2}{k}\right) = N\left(\dfrac{1}{k}+\dfrac{1}{k}\right) = \alpha_{\frac{1}{k}}.N\left(\dfrac{1}{k}\right) = \left(\alpha_{\frac{1}{k}}\right)^2$ ....

$N(1) = N\left(0+k\times\dfrac{1}{k}\right) = \left(\alpha_{\frac{1}{k}}\right)^k$ $\qquad$ $\left(\alpha_{\frac{1}{k}}\right)^k = 2$

On en déduit: $\alpha_{\frac{1}{k}} = 2^{1/k}$ (Racine k-ième de 2)

$N(3{,}5) = N(1{,}5 + 2) = \alpha\_2.N(1{,}5) = N(2)\times N(1{,}5)$

et $N\left(\dfrac{4}{3}\right) = N\left(1+\dfrac{1}{3}\right) = N(1)\times N\left(\dfrac{1}{3}\right) = \left(\alpha_{\frac{1}{3}}\right)^3\times\alpha_{\frac{1}{3}} = \left(\alpha_{\frac{1}{3}}\right)^4$

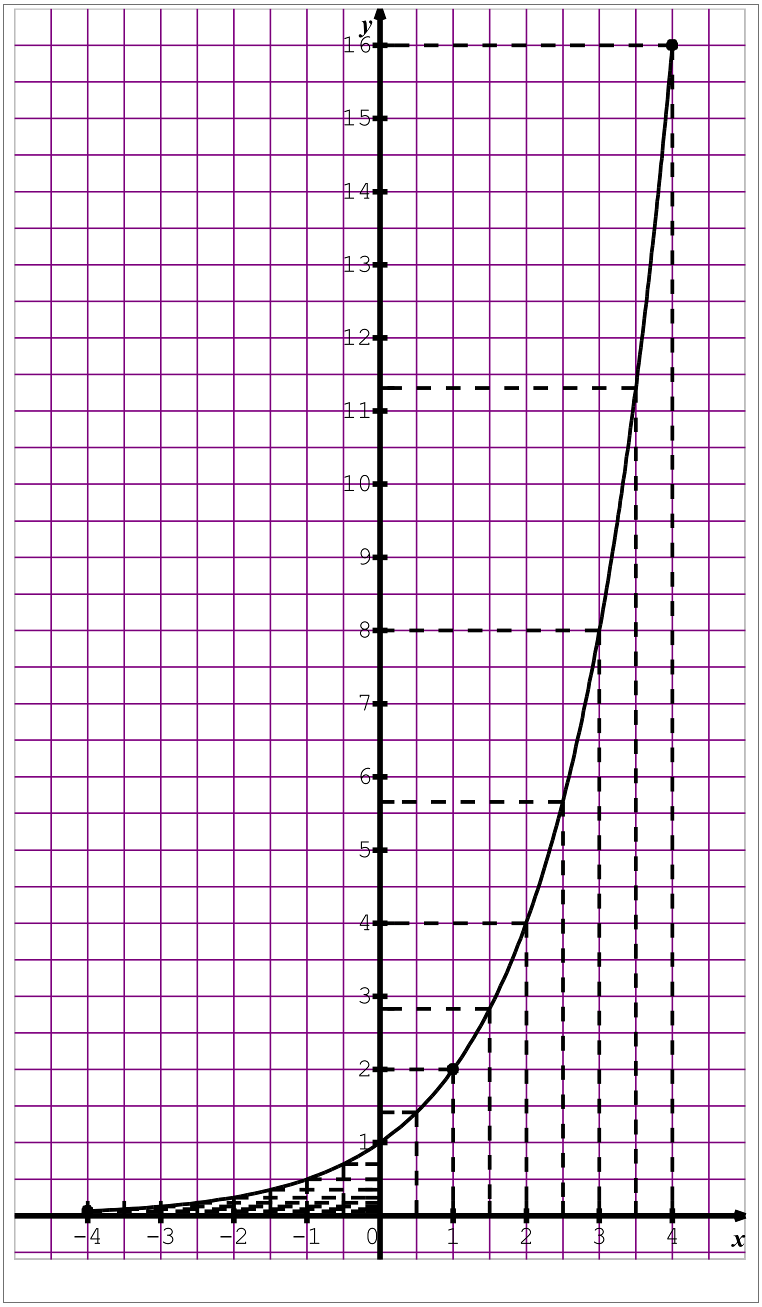
4) On admet l'existence de la fonction $t \mapsto 2^t$ définie sur $\mathbb{R}$.

Le tableur de la calculatrice donne: Pour un réel t_1 avec $-1{,}74 < t_1 < -1{,}73$, $2^{t_1} = 0{,}3$ (milliers) bactéries
Pour un réel t_2 avec $-6{,}65 < t_2 < -6{,}64$, $2^{t_2} = 0{,}01$ (milliers) bactéries

5 a)b)c) pour tout réel a, $\dfrac{N(a+h)-N(a)}{h} = \dfrac{2^{a+h}-2^a}{h} = 2^a \times \dfrac{2^h-1}{h}$

À la calculatrice ou au tableur, on a:

h	1	0,1	0,01	0,001	0,000 1	0,000 01
$\dfrac{2^h-1}{h}$	1	0,717 7	0,695 5	0,693 3	0,693 1	0,693 1



Il semble que la limite de $\dfrac{2^h-1}{h}$ quand h tend vers 0 existe et vaut approximativement 0,693 1
(On verra plus tard qu'elle vaut ln (2))

On note $k = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{2^h - 1}{h}$

On admet que N est une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$, d'où, $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{N(a+h) - N(a)}{h} = N'(a)$ et l'on obtient:
Pour tout a, $N'(a) = kN(a)$

La fonction N est donc une solution de l'équation différentielle $N' = kN$ Index

---

5 page 90

Remarquer: $e^{-x} \times e^{x} = 1$ et $e^{2X} = (e^X)^2$

Pour tout réel x, $\dfrac{e^{-x}}{e^x + 1} = \dfrac{(e^{-x})^2}{(e^x+1)e^{-x}} = \dfrac{e^{-2x}}{1 + e^{-x}}$

---

6 page 90

$$\frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \frac{e^{-x}(e^x - e^{-x})}{e^{-x}(e^x + e^{-x})} = \frac{1 - e^{-2x}}{1 + e^{-2x}}$$

Évidemment , d'autres méthodes sont disponibles.
Notamment:
Pour démontrer une égalité (X) = (Y), on pose la différence (X) – (Y) et, on montre que cette différence est nulle.

---

7 page 90

$$1 - \frac{3}{e^x + 1} = \frac{e^x + 1 - 3}{e^x + 1} = \frac{e^x - 2}{e^x + 1}$$

---

12 page 90

1) $f(x) = x + 3 + xe^x$

En $+\infty$.
$\lim\limits_{x \to +\infty} x = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} e^x = +\infty$ donc (limite du produit), $\lim\limits_{x \to +\infty} xe^x = +\infty$.
Comme $\lim\limits_{x \to +\infty} x + 3 = +\infty$, on a: (limite d'une somme), $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.
En $-\infty$.
On sait: $\lim\limits_{x \to -\infty} xe^x = 0$, d'où, (limite d'une somme), $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$.

2) $f(x) = x + 1 + \dfrac{3}{e^x + 1}$

En $+\infty$,
$\lim\limits_{x \to +\infty} e^x = +\infty$, d'où (limite d'un quotient), $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{3}{e^x + 1} = 0$

Comme $\lim\limits_{x\to+\infty} x+1 = +\infty$, on a: (limite d'une somme) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

En $-\infty$,

$\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0$, d'où (limite d'une somme suivie d'un quotient), $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{3}{e^x+1} = 3$

Comme $\lim\limits_{x\to-\infty} x+1 = -\infty$, on a: (limite d'une somme) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$.

3) $f(x) = 3x\,e^{-x}$

En $+\infty$;

$3x\,e^{-x} = \dfrac{3}{\dfrac{e^x}{x}}$, comme $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^x}{x} = +\infty$, on obtient (limite d'un quotient) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$

En $-\infty$,

$\lim\limits_{x\to-\infty} e^{-x} = \lim\limits_{X\to+\infty} e^X = +\infty$ (limite de fonction composée)

Comme $\lim\limits_{x\to-\infty} x = -\infty$; on a: (limite d'un produit), $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$.

4) $f(x) = \dfrac{e^x-2}{e^x+1}$

En $+\infty$,

On factorise par e^x , et, on simplifie … (car, $e^x \neq 0$), $\dfrac{e^x-2}{e^x+1} = \dfrac{e^x(1-2/e^x)}{e^x(1+1/e^x)} = \dfrac{1-2\,e^{-x}}{1+e^{-x}}$

Comme $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{-x} = 0$, on a: $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 1$

En $-\infty$, (l'écriture initiale convient)

Comme $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0$, on a: $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -2$

---

13 page 90

1) Limites en 0 de f définie par $f(x) = \dfrac{e^x}{x}$

On sait: $\lim\limits_{x\to0} e^x = e^0 = 1$ (continuité en 0 de la fonction exp)

Limite à gauche: $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x<0}} f(x) = -\infty$.

Limite à droite: $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}} f(x) = +\infty$.

2) Limites en 0 de f définie par $f(x) = \dfrac{7}{e^x-1}$

On sait: $\lim\limits_{x\to0} e^x = e^0 = 1$ (continuité en 0 de la fonction exp), d'où, $\lim\limits_{x\to0} e^x-1 = 0$

Il reste à déterminer le signe de $e^x - 1$.

Si $x < 0$, alors, $e^x - 1 < 0$,

Limite à gauche: $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x<0}} f(x) = -\infty$.

Si $x > 0$, alors, $e^x - 1 > 0$,

Limite à droite: $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} f(x) = +\infty$.

---

19 page 91

$f : x \mapsto x^2\ e^x$ est le **produit** de deux fonctions dérivables sur ℝ ($x \mapsto x^2$) et ($x \mapsto e^x$).
f est donc dérivable sur ℝ et pour tout x réel, $f'(x) = 2x\ e^x + e^x x^2 = x(x + 2)\ e^x$

$g: x \mapsto \dfrac{e^x}{x-1}$ g est définie sur $D_h =]-\infty; 1[\cup]1; +\infty[$.
g est le **quotient** de deux fonctions dérivables sur chacun des intervalles de D_g ,
donc, g est dérivable sur $]-\infty; 1[$ et sur $]1; +\infty[$.
Pour tout x réel de D_g , on a: $g'(x) = \dfrac{e^x(x-1)-1.(e^x)}{(x-1)^2} = \dfrac{(x-2)e^x}{(x-1)^2}$

$h: x \mapsto 2x - 1 + \dfrac{e^x}{e^x+1}$. Comme pour tout x réel, $e^x > 0$, h est définie sur ℝ.

h est la **somme** de deux fonctions $u: x \mapsto 2x - 1$ et $v: x \mapsto \dfrac{e^x}{e^x+1}$

v est le **quotient** de ...

Pour tout x réel, $h'(x) = 2 + \dfrac{e^x(e^x+1)-e^x\times e^x}{(e^x+1)^2} = 2 + \dfrac{e^x}{(e^x+1)^2}$

$k: x \mapsto e^x - 3x - 1$
k est la somme ......
$k'(x) = e^x - 3$

---

20 page 91

$f(x) = (-2x + 5)\ e^x$ f est le **produit** de deux fonctions $x \mapsto -2x + 5$ et $x \mapsto e^x$ dérivables sur ℝ, donc, f est dérivable sur ℝ et, pour tout x réel, $f'(x) = -2\ e^x + (-2x + 5)\ e^x = (-2x + 3)\ e^x$.

$g(x) = (-3x^2 + 5)\ e^x$ g est le **produit** de deux fonctions $x \mapsto -3x^2 + 5$ et $x \mapsto e^x$ dérivables sur ℝ, donc, g est dérivable sur ℝ et, pour tout x réel, $g'(x) = -6x\ e^x + (-3x^2 + 5)\ e^x = (-3x^2 - 6x + 5)\ e^x$.

$h(x) = \dfrac{e^x-1}{x+1}$ h est définie sur $D_h =]-\infty; -1[\cup]-1; +\infty[$.
h est le **quotient** de deux fonctions dérivables sur chacun des intervalles de D_h ,
donc, h est dérivable sur $]-\infty; -1[$ et sur $]-1; +\infty[$.
Pour tout x réel de D_h , on a: $h'(x) = \dfrac{e^x(x+1)-1.(e^x-1)}{(x+1)^2} = \dfrac{x\,e^x+1}{(x+1)^2}$

$k(x) = \dfrac{e^x + 2}{e^x - 1}$ k est définie si et seulement si $e^x \neq 1$ si et seulement si $x \neq 0$

$D_k = \mathbb{R}^* =]-\infty; 0[\cup]0;+\infty[$

k est le **quotient** de deux fonctions dérivables sur chacun des intervalles de D_k,
donc, k est dérivable sur $]-\infty; 0[$ et sur $]0; +\infty[$.

Pour tout x réel de D_k, on a: $k'(x) = \dfrac{e^x(e^x-1) - e^x(e^x+2)}{(e^x-1)^2} = \dfrac{-3e^x}{(e^x-1)^2}$

---

22 page 91

Puisque la fonction exp est strictement croissante sur $\mathbb{R}$,

l'égalité exp(a) = exp(b) est vérifiée si et seulement si $a = b$.

$e^{3x} = 1 \Leftrightarrow e^{3x} = e^0 \Leftrightarrow 3x = 0 \Leftrightarrow x = 0$

$e^{-x^2} = e^{2x+1} \Leftrightarrow -x^2 = 2x + 1 \Leftrightarrow x^2 + 2x + 1 = 0 \Leftrightarrow (x + 1)^2 = 0 \Leftrightarrow x = -1$

$e^{-\frac{1}{x}} = e^{x+2} \Leftrightarrow -\dfrac{1}{x} = x + 2$ et $x \neq 0 \Leftrightarrow x + 2 + \dfrac{1}{x} = 0$ et $x \neq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 0 \\ x^2 + 2x + 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = -1$

---

23 page 91

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes:

$e^{x^2} = e^{5x-4} \Leftrightarrow x^2 = 5x - 4$ Car, la fonction exp est une bijection définie sur $\mathbb{R}$.

$\Leftrightarrow$ (second degré) $x = 1$ ou $x = 4$

$e^x - e^{-x} = 0 \Leftrightarrow e^x = e^{-x} \Leftrightarrow x = -x \Leftrightarrow x = 0$

$e^{5x} = -1$ n'a aucune solution réelle car, l'exponentielle prend ses valeurs dans $\mathbb{R}^{+*}$.

$(e^{-x} - e)(e^{3x} + 5) = 0$ un produit est nul ......

$\Leftrightarrow e^{-x} - e = 0$ ou $e^{3x} + 5 = 0$

$\Leftrightarrow e^{-x} = e$ ou $e^{3x} = -5$

$\Leftrightarrow -x = 1$ (La deuxième équation n'a aucune solution)

$\Leftrightarrow x = -1$

---

24 page 91

$1 \leqslant e^{3x} \Leftrightarrow 0 \leqslant 3x$ car, la fonction exp est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ et $e^0 = 1$

$1 \leqslant e^{3x} \Leftrightarrow x \geqslant 0$;

$e^{-x^2-x} \leqslant 1 \Leftrightarrow -x^2 - x \leqslant 0$ (même raison)

$e^{-x^2-x} \leqslant 1 \Leftrightarrow -x(x + 1) \leqslant 0$ (Tableau de signes ou second degré)

$S =]-\infty ; -1] \cup [0; +\infty[$

$e^{x+3} \geqslant \dfrac{1}{e^x} \Leftrightarrow e^{x+3} \geqslant e^{-x}$

$e^{x+3} \geqslant \dfrac{1}{e^x} \Leftrightarrow x+3 \geqslant -x \Leftrightarrow x \geqslant -\dfrac{3}{2}$ $\qquad S = \left[-\dfrac{3}{2};+\infty\right[$

25 page 91

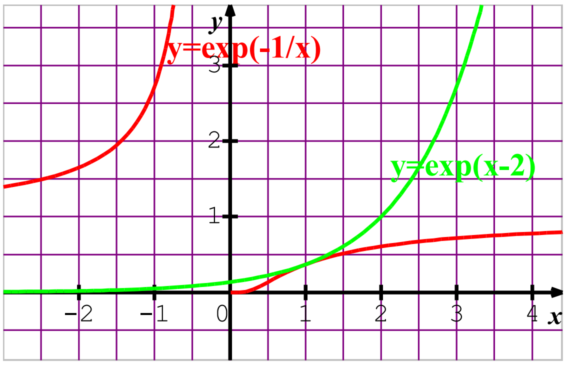
la fonction exp est strictement croissante sur $\mathbb{R}$

1) $e^{-x} \leqslant e^x \Leftrightarrow -x \leqslant x \Leftrightarrow x \geqslant 0$ $\qquad S = [0; +\infty[$

2) $e^{-\frac{1}{x}} \leqslant e^{x-2} \Leftrightarrow -\dfrac{1}{x} \leqslant x-2 \Leftrightarrow x-2+\dfrac{1}{x} \geqslant 0 \Leftrightarrow \dfrac{x^2-2x+1}{x} \geqslant 0 \Leftrightarrow \dfrac{(x-1)^2}{x} \geqslant 0.$

Comme $(x-1)^2 \geqslant 0$, on a: $S =]0; +\infty[$

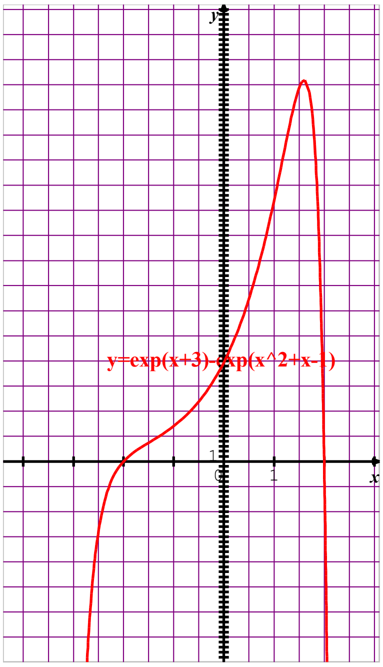
Remarque: une vérification graphique est possible ….



3) $e^{x+3} - e^{x^2+x-1} \leqslant 0 \Leftrightarrow e^{x+3} \leqslant e^{x^2+x-1} \Leftrightarrow x+3 \leqslant x^2+x-1 \Leftrightarrow x^2-4 \geqslant 0 \Leftrightarrow x \leqslant -2$ ou $x \geqslant 2$.

$S =]-\infty; -2] \cup [2; +\infty[$.

Remarque: une vérification graphique est possible ….



27 page 91

f est définie par $f(x) = x\ \mathrm{e}^x - 1$

f est la somme des fonctions $u: x \mapsto x\ \mathrm{e}^x$ et $v : x \mapsto -1$

u est le produit de $x \mapsto x$ et de $x \mapsto \mathrm{e}^x$

On a donc;: $f' = u' + 0$ et $u'(x) = 1\times \mathrm{e}^x + \mathrm{e}^x \times x = \mathrm{e}^x (1 + x)$

$f'(x) = \mathrm{e}^x (1 + x)$

Comme $\mathrm{e}^x > 0$, le signe de $f'(x)$ est celui de $(1 + x)$.

D'où f est strictement décroissante sur $]-\infty; -1]$ et strictement croissante sur $[-1; +\infty[$

$f(-1) = -\mathrm{e}^{-1} - 1 = -\dfrac{1}{\mathrm{e}} - 1 = \dfrac{-1-\mathrm{e}}{\mathrm{e}} = -\dfrac{1+\mathrm{e}}{\mathrm{e}}$

$\lim\limits_{x\to-\infty} xe^x = 0$ (Résultat du cours).

(Savoir le démontrer à partir de $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\mathrm{e}^x}{x} = +\infty$ en posant par exemple $x = -t$)

On donc, $\lim\limits_{x\to-\infty} xe^x - 1 = -1$

$\lim\limits_{x\to+\infty} x = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \mathrm{e}^x = +\infty$, d'où, (limite d'un produit) $\lim\limits_{x\to+\infty} xe^x = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} xe^x - 1 = +\infty$.

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	-1	$\searrow$	$-\dfrac{1}{\mathrm{e}} - 1$	$\nearrow$	$+\infty$

28 page 91

f est définie par $f: x \mapsto x - 1 + \mathrm{e}^x$

* f est la somme de fonctions définies sur $\mathbb{R}$, donc, f est définie sur $\mathbb{R}$.

** Limites aux bornes:

limite en $-\infty$

$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to-\infty} x-1=-\infty \\ \lim\limits_{x\to-\infty} \mathrm{e}^x=0\end{array}\right\}$ donc, d'après la limite d'une somme de fonctions, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$

Remarque: Pour la représentation graphique de f, il apparaît que la droite d'équation $y = x - 1$ est une asymptote en $-\infty$.

Limite en $+\infty$

$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to+\infty} x-1=+\infty \\ \lim\limits_{x\to+\infty} \mathrm{e}^x=+\infty\end{array}\right\}$ donc, d'après la limite d'une somme de fonctions, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

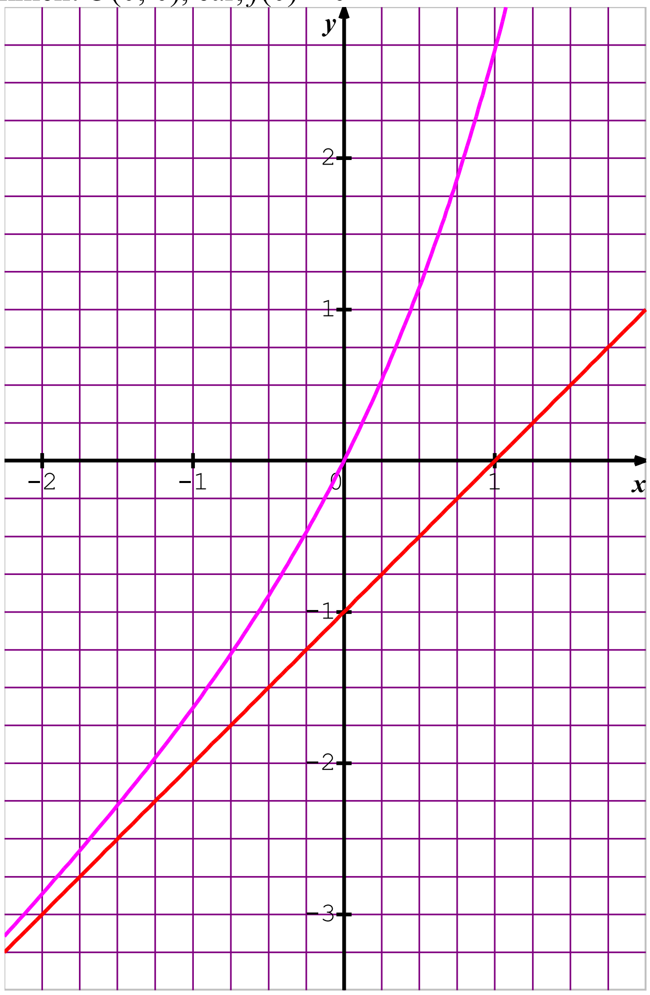
*** Variation

f est la somme de deux fonctions strictement croissante sur $\mathbb{R}$, elle est donc strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

ou

f est la somme de deux fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$, d'où, f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et, pour tout x réel, $f'(x) = 1 + \mathrm{e}^x$ qui est strictement positif sur $\mathbb{R}$, d'où, ...

**** Tracé
Commencer par l'asymptote oblique ...
Préciser quelques points, notamment $O(0;\,0)$, car, $f(0) = 0$



---

29 page 91

f est définie par f: $x \mapsto \dfrac{\mathrm{e}^x - 2}{\mathrm{e}^x + 2}$

* Comme $\mathrm{e}^x > 0$, le dénominateur $\mathrm{e}^x + 2 \neq 0$,
f est définie sur $\mathbb{R}$.
** Limites aux bornes
Limite en $-\infty$.

Comme $\lim\limits_{x \to -\infty} \mathrm{e}^x = 0$, on a: $\left.\begin{matrix} \lim\limits_{x \to -\infty} \mathrm{e}^x - 2 = -2 \\ \lim\limits_{x \to -\infty} \mathrm{e}^x + 2 = +2 \end{matrix}\right\}$, donc, d'après la limite d'un quotient, on a: $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -1$

Limite en $+\infty$.

On a: $\dfrac{e^x-2}{e^x+2} = \dfrac{e^x(1-\dfrac{2}{e^x})}{e^x(1+\dfrac{2}{e^x})} = \dfrac{1-\dfrac{2}{e^x}}{1+\dfrac{2}{e^x}}$

Comme $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x = +\infty$, on a: $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2}{e^x} = 0$, puis, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 1$

*** Variations

f est le quotient de deux fonctions dérivables sur ℝ, d'où, *f* est dérivable sur les intervalles de son domaine de définition (ici: ℝ.)

$f'(x) = \dfrac{e^x(e^x+2)-e^x(e^x-2)}{(e^x+2)^2} = \dfrac{4e^x}{(e^x+2)^2}$

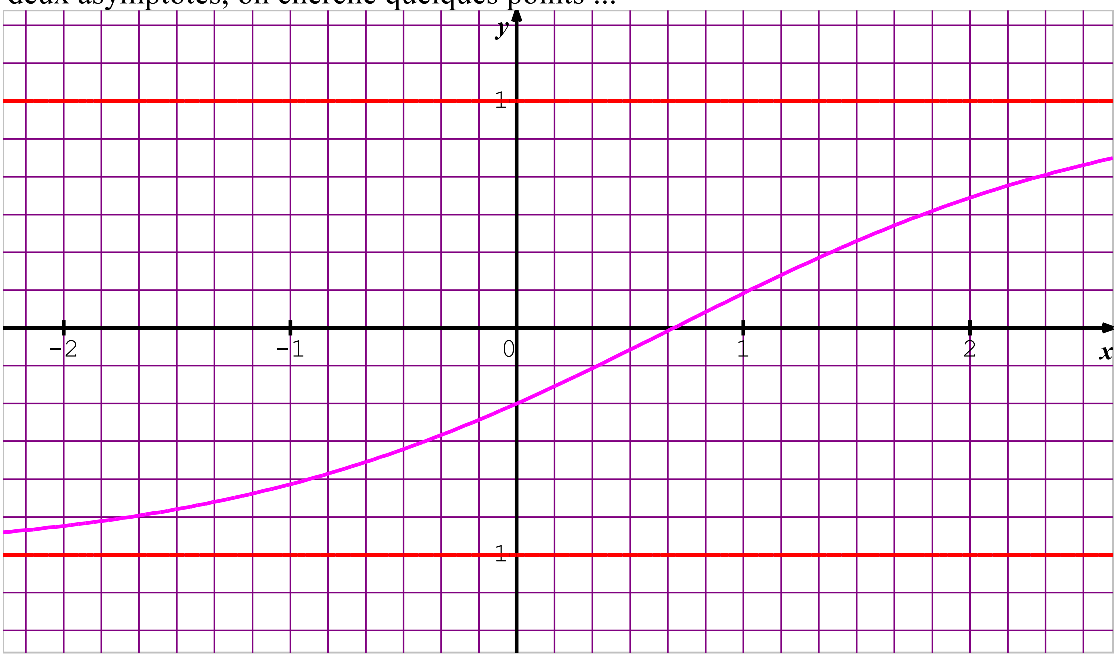
La dérivée est donc strictement positive.

f est par conséquent strictement croissante.

**** Tracé

L'étude des limites montre deux asymptotes d'équations respectives $y = -1$ et $y = 1$.

On trace ces deux asymptotes, on cherche quelques points ...



---

33 page 91

f est la fonction définie sur ℝ par f: $x \mapsto 4\dfrac{e^x}{e^x+1}$.

$\mathscr{C}$ est la courbe représentative de *f* dans un repère orthonormal.

a) Comme $f(x) = \dfrac{4}{1+\dfrac{1}{e^x}}$ et que $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x = +\infty$, on a: $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 4$

Comme $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0$, on a: $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 0$

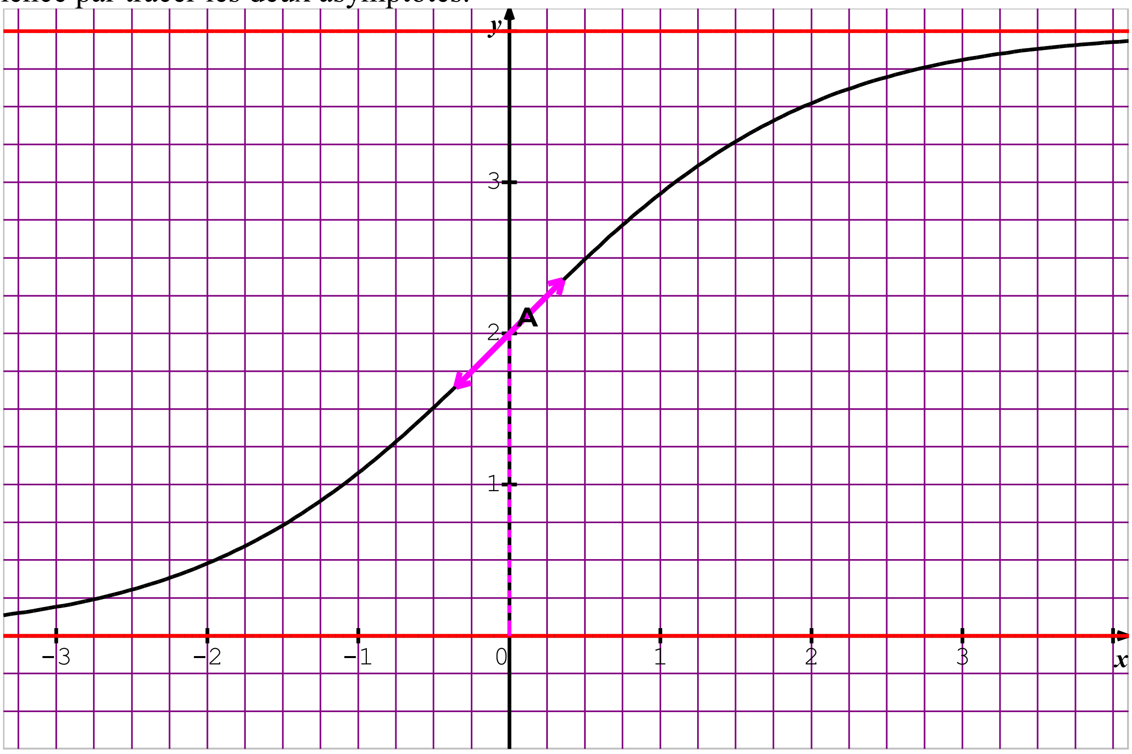
On en déduit que la droite d'équation $y = 4$ est asymptote en $+\infty$ et que la droite d'équation $y = 0$ (axe des abscisses) est asymptote en $-\infty$.
b) f est le quotient de ... par ... dérivables sur ℝ.
f est donc dérivable sur son domaine de définition, et, pour tout x réel,

$$f'(x) = 4 \times \frac{e^x(e^x+1) - e^x \times e^x}{(e^x+1)^2} = 4\times \frac{e^x}{(e^x+1)^2}$$

La dérivée étant strictement positive, la fonction f est strictement croissante sur ℝ.

x	$-\infty$ $\qquad$ $+\infty$
$f'(x)$	+
$f(x)$	0 ↗ 4

c) On commence par tracer les deux asymptotes.



On place quelques points notamment $A(0; 2)$ et sa tangente de pente $f'(0) = 1$

Compléments:

Conjecture: Le graphique fait apparaître le point $A(0; 2)$ comme centre de symétrie

Preuve: $f(0 + h) + f(0 - h) = \dfrac{4e^h}{e^h+1} + \dfrac{4e^{-h}}{e^{-h}+1}$

Comme $e^h \times e^{-h} = 1$

$$\frac{4e^{-h}}{e^{-h}+1} = \frac{4}{1+e^h}$$

$$f(0 + h) + f(0 - h) = \frac{4e^h}{e^h+1} + \frac{4}{1+e^h} = \frac{4(e^h+1)}{e^h+1} = 4$$

Comme $\dfrac{f(0+h)+f(0-h)}{2} = 2$, le point $A(0; 2)$ est centre de symétrie de $\mathscr{C}_f$.

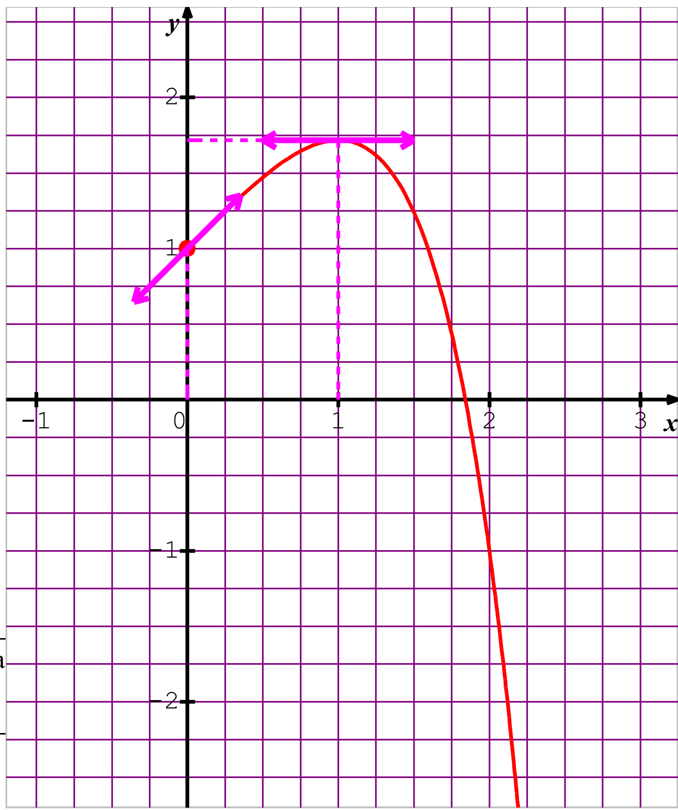
34 page 91

f est la fonction définie sur $I = [0; +\infty[$ par $f(x) = (2 - x)\,e^x - 1$
a) f est la somme de u .... et v .... dérivable sur I
u est le produit de ... et de ... dérivables sur I
d'où, f est dérivable sur I, et, pour tout x de I, $f'(x) = -e^x + e^x(2 - x) - 0 = e^x(1 - x)$
Le signe de $f'(x)$ est celui de $1 - x$, d'où, ...

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	1	$\nearrow$	$e-1$	$\searrow$	$-\infty$

La limite en $+\infty$ est étudiée après:
$\lim\limits_{x\to+\infty} 2-x = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x = +\infty$, d'où, d'après la limite d'un produit, on a: $\lim\limits_{x\to+\infty} (2-x)e^x = -\infty$.
Finalement: $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$.
b) tracé
Placer le maximum et sa tangente horizontale
Placer le point $(0; 1)$ et comme $f'(0) = 1$, la tangente en ce point a son coefficient directeur égal à 1.

c) Sur $[0; 1]$, la fonction f est strictement croissante et $f(0) = 1$, d'où, pour tout $x \in [0; 1]$, $f(x) \geqslant 1$.
Sur $[1; +\infty[$, f est continue
f est strictement décroissante
f réalise donc une bijection de $[1; +\infty[$ sur $]\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)\,; f(1)] =]-\infty; e - 1]$
Comme $0 \in]-\infty; e - 1]$, l'équation $f(x) = 0$ admet une et une seule solution α.
$f(2) = -1$, d'où, $\alpha \in [1; 2]$
Un balayage à la calculatrice ou au tableur donne:
$f(1{,}84) = 0{,}007$ et $f(1{,}85) = -0{,}046$
$1{,}84 < \alpha < 1{,}85$
d) D'après l'étude précédente et la variation de f,
si $0 \leqslant x \leqslant 1$ alors $f(x) > 0$



Si $1 \leqslant x < \alpha$ alors $f(x) > f(\alpha)$, d'où, $f(x) > 0$
Si $\alpha < x$ alors $f(x) < f(\alpha)$, d'où, $f(x) < 0$

35 page 92

f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f\colon x \mapsto \dfrac{1}{1+e^{-x}}$.

$\mathscr{C}$ est sa courbe représentative dans un repère orthonormal.

a) f est de la forme $\dfrac{1}{u}$ avec $u : x \mapsto 1+e^{-x}$ dérivable sur $\mathbb{R}$ et u ne s'annulant pas sur $\mathbb{R}$, donc, f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f = \dfrac{-u'}{u^2}$.

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $u'(x) = -e^{-x}$, d'où, $f'(x) = \dfrac{-(-e^{-x})}{(1+e^{-x})^2} = \dfrac{e^{-x}}{(1+e^{-x})^2}$.

Comme pour tout X réel, $e^X > 0$, $f'(x) > 0$ sur $\mathbb{R}$ et f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

$\lim\limits_{x\to-\infty} e^{-x} = \lim\limits_{x\to+\infty} e^{x}$ (limite de fonction composée).

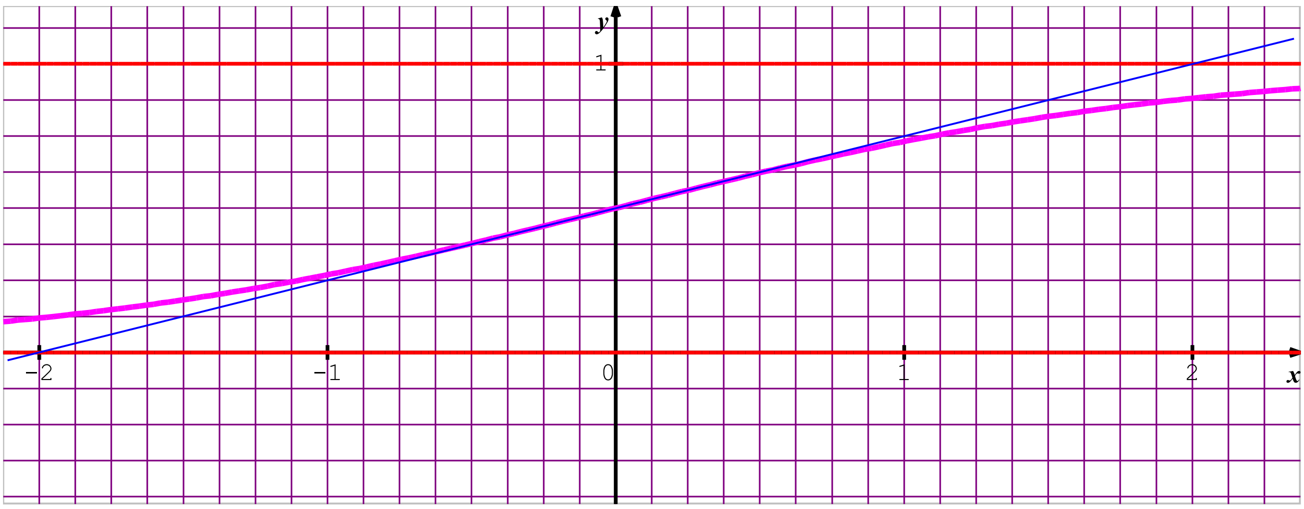
On a donc: $\lim\limits_{x\to-\infty} (1+e^{-x}) = +\infty$, puis, $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{1}{1+e^{-x}} = 0$

La droite d'équation $y = 0$ est asymptote à $\mathscr{C}$ en $-\infty$.

$\lim\limits_{x\to+\infty} e^{-x} = \lim\limits_{x\to-\infty} e^{x} = 0$, d'où, $\lim\limits_{x\to+\infty} (1+e^{-x}) = 1$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{1+e^{-x}} = 1$

La droite d'équation $y = 1$ est asymptote à $\mathscr{C}$ en $+\infty$.

b) Tracé



c) La fonction f' est le quotient de deux fonctions u et v définies et dérivables sur $\mathbb{R}$.

On a: $u : x \mapsto e^{-x}$, d'où, $u'(x) = -e^{-x}$ et $v : x \mapsto (1+e^{-x})^2$, d'où, $v'(x) = 2\times(-e^{-x})\times(1+e^{-x})$

$$f''(x) = \frac{-e^{-x}(1+e^{-x})^2 - 2\times(-e^{-x})(1+e^{-x})\times e^{-x}}{(1+e^{-x})^4}$$ **Remarquer**: Factorisation de ....

$$f''(x) = \frac{e^{-x}(1+e^{-x})(-(1+e^{-x})+2e^{-x})}{(1+e^{-x})^4} = \frac{e^{-x}(-1+e^{-x})}{(1+e^{-x})^3}$$

Le signe de $f''(x)$ est donc celui de $(-1+e^{-x})$

Or, $e^{-x} > 1 \Leftrightarrow -x > 0 \Leftrightarrow x < 0$ ....

"J'ai toujours pensé qu'il n'avait pas assez d'imagination pour devenir mathématicien !" ***Hilbert, David***
au sujet d'un étudiant qui a renoncé aux mathématiques pour la poésie

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f''(x)$		$+$	0	$-$	
$f'(x)$		↗	$\frac{1}{4}$	↘	

f' étant croissante sur $\mathbb{R}^-$, on a: Pour $x \leqslant 0$, on a: $f'(x) \leqslant f'(0)$

f' étant décroissante sur $\mathbb{R}^+$, on a: Pour $x \geqslant 0$, on a: $f'(x) \leqslant f'(0)$

Conclusion: $f'(0) = \frac{1}{4}$ est le maximum de f' atteint en 0.

d) Une équation de la tangente $\mathcal{T}$ en 0 est: $y = \frac{1}{4}(x-0) + f(0) = \frac{1}{4}x + \frac{1}{2}$

Pour étudier la position relative de $\mathcal{C}$ et $\mathcal{T}$, on étudie **le signe** de $d(x) = f(x) - \left(\frac{1}{4}x + \frac{1}{2}\right)$

Une méthode possible est d'étudier la variation de d **puisqu'on sait que $d(0) = 0$**

$d'(x) = f'(x) - \frac{1}{4}$, d'où, $d'(x) \leqslant 0$ d'après la question c)

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$d''(x) = f''(x)$		$+$	0	$-$	
$d'(x)$		$-$		$-$	
$d(x)$		↘	0	↘	
Signe de $d(x)$		$+$		$-$	
Position relative de $\mathcal{C}$ et $\mathcal{T}$.		$\mathcal{C}$ au-dessus de $\mathcal{T}$	Point de tangence	$\mathcal{C}$ au-dessous de $\mathcal{T}$	

---

37 page 92

f est définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{2}{e^x + 2}$

a) **Variations:**

Première méthode:

f est la composée de $x \xrightarrow{u} e^x \xrightarrow{v} e^x + 2 \xrightarrow{w} \frac{1}{e^x+2} \xrightarrow{t} \frac{2}{e^x+2}$

La fonction u est la fonction exp strictement croissante sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $]0; +\infty[$

La fonction v est la fonction affine $x \mapsto x + 2$ strictement croissante sur $]0; +\infty[$ à valeurs dans $]2; +\infty[$

la fonction w est la fonction inverse $x \mapsto \frac{1}{x}$ strictement décroissante sur $]2; +\infty[$ à valeurs dans $]0; \frac{1}{2}[$

La fonction t est la fonction linéaire $x \mapsto 2x$ strictement croissante sur $]0; \frac{1}{2}[$ à valeurs dans $]0; 1[$

Conclusion: la fonction f est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$.

Deuxième méthode:

f est dérivable sur $\mathbb{R}$ car f est la composée de fonctions dérivables.

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = \frac{-2\mathrm{e}^x}{(\mathrm{e}^x+2)^2}$.

Comme pour tout x réel, $\mathrm{e}^x > 0$, il en découle que f est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$.

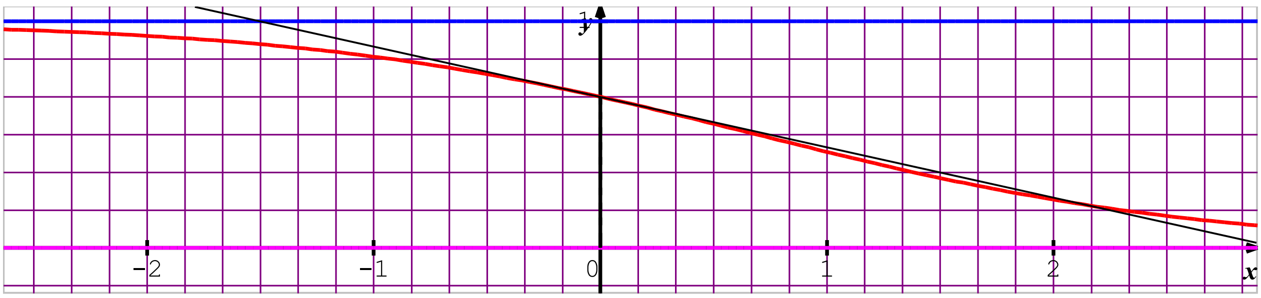
Limites

En $-\infty$, on sait: $\lim_{x\to-\infty} \mathrm{e}^x = 0$, d'où, $\lim_{x\to-\infty} (\mathrm{e}^x + 2) = 2$, puis, $\lim_{x\to-\infty} \frac{2}{\mathrm{e}^x+2} = 1$

En $+\infty$, on sait: $\lim_{x\to+\infty} \mathrm{e}^x = +\infty$, d'où, $\lim_{x\to+\infty} (\mathrm{e}^x + 2) = +\infty$, puis, $\lim_{x\to+\infty} \frac{2}{\mathrm{e}^x+2} = 0$

b) D'après l'étude des limites, la droite d'équation $y = 1$ est asymptote en $-\infty$, et, la droite d'équation $y = 0$ (axe des abscisses) est asymptote en $+\infty$.

Quelques valeurs dont $f(0) = \frac{2}{3}$ …. quelques coefficients directeurs de tangente dont $f'(0) = -\frac{2}{9}$



38 page 92

f est définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \mathrm{e}^{2x} + \mathrm{e}^x - 2$

a) **Variations**

f est la somme de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$, donc, f est dérivable sur $\mathbb{R}$, et, pour tout x réel, $f'(x) = 2\mathrm{e}^{2x} + \mathrm{e}^x$

Comme pour tout x réel, $\mathrm{e}^x > 0$, il en découle que f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

Limite en $+\infty$.

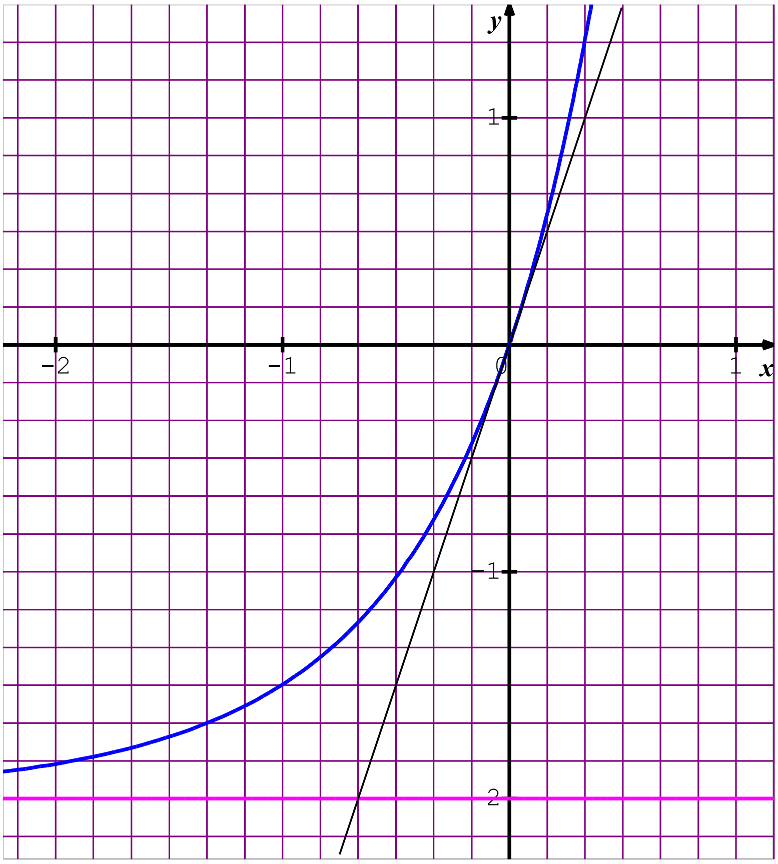
$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ (aucun problème …)

Limite en $-\infty$.

$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -2$ (aucun problème …)

b) Une asymptote d'équation $y = -2$ en $-\infty$.

Tracé:



c) Intersection avec l'axe des abscisses.

Première méthode:

f réalise une bijection de $\mathbb{R}$ dans $]-2; +\infty[$.

Comme $0 \in]-2; +\infty[$, l'équation $f(x) = 0$ a une et une seule solution.

Comme $f(0) = 0$, cette solution est 0.

Deuxième méthode:

On pose $e^x = X$.

L'équation $e^{2x} + e^x - 2 = 0$ est équivalente au système $\begin{cases} X = e^x \\ X^2 + X - 2 = 0 \end{cases}$

L'équation du second degré a deux solutions réelles: 1 et –2

$e^x = 1$ a pour solution 0 et $e^x = -2$ n'a aucune solution.

La tangente au point $O(0; 0)$ est: $y = f'(0).x = (2e^0 + e^0)x = 3x$

---

41 page 92

a) $f(x) = e^{x^2}$

f est la composée $v \circ u$ où $u : x \mapsto x^2$ et $v: x \mapsto e^x$

Limite en –∞ de f: Comme $\lim\limits_{x \to -\infty} x^2 = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} e^x$ alors $\lim\limits_{x \to -\infty} e^{x^2} = +\infty$.

Limite en +∞ de f: Comme $\lim\limits_{x \to +\infty} x^2$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} e^x$ alors $\lim\limits_{x \to +\infty} e^{x^2} = +\infty$.

Dérivée de f: f est dérivable sur $\mathbb{R}$, et, $f'(x) = 2x\, e^{x^2}$

Variations de f:

$f'(x)$ est du signe de x car, pour tout X, $\exp(X) > 0$

f est strictement décroissante sur $\mathbb{R}^-$ strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$.

Le minimum $f(0) = 1$

b) $f(x) = \dfrac{e^{3x} - 3}{e^x + 1}$

f est le quotient $\dfrac{u}{v}$ où $u : x \mapsto e^{3x} - 3$ et $v : x \mapsto e^x + 1$

Limite en $-\infty$ de f: $\lim\limits_{x\to-\infty} 3x = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0$, donc, $\lim\limits_{x\to-\infty} e^{3x} = 0$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} e^{3x} - 3 = -3$
et $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x + 1 = 1$

Par conséquent: $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{e^{3x} - 3}{e^x + 1} = -3$

Limite en $+\infty$ de f:
Pour chercher la limite en $+\infty$, il est nécessaire de transformer l'écriture.
En multipliant le numérateur et le dénominateur par e^{-x} ou en factorisant par e^x,
il vient: $f(x) = \dfrac{(e^{3x} - 3)e^{-x}}{(e^x + 1)e^{-x}} = \dfrac{e^{2x} - 3e^{-x}}{1 + e^{-x}}$
On a alors: $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{2x} - 3e^{-x} = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} 1 + e^{-x} = 1$
Par conséquent: $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^{3x} - 3}{e^x + 1} = +\infty$.

Dérivée de f: f est dérivable sur ℝ, et, $f'(x) = \dfrac{3e^{3x}(e^x + 1) - e^x(e^{3x} - 3)}{(e^x + 1)^2} = \dfrac{2e^{4x} + 3e^{3x} + 3e^x}{(e^x + 1)^2}$

Variations de f:
$f'(x) > 0$ car, pour tout X, $\exp(X) > 0$
f est strictement croissante sur ℝ.

Remarque sur C_f
C_f a une asymptote horizontale d'équation $y = -3$ en $-\infty$.

c) $f(x) = \dfrac{e^{-x}}{e^{2x} + 5}$

f est le quotient $\dfrac{u}{v}$ où $u : x \mapsto e^{-x}$ et $v : x \mapsto e^{2x} + 5$

Limite en $-\infty$ de f: $\lim\limits_{x\to-\infty} e^{-x} = \lim\limits_{x\to+\infty} e^x = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} e^{2x} = 0$, d'où, $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{e^{-x}}{e^{2x} + 5} = +\infty$

Limite en $+\infty$ de f: $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{-x} = \lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{2x} = +\infty$, d'où, $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^{-x}}{e^{2x} + 5} = 0$

Dérivée de f: f est dérivable sur ℝ, et, $f'(x) = \dfrac{-e^{-x}(e^{2x} + 5) - 2e^{2x}(e^{-x})}{(e^{2x} + 5)^2} = \dfrac{-3e^x - 5e^{-x}}{(e^{2x} + 5)^2}$

Variations de f:
$f'(x) < 0$ car, pour tout X, $\exp(X) > 0$
f est strictement décroissante sur ℝ.

Remarque sur C_f

C_f a une asymptote horizontale d'équation $y = 0$ en $+\infty$.

d) $f(x) = \exp\dfrac{2x+1}{x+3}$

f est la composée $v \circ u$ où $u : x \mapsto \dfrac{2x+1}{x+3}$ et $v: x \mapsto e^x$

Limites en –3.
Deux cas:

Si $\boldsymbol{x < -3}$, on a: $\lim\limits_{x\to -3} 2x+1 = -5$ et $\lim\limits_{\substack{x\to -3\\ x<-3}} x+3 = 0$ et $x-3<0$ donc $\lim\limits_{\substack{x\to -3\\ x<-3}} \dfrac{2x+1}{x+3} = +\infty$,

Or, $\lim\limits_{x\to +\infty} e^x = +\infty$, d'où, $\lim\limits_{\substack{x\to -3\\ x<-3}} \exp\dfrac{2x+1}{x+3} = +\infty$.

Si $\boldsymbol{x > -3}$, on a: $\lim\limits_{x\to -3} 2x+1 = -5$ et $\lim\limits_{\substack{x\to -3\\ x>-3}} x+3 = 0$ et $x-3>0$ donc $\lim\limits_{\substack{x\to -3\\ x>-3}} \dfrac{2x+1}{x+3} = -\infty$,

Or, $\lim\limits_{x\to -\infty} e^x = 0$, d'où, $\lim\limits_{\substack{x\to -3\\ x>-3}} \exp\dfrac{2x+1}{x+3} = 0$.

Limites en $-\infty$ et en $+\infty$ de *f*:
On cherche d'abord la limite en $+\infty$ et en $-\infty$ de u.

u étant une fonction rationnelle, on a: $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{2x+1}{x+3} = \lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{2+\frac{1}{x}}{1+\frac{3}{x}} = 2$

D'où, $\lim\limits_{x\to +\infty} \exp\dfrac{2x+1}{x+3} = \lim\limits_{x\to 2} e^x = e^2$ (Continuité de la fonction exp en 2)
Même démarche et même résultat en $-\infty$.

Dérivée de *f*:
u étant une fonction rationnelle est dérivable sur $]-\infty; -3[$ et sur $]-3; +\infty[$.

$u'(x) = \dfrac{2(x+3)-(2x+1)}{(x+3)^2} = \dfrac{5}{(x+3)^2}$

$f'(x) = \dfrac{5}{(x+3)^2}\exp\dfrac{2x+1}{x+3}$

Variations de *f*:
$f'(x) > 0$ car, pour tout X, $\exp(X) > 0$
f est strictement croissante sur sur $]-\infty; -3[$ et sur $]-3; +\infty[$.

Remarque sur C_f
C_f a une asymptote horizontale d'équation $y = e^2$ en $-\infty$ et en $+\infty$
et une asymptote verticale d'équation $x = -3$
Remarquer le point de coordonnées (–3; 0)

e) $f(x) = x\, e^{1/x}$

Limites en $-\infty$ et en $+\infty$ de *f*:

On cherche d'abord la limite en $+\infty$ et en $-\infty$ de $\dfrac{1}{x}$

$\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x} = 0$ et $\lim\limits_{x\to 0} e^x = e^0 = 1$, d'où, $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{1/x} = 1$

$\lim\limits_{x\to+\infty} xe^{1/x} = +\infty$.

Même démarche en $-\infty$ donne: $\lim\limits_{x\to-\infty} xe^{1/x} = -\infty$.

Limites en 0.

Deux cas:

Si $x < 0$, on a: $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}} \dfrac{1}{x} = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0$, d'où, $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}} xe^{1/x} = 0$

Quand $x > 0$, on obtient une forme indéterminée

On écrit: $f(x) = \dfrac{e^{1/x}}{\dfrac{1}{x}}$

on a: $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \dfrac{1}{x} = +\infty$ et $\lim\limits_{t\to+\infty} \dfrac{e^t}{t} = +\infty$, d'où, $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x) = +\infty$

Dérivée de *f*:

f est le produit de u: $x \mapsto x$ et de v: $x \mapsto e^{1/x}$

v est la composée de la fonction inverse suivie de la fonction exponentielle.

v est par conséquent dérivable sur $]0; +\infty[$ et $]-\infty; 0[$. Il en est de même pour f.

On a alors: $v'(x) = -\dfrac{1}{x^2}\ e^{1/x}$ et $f'(x) = 1.e^{1/x} + x\times\left(-\dfrac{1}{x^2}.e^{1/x}\right) = \left(1-\dfrac{1}{x}\right)e^{1/x} = \dfrac{x-1}{x}e^{1/x}$

Variations de *f*:

$f'(x)$ est du signe de $x(x-1)$ car, pour tout X, $\exp(X) > 0$

$f'(x) > 0$ sur $]-\infty; 0[$ et sur $]1; +\infty[$. $f'(x) < 0$ sur $]0;1[$

f est strictement croissante sur $]-\infty; 0[$ et sur $[1; +\infty[$ et strictement décroissante sur $]0;1]$

f admet un minimum local $f(1) = e$

Remarque sur C_f

C_f a une asymptote verticale d'équation $x = 0$

Remarquer le point de coordonnées (0; 0)

Direction asymptotique: $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} e^{1/x} = 1$ De même en $-\infty$.

La courbe a une direction asymptotique de coefficient directeur 1 (parallèle à la première bissectrice dans un repère orthonormal)

Asymptote oblique: On cherche la limite de $f(x) - x$ en l'infini.

On cherche donc la limite de $x\ e^{1/x} - x = x(e^{1/x} - 1)$

En remarquant que $\frac{1}{x}$ tend vers 0 en l'infini, on pose $h = \frac{1}{x}$ (d'où $x = \frac{1}{h}$) et on cherche la limite en 0 de $\frac{e^h - 1}{h}$

On reconnaît la limite du taux d'accroissement de l'exponentielle en 0.

$\lim\limits_{x \to 0} \frac{e^h - 1}{h} = \exp'(0) = \exp(0) = 1$

Finalement: $f(x) - x$ a pour limite 1 en l'infini et $f(x) - (x + 1)$ a une limite nulle en l'infini.

La droite d'équation $y = x + 1$ est asymptote à C_f en $+\infty$ et $-\infty$.

f) $f(x) = e^{3x} - e^{2x} - 1$

Limite en $-\infty$ de f: aucune difficulté ... $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -1$

Limite en $+\infty$ de f: Forme indéterminée... On factorise le terme de plus haut degré

$f(x) = e^{3x}(1 - e^{-x} - e^{-3x})$ $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

Dérivée de f:

$f'(x) = 3e^{3x} - 2e^{2x} = e^{2x}(3e^x - 2)$

Variations de f:

$f'(x)$ est du signe de $(3e^x - 2)$ car, pour tout X, $\exp(X) > 0$

$3e^x - 2 > 0 \Leftrightarrow e^x > \frac{2}{3} \Leftrightarrow x > \ln\left(\frac{2}{3}\right)$ (ln bijection réciproque strictement croissante de l'exponentielle)

$3e^x - 2 < 0 \Leftrightarrow e^x < \frac{2}{3} \Leftrightarrow x < \ln\left(\frac{2}{3}\right)$ (ln bijection réciproque strictement croissante de l'exponentielle)

$f'(x) < 0$ sur $]-\infty; \ln\left(\frac{2}{3}\right)[$. $f'(x) > 0$ sur $]\ln\left(\frac{2}{3}\right); +\infty[$

f est strictement décroissante sur $]-\infty; \ln\left(\frac{2}{3}\right)]$ et strictement croissante sur sur $[\ln\left(\frac{2}{3}\right); +\infty[$

f admet un minimum $f\left(\ln\left(\frac{2}{3}\right)\right) = -\frac{31}{27}$

Remarque sur C_f

C_f a une asymptote horizontale d'équation $y = -1$ en $-\infty$.

Index

---

47 page 92

f est la fonction définie sur $D_f =]1; +\infty[$ par $f(x) = \exp\left(\frac{3+x}{1-x}\right)$

1) Sens de variations.

f est la composée de $u: x \mapsto \frac{3+x}{1-x}$ suivie de la fonction exp

Comme exp est une fonction strictement croissante sur $\mathbb{R}$, la variation de f sur D_f est celle de u.

$u'(x) = \frac{1 \times (1-x) - (-1) \times (3+x)}{(1-x)^2} = \frac{4}{(1-x)^2}$.

Comme $u'(x) > 0$ sur D_f, u, et par conséquent f, est strictement croissante sur D_f.

2) ***Reconnaître la limite d'une fonction composée***

limite en 1

Nécessairement $x > 1$, d'où, $1 - x < 0$

Comme $\lim\limits_{x \to 1} (3 + x) = 4$ et $\lim\limits_{x \to 1} (1 - x) = 0$, on a: $\lim\limits_{x \to 1} u(x) = -\infty$.

On en déduit: $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = \lim\limits_{X \to -\infty} e^X = 0$

Limite en +∞.

Comme $x > 0$, $\dfrac{3+x}{1-x} = \dfrac{x\left(\dfrac{3}{x}+1\right)}{x\left(\dfrac{1}{x}-1\right)} = \dfrac{\dfrac{3}{x}+1}{\dfrac{1}{x}-1}$, on en déduit, $\lim\limits_{x \to +\infty} u(x) = -1$

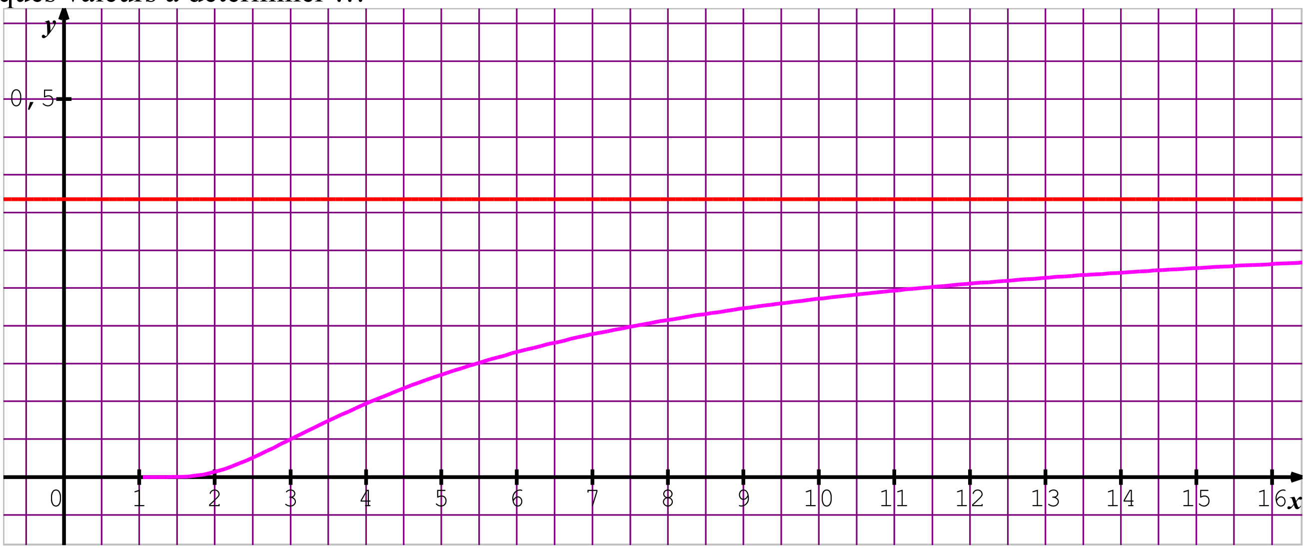
$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{X \to -1} e^X = e^{-1} = \dfrac{1}{e}$ (Continuité de l'exp en -1)

3) Tracé

Reconnaître l'asymptote d'équation $\dfrac{1}{e}$.

En 1, on s'approche du point de coordonnées (1; 0).

Quelques valeurs à déterminer …



Le repère est orthogonal

---

51 page 93

a) Les solutions de l'équation différentielle $y' = -5y$ sont les fonctions $x \mapsto A\, e^{-5x}$

Comme $f(0) = 5$, on a: $A\; e^{-5\times 0} = 5$, d'où, $A = 5$

La solution de $\begin{cases} y' = -5y \\ f(0) = 5 \end{cases}$ est la fonction $f : x \mapsto 5\, e^{-5x}$

b) $3y' + 5y = 0 \Leftrightarrow y' = -\dfrac{5}{3} y$

Les solutions de l'équation différentielle $y' = -\dfrac{5}{3} y$ sont les fonctions $x \mapsto A\, e^{-\frac{5}{3}x}$

Comme $f(-1) = 0$, on a: $A\; e^{-\frac{5}{3}\times(-1)} = 0$, d'où, $A = 0$

La solution de $\begin{cases} 3y'+5y=0 \\ f(-1)=0 \end{cases}$ est la fonction $f : x \mapsto 0$ (fonction nulle)

c) $2y - 4y' = 0 \Leftrightarrow y' = \dfrac{1}{2}y$

a) Les solutions de l'équation différentielle $y' = \dfrac{1}{2}y$ sont les fonctions $x \mapsto A\ \mathrm{e}^{\frac{1}{2}x}$

Comme $f'(1) = 1$, on calcule $f'(x) = \dfrac{1}{2}A\ \mathrm{e}^{\frac{1}{2}x}$ et $f'(1) = \dfrac{1}{2}A\ \mathrm{e}^{\frac{1}{2}} = 1$.

On en déduit: $A = 2\ \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}}$

La solution de $\begin{cases} 2y-4y'=0 \\ f'(1)=1 \end{cases}$ est la fonction $f : x \mapsto 2\ \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}} \times \mathrm{e}^{\frac{1}{2}x} = 2\ \mathrm{e}^{\frac{1}{2}(x-1)}$

d) $0{,}1y' + 3y = 0 \Leftrightarrow y' = -30y$

Les solutions de l'équation différentielle $y' = -30y$ sont les fonctions $x \mapsto A\ \mathrm{e}^{-30x}$

Comme $f'(0) = 1$, on calcule $f'(x) = -30A\ \mathrm{e}^{-30x}$ et $f'(0) = -30A = 1$

On en déduit $A = -\dfrac{1}{30}$

La solution de $\begin{cases} 0{,}1y'+3y=0 \\ f'(0)=1 \end{cases}$ est la fonction $f : x \mapsto -\dfrac{1}{30}\ \mathrm{e}^{-30x}$

---

55 page 93

(E): $y' = y(1 - y)$

On suppose que les solutions de (E) **ne s'annulent pas** sur $\mathbb{R}$ et on pose $z = \dfrac{1}{y}$.

IMPORTANT: z et y sont des fonctions.

$z' = \dfrac{-y'}{y^2}$ (Dérivée de l'inverse d'une fonction)

De $z' = \dfrac{-y'}{y^2}$, on tire $y' = -z' \times y^2$ $\qquad z = \dfrac{1}{y}$, on tire: $y = \dfrac{1}{z}$

En substituant dans (E), on a: $-z' \times \left(\dfrac{1}{z}\right)^2 = \dfrac{1}{z}(1 - \dfrac{1}{z})$

En multipliant par z^2 les deux membres, il vient: $-z' = z(1 - \dfrac{1}{z})$

Puis, $z' = -z + 1$ $\qquad (E')$

Cours: L'équation (E') est de la forme $y' = ay + b$, ($a = -1$ et $b = 1$) d'où,

les solutions de (E') sont les fonctions: $x \mapsto C\ \mathrm{e}^{-x} - \dfrac{1}{-1} = C\ \mathrm{e}^{-x} + 1$ où $C \in \mathbb{R}$.

Comme $y = \dfrac{1}{z}$, on a: les solutions de (E) sont les fonctions f: $x \mapsto \dfrac{1}{Ce^{-x}+1}$ à condition de choisir C tel que

$C\ e^{-x} + 1 \neq 0$ (Cette condition est assurée quand $C > 0$)

Vérification: $f'(x) = \dfrac{-(-Ce^{-x})}{(Ce^{-x}+1)^2} = \dfrac{Ce^{-x}}{(Ce^{-x}+1)^2}$

$f(x)(1-f(x)) = \dfrac{1}{Ce^{-x}+1}\left(1 - \dfrac{1}{Ce^{-x}+1}\right) = \dfrac{1}{Ce^{-x}+1} \times \dfrac{Ce^{-x}+1-1}{Ce^{-x}+1} = \dfrac{Ce^{-x}}{(Ce^{-x}+1)^2}$

Voici 10 courbes de la famille (C entier de –5 à 5)

56 page 94

L'équation $y' = 2y + 4$ est de la forme $y' = ay + b$.

Les solutions sont donc les fonctions $x \mapsto C\ e^{2x} - 2$

Parmi ces solutions, on cherche celle qui vérifie $f(2) = 3$

On a donc: $C\,e^4 - 2 = 3$, soit, $C = \dfrac{5}{e^4} = 5e^{-4}$

Conclusion:

la solution de l'équation qui passe par le point $A(2;\,3)$ est la fonction f: $x \mapsto 5e^{-4}\ e^{2x} - 2 = 5\ e^{2x-4} - 2$

---

57 page 93

(E): $y' + 4y = 3xe^{2x}$

(E'): $y' + 4y = 0$

a) L'équation différentielle (E') est de la forme $y' = ay$ avec $a = -4$, donc, l'ensemble des solutions de (E') est l'ensemble des fonctions f: $x \mapsto Ce^{-4x}$ où $C \in \mathbb{R}$.

b) Soit une fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = (ax + b)e^{2x}$

g est solution de (E) si et seulement si, pour tout x réel, $g'(x) + 4g(x) = 3xe^{2x}$
Or, $g'(x) = ae^{2x} + 2(ax + b)e^{2x} = (2ax + (a + 2b))e^{2x}$
g est solution de (E) si et seulement si, pour tout x réel, $(2ax + (a + 2b))e^{2x} + 4(ax + b)e^{2x} = 3xe^{2x}$
g est solution de (E) si et seulement si, pour tout x réel, $(6ax + (a + 6b))e^{2x} = 3xe^{2x}$
Comme $e^{x} > 0$, on en déduit:
g est solution de (E) si et seulement si, pour tout x réel, $6ax + (a + 6b) = 3x$
Par identification des coefficients, on a: $\begin{cases} 6a=3 \\ a+6b=0 \end{cases}$, soit: $a = \frac{1}{2}$ et $b = -\frac{1}{12}$.
Vérification: $g(x) = (\frac{1}{2}x - \frac{1}{12})e^{2x}$ d'où, $g'(x) = \frac{1}{2}e^{2x} + 2(\frac{1}{2}x - \frac{1}{12})e^{2x} = (x + \frac{1}{3})e^{2x}$
$(x + \frac{1}{3})e^{2x} + 4 \times (\frac{1}{2}x - \frac{1}{12})e^{2x} = 3xe^{2x}$
Complément:
Supposons une autre solution h de (E), on a alors:
$h'(x) + 4h(x) = 3xe^{2x}$
Or,
$g'(x) + 4g(x) = 3xe^{2x}$
Le système $h'(x) + 4h(x) = 3xe^{2x}$ et $g'(x) + 4g(x) = 3xe^{2x}$ implique $(h'(x) - g'(x)) + 4(h(x) - g(x)) = 0$
En posant $\phi = h - g$, il vient: ϕ est une solution de (E'), donc, $\phi = f$ (voir a))
donc, $h(x) = Ce^{-4x} + (\frac{1}{2}x - \frac{1}{12})e^{2x}$ où $C \in \mathbb{R}$.
Réciproquement:
$h'(x) = f'(x) + g'(x)$
et $h'(x) + 4h(x) = f'(x) + g'(x) + 4(f(x) + g(x) = (f'(x) + 4f(x)) + (g'(x) + 4g(x))$
Comme $f'(x) + 4f(x) = 0$ et que $g'(x) + 4g(x) = 3xe^{2x}$, on obtient: $h'(x) + 4h(x) = 3xe^{2x}$
Conclusion: les solutions de (E) sont les fonctions
$x \mapsto Ce^{-4x} + (\frac{1}{2}x - \frac{1}{12})e^{2x}$ où $C \in \mathbb{R}$.

---

63 page 94

Équation différentielle: $y' = -3y+5$ (E)
f solution de (E) telle que $f(0)=0$

Quel que soit la pas h, on sait:
Approximation affine de f: $f(x_n+h) \approx f(x_n) + h.f'(x_n)$

Or, d'après (E): $f'(x_n) = -3f(x_n)+5$,
on obtient l'approximation suivante: $f(x_n+h) \approx f(x_n)+h.(-3f(x_n)+5) \approx (-3h+1).f(x_n)+5h$
En notant x_n, y_n et y'_n les approximations obtenues au tableur, on a:
$y_{n+1} = y_n + h \times y'_n = y_n + h \times (-3y_n + 5)$

	A	B	C	D
1	n	x_n	$y_n \approx f(x_n)$	$y'n \approx f'(x_n)$
2	0	0	0	" = -3*C2 + 0,5
3	1	" =B1 + pas	" =C2 + pas*D2	
4	2			
5	3			
6	4			
7	5			
8	6			

En rouge, les données f(0) = 0 et $y' = -3y+5$
En vert les formules de construction des abscisses pas à pas et des ordonnées en utilisant l'approximation affine de f.
En " tirant " les cellules B3, C3 et D2 vers le bas, on recopie en ajoutant 1 au numéro de ligne

Méthode d'Euler. On construit les points $M_n(x_n; y_n)$ telles que
Si $h=0,5$, on a: $x_{n+1}=x_n+0,5$ et $y_n=f(x_n)$
La suite (x_n) est donc une suite arithmétique de premier terme $x_0=0$ et de raison $r=0,5$.
On en déduit: $x_n=x_0+n.r=0,5n$

et $y_{n+1}=-0,5y_n+2,5$

Cette suite (y_n) est une suite arithmético-géométrique
Au tableur, on a:

n	0	1	2	3	4	5	6
x_n	0	0,5	1	1,5	2	2,5	3
y_n	0	1,25	1,88	1,56	1,72	1,64	1,68

Compléments:
1) programmation rapide à la calculatrice:
faire: 0 ENTER (On entre la valeur du premier terme y_0 .
faire: –0.5×ANS + 2,5 ENTER, ENTER, ENTER, ... À chaque "ENTER" apparaît le terme suivant de la suite
(Voir étude d'une suite aritmético-géométrique: fiche Suite arithméco-géométrique

66 page 94

On considère l'équation différentielle (E): $y' + y = x^2 - 2$
1) Méthode d'Euler
ϕ est la solution de (E) telle que $\phi(0) = 2$ et le pas est 0,1.
On a donc: $\phi(0,1) \approx \phi(0) + 0,1 \times \phi'(0)$
Or, $\phi'(0) = 0^2 - 2 - \phi(0)$ d'après l'équation (E), soit, $\phi'(0) = -4$

$\phi(0,1) \approx 2 - 0,4 = 1,6$
$\phi(0,2) \approx \phi(0,1) + 0,1\times\phi'(0,1)$ avec $\phi'(0,1) \approx 0,1^2 - 2 - 1,6$, soit, $\phi'(0,1) \approx -3,59$
$\phi(0,2) \approx 1,6 - 0,359 \approx 1,241$
$\phi(0,3) \approx \phi(0,2) + 0,1\times\phi'(0,2)$ avec $\phi'(0,2) \approx 0,2^2 - 2 - 1,241$, soit, $\phi'(0,2) \approx -3,201$
$\phi(0,3) \approx 1,241 - 0,3201 \approx 0,9209$

2) Résolution de l'équation
a) (E'): $y' + y = 0$ est de la forme $y' = -y$;
les solutions de (E') sont les fonctions $x \mapsto C\ \mathrm{e}^{-x}$ où $C \in \mathbb{R}$.
b) La fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = x^2 - 2x$ a pour dérivée: $g'(x) = 2x - 2$, d'où,
Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $g'(x) + g(x) = 2x - 2 + x^2 - 2x = x^2 - 2$
g est donc une solution de (E).
c) ***sens direct:***
f est solution de (E) et g est solution de (E), d'où, on a les égalités suivantes:
Pour tout $x \in \mathbb{R}$,
$f'(x) + f(x) = x^2 - 2$
$g'(x) + g(x) = x^2 - 2$
Par différence, il vient: $f'(x) - g'(x) + f(x) - g(x) = 0$
soit:
Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $(f - g)'(x) + (f - g) = 0$
conclusion: $f - g$ est solution de (E')

sens réciproque:
$f - g$ est solution de (E'), d'où, on a l'égalité suivante:
Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $(f - g)'(x) + (f - g) = 0$
soit: $f'(x) - g'(x) + f(x) - g(x) = 0$, ou encore, $f'(x) + f(x) = g'(x) + g(x)$
Or, g est solution de (E), donc, $g'(x) + g(x) = x^2 - 2$
Conclusion:
Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) + f(x) = x^2 - 2$
f est solution de (E)

d) Il résulte de a), b) et c) que les solutions de (E) sont les fonctions f définies par:
Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $(f - g)(x) = C\ \mathrm{e}^{-x}$ où $C \in \mathbb{R}$.
$f : x \mapsto C\ \mathrm{e}^{-x} + x^2 - 2x$ où $C \in \mathbb{R}$.
(Voir animation avec GeoGebra)
e) La solution ϕ telle que $\phi(0) = 2$ est déterminée par $C\ \mathrm{e}^{-0} + 0^2 - 2\times0 = 2$, soit, $C = 2$
Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\phi(x) = 2\ \mathrm{e}^{-x} + x^2 - 2x$

La calculatrice donne pour $\phi(0,3) = 2\mathrm{e}^{-0,3} + 0,3^2 - 2\times0,3 \approx 0,972$ à 10^{-3} près par excès.

---

67 page 94

a) f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \mathrm{e}^x - x - 1$
f est dérivable sur $\mathbb{R}$ (somme de fonctions dérivables). $f'(x) = \mathrm{e}^x - 1$
Si $x < 0$, on a: $\mathrm{e}^x < 1$ (fonction exponentielle strictement croissante) $f'(x) < 0$ etc.
f est strictement décroissante sur $]-\infty;0]$ et strictement croissante sur $[0;+\infty[$.
f admet donc un minimum en 0 qui vaut $f(0) = 0$

pour tout x réel, $f(x) \geqslant 0$

Conclusion: $\boxed{1 + x \leqslant e^x \qquad (1)}$
L'égalité n'a lieu que pour $x = 0$

b) En remarquant que l'inégalité (1) est vraie **pour tout réel**, on peut l'appliquer à $-X$,
ce qui donne: $1 + (-X) \leqslant e^{-X}$

Comme $e^{-X} = \dfrac{1}{e^X}$, on a: $1 - X \leqslant \dfrac{1}{e^X}$

Si $X < 1$, alors $1 - X > 0$.

Comme **la fonction inverse est strictement décroissante sur]0;+∞[**, on obtient: $\dfrac{1}{1-X} \geqslant e^X$

L'égalité n'a lieu que lorsque $X = 0$.

$$\boxed{\text{Pour } X \neq 0 \text{ et } X < 1, \text{ on a: } e^X < \frac{1}{1-X} \qquad (2)}$$

c) Posons $X = \dfrac{1}{n+1}$ avec n entier supérieur ou égal à 1.

Puisque $n \geqslant 1$, on a: $n + 1 > 1$ et donc $0 < \dfrac{1}{n+1} < 1$

L'inégalité (2) s'applique et il vient: $e^{\frac{1}{n+1}} < \dfrac{1}{1-\dfrac{1}{n+1}}$.

$$\frac{1}{1-\dfrac{1}{n+1}} = \frac{n+1}{n} = 1+\frac{1}{n}$$

On en déduit: $e^{\frac{1}{n+1}} < 1+\dfrac{1}{n}$ et en élevant à la puissance (n+1), $\boxed{e < \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n+1} \qquad (3)}$

En posant $x = \dfrac{1}{n}$ dans (1), il vient: $1 + \dfrac{1}{n} < e^{\frac{1}{n}}$ (inégalité stricte car $\dfrac{1}{n} \neq 0$)

En élevant à la puissance n: $\boxed{\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n < e}$ (4)

D'après (2) et (3): $\boxed{\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n < e < \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n+1}}$

d) Pour tout $n \geqslant 1$, on pose $u_n = \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$

D'après (3): $u_n < e$, soit, $e - u_n > 0$

D'autre part, $\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n+1} = \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n \times \left(1+\dfrac{1}{n}\right) = u_n \times \left(1+\dfrac{1}{n}\right)$

On a alors d'après (4): $e - u_n < u_n \times \left(1+\dfrac{1}{n}\right) - u_n$

Or, $u_n \times \left(1+\dfrac{1}{n}\right) - u_n = \dfrac{u_n}{n}$ et $u_n < \text{e}$ et $\text{e} < 3$

Finalement: $\boxed{0 < \text{e} - u_n < \dfrac{3}{n}}$

e) Quand n tend vers $+\infty$, $\dfrac{3}{n}$ tend vers 0.
On en déduit que la suite $(\text{e} - u_n)$ tend vers 0 (Théorème des gendarmes)
La suite (u_n) tend vers e

---

68 page 94

x et y sont deux réels strictement positifs.

Comparaison de $\dfrac{\text{e}^x}{x}$ ***et e.***

Méthode:

On étudie le signe de la différence $\dfrac{\text{e}^x}{x} - \text{e}$.

Remarque:

Comme $x > 0$, $\dfrac{\text{e}^x}{x} - \text{e}$ et $\text{e}^x - \text{e}x$ sont du même signe.

Rédaction:

La fonction f définie sur $]0; +\infty[$ par $f(x) = \text{e}^x - \text{e}x$ est dérivable et, pour $x > 0$, $f'(x) = \text{e}^x - \text{e}$
Comme la fonction exponentielle est strictement croissante sur $\mathbb{R}$, on a:
si $x > 1$ alors $\text{e}^x > \text{e}$, soit $f'(x) > 0$,
si $x < 1$ alors $\text{e}^x < \text{e}$, soit $f'(x) < 0$,
et si $x = 1$ alors $\text{e}^x - \text{e} = 0$

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	1	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

La fonction f admet un minimum en 1 qui vaut $f(1) = \text{e} - \text{e} = 0$
pour tout $x > 0$, $f(x) \geqslant 0$, soit: $\text{e}^x \geqslant \text{e}x$

Comme $x > 0$, il vient: $\dfrac{\text{e}^x}{x} \geqslant \text{e}$. (1)

La propriété étant vraie pour tout réel strictement positif, on a: $\dfrac{\text{e}^y}{y} \geqslant \text{e}$. (2)

En multipliant membre-à-membre, les inégalités (1) et (2) de **nombres strictement positifs,**
on obtient: $\dfrac{\text{e}^x}{x} \times \dfrac{\text{e}^y}{y} \geqslant \text{e}\times\text{e}$. Or, $\text{e}^x\times\text{e}^y = \text{e}^{x+y}$

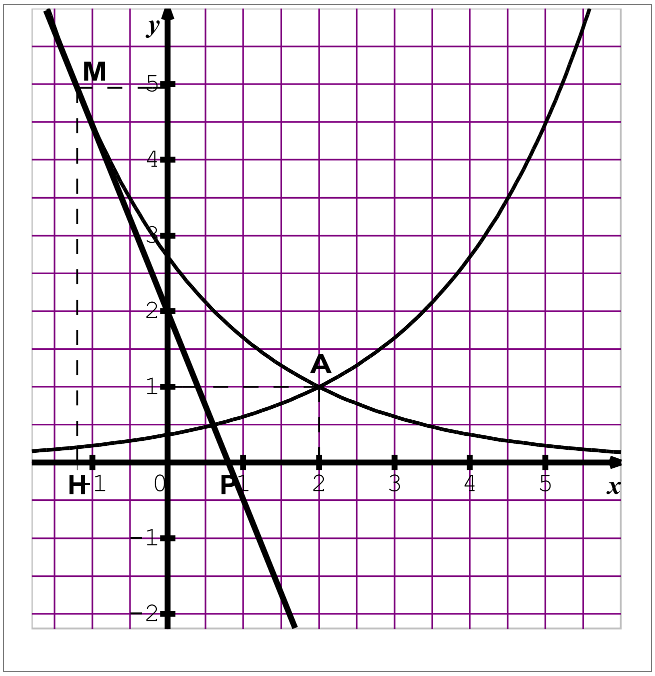
Finalement: Si x et y sont deux réels strictement positifs, $\dfrac{\text{e}^{x+y}}{xy} \geqslant \text{e}^2$.

---

69 page 94

f est une fonction dérivable sur ℝ possédant la propriété suivante:
Si P est le point d'intersection de la tangente T à C_f en M avec l'axe des abscisses et H le projeté orthogonal de M sur cet axe, alors la distance PH est égale à une constante k ($k > 0$) (On a donc: $PH \neq 0$)
a) on note a l'abscisse de M.
Une équation de T est: $y=f'(a)(x-a)+f(a)$
b) On a alors $y_P=0$ et $0 = f'(a)(x_P-a)+f(a)$,
Si $f'(a)=0$ alors $f(a)=0$. M, H et P sont confondus. $PH = 0$ ce qui est impossible
si $f'(a) \neq 0$ alors $x_P-a=\dfrac{-f(a)}{f'(a)}$
Comme $H(a;0)$, on sait: $PH = |x_P-a| = k$

On en déduit: les fonctions f cherchées vérifient la propriété suivante: $f'(a) \neq 0$ alors $k = \left|\dfrac{f(a)}{f'(a)}\right|$
et comme $k > 0$, on en déduit: $f(a) \neq 0$ et $\left|\dfrac{f'(a)}{f(a)}\right|=\dfrac{1}{k}$
c) f est par conséquent solution de l'une des équations différentielles $y'=\dfrac{1}{k}y$ ou $y'=-\dfrac{1}{k}y$



Les solutions sont les fonctions: $x \mapsto C\mathrm{e}^{\frac{1}{k}x}$
ou $x \mapsto C\mathrm{e}^{-\frac{1}{k}x}$ où $C \in \mathbb{R}$
d) Si $k = 2$ et que C_f passe par le point $A(2;1)$, on a deux fonctions
$f_1 : x \mapsto C\mathrm{e}^{\frac{1}{2}x}$ avec $f_1(2)=1$, ce qui donne $C=\dfrac{1}{\mathrm{e}}=\mathrm{e}$
$f_1(x)=\mathrm{e}^{\frac{1}{2}x-1}$
$f_2 : x \mapsto C\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}x}$ avec $f_2(2)=1$, ce qui donne $C=\mathrm{e}$
$f_2(x)=\mathrm{e}^{1-\frac{1}{2}x}$

---

73 page 95

On considère la fonction f définie sur $[0; +\infty[$ par $f(x) = 3x + 1 - x\mathrm{e}^x$. On note $\mathscr{C}$ sa représentation graphique dans un repère orthonormal.

a) f est la différence des fonctions u: $x \mapsto 3x + 1$ et v: $x \mapsto x\mathrm{e}^x$

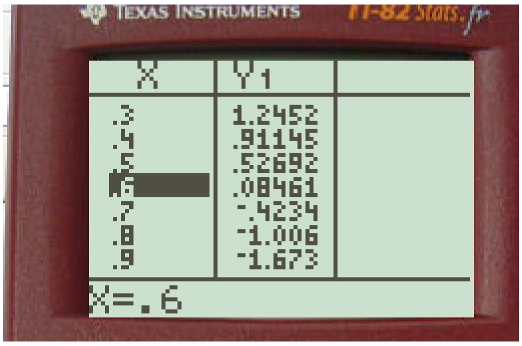
v est le produit de deux fonctions $x \mapsto x$ et $x \mapsto \mathrm{e}^x$

Toutes ces fonctions sont dérivables sur $[0; +\infty[$, d'où, f est dérivable sur $[0; +\infty[$.
Pour tout $x \geqslant 0$, on a: $f'(x) = 3 - (\mathrm{e}^x + x\mathrm{e}^x)$
De même la fonction f' est dérivable sur $[0; +\infty[$, et,
pour $x \geqslant 0$, $f''(x) = -(\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^x + x\mathrm{e}^x) = -(2\mathrm{e}^x + x\mathrm{e}^x)$
b) Si $x > 0$, comme pour tout x réel, $\mathrm{e}^x > 0$, $f''(x) < 0$.

$f''(0) = 0$
La fonction f' est donc strictement décroissante sur $[0; +\infty[$.

On sait que $\lim\limits_{x \to +\infty} e^x = +\infty$, d'où, $\lim\limits_{x \to +\infty} (e^x + xe^x) = +\infty$, puis, $\lim\limits_{x \to +\infty} [3 - (e^x + xe^x)] = -\infty$.

x	0	$+\infty$
$f''(x)$	$-$	
$f'(x)$	3 ↘	$-\infty$



c) La fonction f' étant dérivable est continue sur $[0; +\infty[$.
La fonction f' est strictement décroissante sur $[0; +\infty[$.
Elle réalise donc une bijection de $[0; +\infty[$ dans $]-\infty; 3]$.
Or, $0 \in]-\infty; 3]$, d'où, l'équation $f'(x) = 0$ admet une et une seule α strictement positive.
d) À la calculatrice, on lit: $f'(0{,}6) \approx 0{,}08$ et $f'(0{,}7) \approx -0{,}42$
Comme $f'(0{,}7) < 0 < f'(0{,}6)$, on obtient $0{,}6 < \alpha < 0{,}7$
e) Limite en $+\infty$ de f.
Remarque:
La forme donnée initialement pour $f(x)$ mène à une indétermination.
Méthode: on factorise (ici, on a le choix entre la factorisation de x et celle de e^x)

Pour $x > 0$, $f(x) = 3x + 1 - xe^x = x(3 + \frac{1}{x} - e^x)$ *ou* $f(x) = 3x + 1 - xe^x = e^x(3\frac{x}{e^x} + \frac{1}{e^x} - x)$

Comme $\lim\limits_{x \to +\infty} e^x = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{x} = 0$, on a: $\lim\limits_{x \to +\infty} (3 + \frac{1}{x} - e^x) = -\infty$.

Par produit, on obtient: $\lim\limits_{x \to +\infty} x(3 + \frac{1}{x} - e^x) = -\infty$.

Avec l'autre factorisation: On sait (cours): $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$, *d'où,* $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{x}{e^x} = 0$.

On a alors: $\lim\limits_{x \to +\infty} (3\frac{x}{e^x} + \frac{1}{e^x} - x) = -\infty$ *et par produit:* $\lim\limits_{x \to +\infty} e^x(3\frac{x}{e^x} + \frac{1}{e^x} - x) = -\infty$.

f) Comme $f'(\alpha) = 0$ et que la fonction f' est strictement décroissante sur $[0; +\infty[$, on a:
si $0 \leqslant x < \alpha$ alors $f'(x) > 0$ et si $x > \alpha$ alors $f'(x) < 0$.

x	0		α		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	1	↗	$f(\alpha)$	↘	$-\infty$

Remarque: on peut donner différentes écritures de $f(\alpha)$
Calcul de $f(\alpha)$ $f(\alpha) = 3\alpha + 1 - \alpha e^\alpha$
Or, α *est définie par* $f'(\alpha) = 3 - (e^\alpha + \alpha e^\alpha) = 0$, *d'où,* $\alpha e^\alpha = e^\alpha - 3$
$f(\alpha) = 3\alpha + 1 - \alpha e^\alpha = f(\alpha) = 3\alpha + 1 - (e^\alpha - 3) = 3\alpha + 4 - e^\alpha$

g) Sur l'intervalle $[0; \alpha]$, f est strictement croissante et $f(0) = 1$.
Par conséquent, f ne s'annule pas sur $[0; \alpha]$

Sur [α; +∞[, f est continue, strictement décroissante et l'intervalle image est]–∞; $f(\alpha)$]
Les conditions du corollaire du théorème des valeurs intermédiaires sont vérifiées, d'où, l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution β appartenant à l'intervalle [α; +∞[.
Plus précisément, $f(1) = 4 - e > 0$ (car $2 < e < 3$)

$$f\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{11}{2} - \frac{3}{2}\,e^{\frac{3}{2}} \approx -1,22$$

Comme $f\left(\frac{3}{2}\right) < 0 < f(1)$, on obtient: $1 < \beta < \frac{3}{2}$.

---

78 page 96

(Correction: Partie C, la suite (un) est définie par $u_n = \dfrac{C_n B_n}{C_n A_n}$)

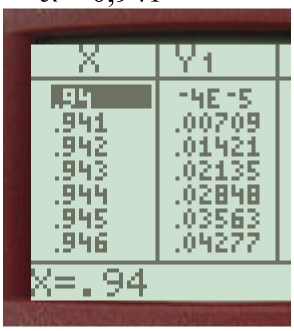
Partie A. Étude d'une fonction auxiliaire

La fonction g est définie sur ℝ par: $g(x) = 2e^x + 2x - 7$

a) $\lim\limits_{x \to -\infty} g(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = +\infty$ (aucun problème de calculs …)

b) g est la somme de fonctions dérivables sur ℝ.

$g'(x) = 2e^x + 2$ qui est strictement positif pour tout x réel, donc, g est strictement croissante sur ℝ.
c) g est dérivable sur ℝ, donc, g est continue sur ℝ.
g est strictement croissante sur ℝ.
g réalise ainsi une bijection de ℝ dans] $\lim\limits_{x \to -\infty} g(x)$; $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x)$ [=]–∞; +∞[= g(ℝ).
Comme $0 \in g$(ℝ), il existe un et un seul antécédent à 0 par g.
L'équation $g(x) = 0$ a une et une seule solution α dans ℝ.
Comme $g(0,94) < 0 < g(0,941)$, il vient: $0,94 < \alpha < 0,941$



Conséquence:
g s'annule en changeant de signe en α
Si $x < \alpha$ alors $g(x) < 0$
Si $x > \alpha$ alors $g(x) > 0$

Partie B. Étude d'une fonction f

La fonction f est définie sur ℝ par $f(x) = (2x - 5)(1 - e^{-x})$.
On note $\mathscr{C}$ la courbe représentative de f dans un repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j})$.
a) $f(x)$ est un **produit** de deux facteurs, d'où, l'étude du signe de chaque facteur résumé dans un tableau de signes.

x	$-\infty$		0		$5/2$		$+\infty$
$2x-5$		$-$		$-$	0	$+$	
$1-\mathrm{e}^{-x}$		$-$	0	$+$		$+$	
$f(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

b) **Limite en $-\infty$.**

$\lim\limits_{x\to-\infty} 2x-5 = -\infty$, $\lim\limits_{x\to-\infty} \mathrm{e}^{-x} = +\infty$, d'où, $\lim\limits_{x\to-\infty} 1-\mathrm{e}^{-x} = -\infty$.

D'après la limite d'un produit, on a: $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$.

Limite en $+\infty$.

$\lim\limits_{x\to+\infty} 2x-5 = +\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty} \mathrm{e}^{-x} = 0$, d'où, $\lim\limits_{x\to+\infty} 1-\mathrm{e}^{-x} = 1$

D'après la limite d'un produit, on a: $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

c) f est le produit de …. et de …..

Ne pas oublier que la dérivée de la fonction composée e^u est $(\mathrm{e}^u)' = u'\mathrm{e}^u$

$x \mapsto 2x-5$ a pour dérivée $x \mapsto 2$

$x \mapsto 1-\mathrm{e}^{-x}$ a pour dérivée $x \mapsto -(-1)\mathrm{e}^{-x} = \mathrm{e}^{-x}$

$f'(x) = 2(1-\mathrm{e}^{-x}) + (2x-5)\mathrm{e}^{-x} = 2x\,\mathrm{e}^{-x} - 7\,\mathrm{e}^{-x} + 2$

Comme $\mathrm{e}^{-x} = \dfrac{1}{\mathrm{e}^x}$, on a: $f'(x) = \dfrac{2x-7+2\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x} = \dfrac{g(x)}{\mathrm{e}^x}$.

Comme $\mathrm{e}^x > 0$, le signe de $f'(x)$ est celui de $g(x)$.

D'après le Ad), si $x < \alpha$, $g(x) < 0$ et si $x > \alpha$, $g(x) > 0$

x	$-\infty$		α		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$f(\alpha)$	$\nearrow$	$+\infty$

d) $f(\alpha) = (2\alpha-5)(1-\mathrm{e}^{-\alpha}) = (2\alpha-5)\left(\dfrac{\mathrm{e}^{\alpha}-1}{\mathrm{e}^{\alpha}}\right)$

or, α est l'unique réel tel que $2\mathrm{e}^{\alpha} + 2\alpha - 7 = 0$

Donc, $\mathrm{e}^{\alpha} = \dfrac{7-2\alpha}{2}$ et $\mathrm{e}^{\alpha} - 1 = \dfrac{7-2\alpha}{2} - 1 = \dfrac{5-2\alpha}{2}$,

soit, $\left(\dfrac{\mathrm{e}^{\alpha}-1}{\mathrm{e}^{\alpha}}\right) = \left(\dfrac{5-2\alpha}{2}\right)\left(\dfrac{2}{7-2\alpha}\right) = \dfrac{5-2\alpha}{7-2\alpha} = \dfrac{2\alpha-5}{2\alpha-7}$

d'où, $f(\alpha) = (2\alpha-5)\left(\dfrac{2\alpha-5}{2\alpha-7}\right) = \dfrac{(2\alpha-5)^2}{2\alpha-7}$

2) Soit h définie sur $D_h =]-\infty; \dfrac{5}{2}[$ par $h(x) = \dfrac{(2x-5)^2}{2x-7}$

Remarquer: $\alpha \in D_h$ et $h(\alpha) = f(\alpha)$

$h'(x) = \dfrac{2\times2(2x-5)(2x-7)-2(2x-5)^2}{(2x-7)^2} = \dfrac{(2x-5)\left[4(2x-7)-2(2x-5)\right]}{(2x-7)^2} = \dfrac{(2x-5)(4x-18)}{(2x-7)^2}$

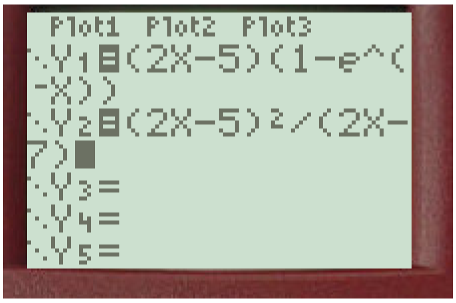
$$= \frac{2(2x-5)(2x-9)}{(2x-7)^2}$$

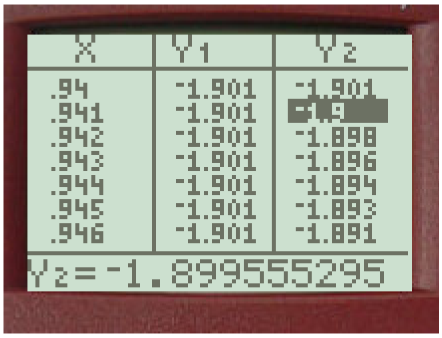
Sur D_h , on sait: $2x - 5 < 0$ et $2x - 9 < 0$, d'où, $h'(x) > 0$ et h est une fonction strictement croissante sur D_h .

Encadrement de $f(\alpha)$ (ou $h(\alpha)$)

Comme $f(\alpha)$ est le minimum de f, on a: $f(\alpha) < f(0{,}94)$ et $f(\alpha) < f(0{,}941)$

Comme h strictement croissante, on a: $h(0{,}94) < h(\alpha) < h(0{,}941)$





Méthode pour encadrer $f(\alpha)$.

On choisit la valeur par défaut de la borne inférieure $h(0{,}94)$ avec deux décimales (puisqu'on demande un encadrement d'amplitude 10^{-2})

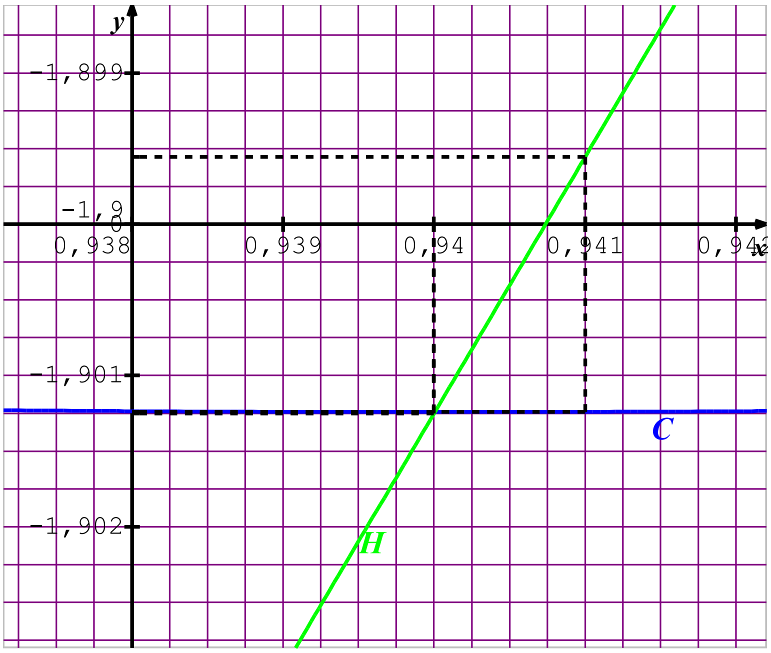
et on prend la valeur par excès du minimum des majorants de $f(\alpha)$ (les majorants sont: $f(0{,}94)$, $f(0{,}941)$, $h(0{,}941)$)

On a donc: $-1{,}91 < f(\alpha)$

La calculatrice donne, $f(0{,}94) < -1{,}90$ et $f(0{,}941) < -1{,}90$ et $h(0{,}94) < -1{,}89$.

Conclusion: $-1{,}91 < f(\alpha) < -1{,}90$

Un zoom



ou encore:

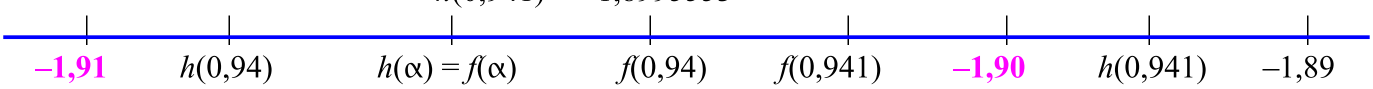
voici les **positions relatives** des nombres sur l'axe des réels (les écarts réels ne sont pas conservés)

Valeurs approchées avec 7 décimales: $f(0{,}94) \approx -1{,}9012412$

$f(0{,}941) \approx -1{,}9012398$

$h(0{,}94) \approx -1{,}9012500$

$h(0{,}941) \approx -1{,}8995553$



e) On pose $d(x) = f(x) - (2x - 5) = (2x - 5)(1 - \mathrm{e}^{-x}) - (2x - 5) = -(2x - 5)\,\mathrm{e}^{-x}$

Comme $\lim\limits_{x \to +\infty} \mathrm{e}^{-x} = 0$, la droite D d'équation $y = 2x - 5$ est asymptote à $\mathscr{C}$.

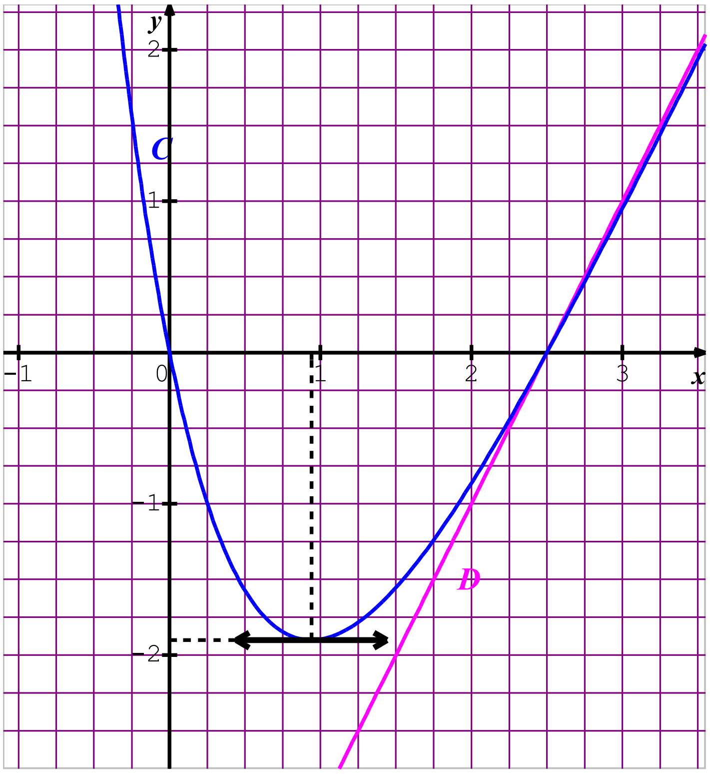
Comme pour tout x réel, $\mathrm{e}^{-x} > 0$, $d(x)$ est du signe opposé à $2x - 5$, d'où,

la droite D d'équation $y = 2x - 5$ est strictement au-dessous de $\mathscr{C}$ lorsque $x < \dfrac{5}{2}$

la droite D d'équation $y = 2x - 5$ est strictement au-dessus de $\mathscr{C}$ lorsque $x > \dfrac{5}{2}$

la droite D d'équation $y = 2x - 5$ coupe $\mathscr{C}$ au point de coordonnées $\left(\dfrac{5}{2} ; 0\right)$

f) Graphique (unité 2cm)



Partie C; Étude d'une suite de rapports de distances.

Pour tout entier n supérieur ou égal à 3, on a:

A_n d'abscisse n sur l'axe des abscisses, donc, $A_n(n; 0)$

B_n d'abscisse n sur la droite D, donc, $B_n(n; 2n - 5)$

C_n d'abscisse n sur la courbe $\mathscr{C}$, donc, $C_n(n, f(n)) = (n; (2n - 5)(1 - \mathrm{e}^{-n})$

$u_n = \dfrac{C_n B_n}{A_n B_n}$

a) D'après l'étude précédente, $C_nB_n = 2n - 5 - f(n)$ car, D au-dessus de $\mathscr{C}$ lorsque $n \geqslant 3$.
et $A_nB_n = 2n - 5 - 0 = 2n - 5$

On a donc: $u_n = \dfrac{2n-5-f(n)}{2n-5} = \dfrac{(2n-5)(1-(1-\mathrm{e}^{-n}))}{2n-5} = \mathrm{e}^{-n} = (\mathrm{e}^{-1})^n = \left(\dfrac{1}{\mathrm{e}}\right)^n$

La suite (u_n) est donc une suite géométrique de premier terme $u_3 = \mathrm{e}^{-3}$ et de raison $\dfrac{1}{\mathrm{e}}$.

b) Puisque $-1 < \dfrac{1}{\mathrm{e}} < 1$, la suite (u_n) converge vers 0.

Le résultat était prévisible puisque C_nB_n est l'écart entre l'asymptote et la courbe et que A_nB_n tend vers l'infini puisque la droite D représente une fonction affine croissante.

81 page 96

f est définie sur [–1;1] par $f(x)=2e^x+ax+b$

a) C passe par l'origine O si et seulement si $f(0)=0$

Or, $f(0)=2e^0+b=2+b$. On en déduit: $b=-2$

La tangente à C en O a pour coefficient directeur 3 si et seulement si $f'(0)=3$,

or, $f'(x)=2e^x+a$, d'où, $f'(0)=2+a$. On en déduit: $a=1$

b) La fonction f est définie sur [–1;1] par $f(x)=2e^x+x-2$, et, $f'(x)=2e^x+1$

Comme $e^x>0$, on obtient: pour tout x réel, $f'(x)>0$, d'où, f est strictement croissante sur $[-1;1]$

Commentaire: Pour déterminer les variations de f, il suffit ici de considérer la somme de deux fonctions strictement croissantes sur $\mathbb{R}$

c) soit $g: x \mapsto \mathrm{e}^x-(x+1)$ qui a pour dérivée $g'(x)=\mathrm{e}^x-1$.

Or: Si $x>0$ on a: $e^x>1$ et si $x<0$, on a: $e^x<1$.

On en déduit que g admet un minimum en 0 qui vaut 0.

Pour tout x réel, $g(x)\geq 0$

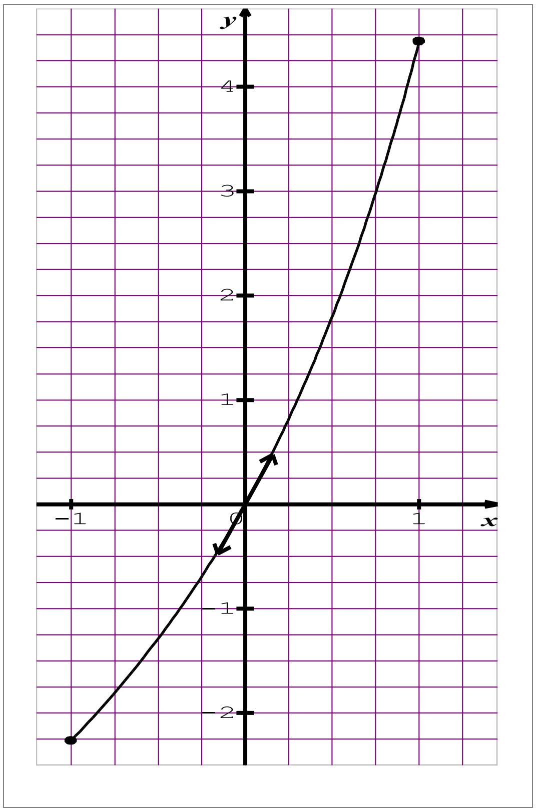
d) Une équation de la tangente T à C au point d'abscisse 0 est:
$y=f'(0)(x-0)+f(0)$
$y=3x$ (voir a))

e) La position de C par rapport à T est donnée par le signe de $f(x)-3x$

$f(x) - 3x = 2e^x + x - 2 - 3x = 2e^x - 2(x - 1) = 2(e^x - (x - 1) = 2\, g(x)$

Comme $g(x)\geq 0$, la courbe C est au-dessus de T.

f) Graphique (respecter les unités: 2 cm sur chaque axe)



86 page 97

(E) est l'équation différentielle $y' - 3y = 2$ (Remarque: (E) ⇔ $y' = 3y + 2$)

(A) l'équation (E) admet pour solutions les fonctions f définies sur $\mathbb{R}$ *par* $f(x) = Ce^{3x} + 2$ *avec C réel quelconque.*

Cette phrase est fausse.

Pour le prouver, on peut faire:

Soit $f(x) = Ce^{3x} + 2$

d'où, $f'(x) = 3\times Ce^{3x}$

$f'(x) - 3f(x) = 3\times Ce^{3x} - 3(Ce^{3x} + 2) = -6$

L'équation $y' - 3y = 2$ n'est pas vérifiée.

Une phrase correcte est:

l'équation (E) admet pour solutions les fonctions f définies sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = Ce^{3x} - \frac{2}{3}$ avec C réel quelconque.

(B) La solution particulière de (E) telle que : f(0) = 1 est définie par $f(x) = \frac{1}{3}(5e^{3x} - 2)$

Cette phrase est vraie

Preuve:

Une méthode:

$f(x) = \frac{1}{3}(5e^{3x} - 2)$, d'où, $f'(x) = \frac{1}{3} \times 5 \times 3e^{3x} = 5e^{3x}$

$f'(x) - 3f(x) = 5e^{3x} - 3 \times \frac{1}{3}(5e^{3x} - 2) = 5e^{3x} - 5e^{3x} + 2 = 2$

L'équation $y' - 3y = 2$ n'est pas vérifiée.

$f(0) = \frac{1}{3}(5e^{3\times 0} - 2) = \frac{1}{3}(5 - 2) = 1$

La condition $f(0) = 1$

Une autre méthode:

À la phrase (A), on a vu que les solutions étaient les fonctions définies par $f(x) = Ce^{3x} - \frac{2}{3}$

$f(0) = 1$ mène à : $Ce^0 - \frac{2}{3} = 1$, soit: $C = 1 + \frac{2}{3} = \frac{5}{3}$ ….

(C) La solution particulière g de (E) dont la courbe représentative admet une tangente de coefficient directeur 3 au point d'abscisse 0 est définie par $g(x) = -\frac{2}{3} + e^{3x}$

Cette phrase est vraie

Preuve:

À la phrase (A), on a vu que les solutions étaient les fonctions définies par $g(x) = Ce^{3x} - \frac{2}{3}$

Or, on veut : $g'(0) = 3$

Comme $g(x) = Ce^{3x} - \frac{2}{3}$, alors, $g'(x) = 3 \times Ce^{3x}$ et $g'(0) = 3 \times C$

Puisque $g'(0) = 3$, on en déduit $C = 1$.

(D) L'équation (E) admet pour solutions les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ *par* $f(x) = Ce^{3x} + 2x$ *avec C réel quelconque.*

Cette phrase est fausse.

Pour le prouver, on peut faire:

Soit $f(x) = Ce^{3x} + 2x$

d'où, $f'(x) = 3 \times Ce^{3x} + 2$

$f'(x) - 3f(x) = 3 \times Ce^{3x} + 2 - 3(Ce^{3x} + 2x) = 2 - 6x$

L'équation $y' - 3y = 2$ n'est pas vérifiée.

---

87 page 97 (Exercice modèle pour la méthode ...)

Soit (E): $y' + y = x$

a) Si g est solution de l'équation (E) alors on a **l'égalité** suivante: **Pour tout x réel**, $g'(x) + g(x) = x$.

En posant: $g(x) = ax + b$, il vient: $g'(x) = a$ et ensuite: $a + ax + b = x$.

L'égalité étant vraie pour tout x, elle est vraie en particulier lorsque $x = 0$, soit: $a + b = 0$

et en particulier lorsque $x = 1$, soit: $2a + b = 1$

(L'auteur propose $x = 1$, mais, le choix de $x = -1$ serait plus judicieux)

On en tire: $b = -a$, puis, $a = 1$.

Finalement, l'égalité a lieu pour $a = 1$ et $b = -1$.

b) Vérifions que la fonction $g : x \mapsto x - 1$ est solution de (E).

Pour tout x réel, $g'(x) = 1$ et $g'(x) + g(x) = 1 + x - 1 = x$.

Remarque importante:

au a), il n'y a pas équivalence étant donnée la méthode choisie.

Il est donc nécessaire de vérifier que g est solution.

c) **Autre remarque importante:**

On doit montrer une équivalence, il y a donc deux démonstrations à faire:

Les données sont: $\begin{cases} \text{La donnée de (E)} \ : \ y' + y = x \\ \text{la fonction g solution de (E)} \\ \text{la donnée de (E ')} \ : \ y' + y = 0 \end{cases}$

(i) Le sens direct:

Si f est solution de (E) alors $f - g$ est solution de (E')

(ii) Le sens réciproque:

Si $f - g$ est solution de (E') alors f est solution de (E).

Démonstration de (i):

f est solution de (E), donc, pour tout x réel, $f'(x) + f(x) = x$ (1) *(égalité)*

g est solution de (E), donc, pour tout x réel, $g'(x) + g(x) = x$ (2) *(égalité)*

Par différence de (1) et (2), on obtient la nouvelle égalité:

$f'(x) - g'(x) + f(x) - g(x) = 0$ (3)

Or, on sait: (somme (ou différence) de fonctions): $(f - g)(x) = f(x) - g(x)$

et (dérivée d'une somme (ou différence) de fonctions): $(f - g)'(x) = f'(x) - g'(x)$

D'où, l'égalité (3) donne: $(f - g)'(x) + (f - g)(x) = 0$

Conclusion: La fonction $f - g$ est solution de (E')

Démonstration de (ii):

$f - g$ est solution de (E') , donc, pour tout x réel, $(f - g)'(x) + (f - g)(x) = 0$ (4) (*égalité*)

D'après les rappels du (i) et cette égalité (4), on a: $f'(x) - g'(x) + f(x) - g(x) = 0$

ou encore $f'(x) + f(x) = g'(x) + g(x)$

Or, g est solution de (E), donc, pour tout x réel, $g'(x) + g(x) = x$

On en déduit: pour tout x réel, $f'(x) + f(x) = x$

Conclusion: La fonction f est solution de (E)

d) ***Résolution de (E')***

L'équation (E') est de la forme: $y' = -y$.
Les solutions de (E') sont les fonctions φ: $x \mapsto A\ e^{-x}$ où $A \in \mathbb{R}$. (Cours)

D'après c), f est solution de (E) si et seulement si $f - g$ est solution de (E')
c'est-à-dire: $f - g$ est égale à φ.
On a donc: les solutions de (E) sont les fonctions $f - g$: $x \mapsto A\ e^{-x}$ où $A \in \mathbb{R}$.

On a donc: Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $(f - g)(x) = A\ e^{-x}$, soit: $f(x) = A\ e^{-x} + g(x)$
Or, on sait: $g(x) = x - 1$,
Conclusion: les solutions de (E) sont les fonctions f : $x \mapsto A\ e^{-x} + x - 1$ où $A \in \mathbb{R}$.

---

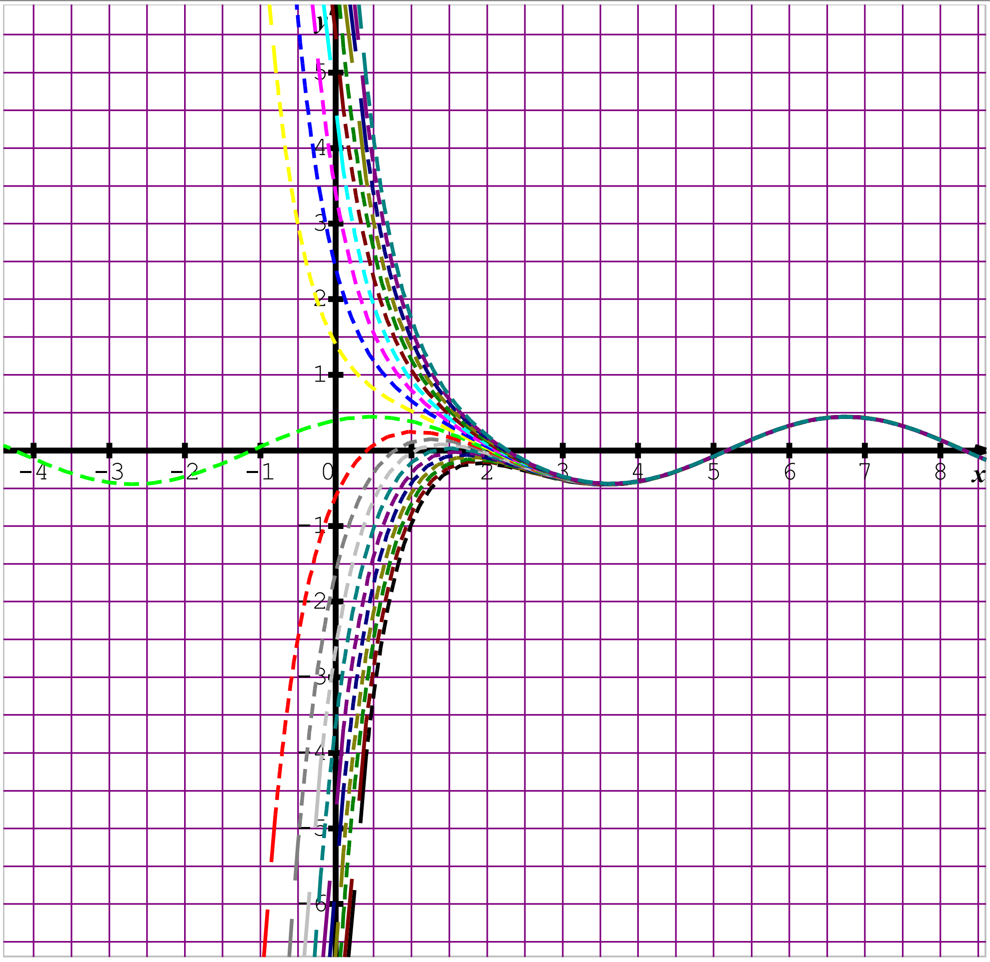
88 page 98

a) $g(x) = 0{,}4\cos(x) + 0{,}2\sin(x)$ est la somme de deux fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$, et,
pour tout x réel, $g'(x) = -0{,}4\sin(x) + 0{,}2\cos(x)$.
On a donc: $g'(x) + 2g(x) = -0{,}4\sin(x) + 0{,}2\cos(x) + 2(0{,}4\cos(x) + 0{,}2\sin(x)) = \cos(x)$
Par conséquent: la fonction g est solution de l'équation différentielle $y' + 2y = \cos(x)$

b) Soit f une solution de (E).
On a alors:
$$\begin{cases} f'(x)+2f(x)=\cos(x) \\ g'(x)+2g(x)=\cos(x)\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f'(x)-g'(x)+2f(x)-2g(x)=0 \\ g'(x)+2g(x)=\cos(x)\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (f-g)'(x)+2(f-g)(x)=0 \\ g'(x)+2g(x)=\cos(x)\end{cases}$$
f solution de (E) si et seulement si $f - g$ solution de (E'): $y' + 2y = 0$

c) D'après le cours les solutions de (E′) sont les fonctions: $x \mapsto A.\exp(-2x)$
On a donc: $(f - g)(x) = A.\exp(-2x)$
Les solutions de (E) sont les fonctions: f définies sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = A.\exp(-2x) + 0{,}4\cos(x) + 0{,}2\sin(x)$

Compléments: Si g n'est pas donnée au a), on pose $g(x) = a\cos(x) + b\sin(x)$,
d'où, $g'(x) = -a\sin(x) + b\cos(x)$,
$g'(x) + 2g(x) = -a\sin(x) + b\cos(x) + 2(a\cos(x) + b\sin(x)) = (2a + b)\cos(x) + (2b - a)\sin(x)$
On veut: $(2a + b)\cos(x) + (b - a)\sin(x) = \cos(x)$
Par identification des coefficients: $\begin{cases} 2a+b=1 \\ 2b-a=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=2b \\ 5b=1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=0{,}4 \\ b=0{,}2\end{cases}$.



Voici pour A de –10 à 10 avec un pas de 1, les représentations graphiques des solutions.

(Voir animation avec GeoGebra) Index

89 page 98

g est solution de (E): $y' - 3y = e^{2x}$ et $g(x) = ke^{2x}$

On a donc: $g'(x) - 3g(x) = e^{2x}$, comme $g'(x) = 2ke^{2x}$, il vient: $2ke^{2x} - 3ke^{2x} = e^{2x}$

Pour tout x réel, $-ke^{2x} = e^{2x}$.

On en déduit: $k = -1$

Vérification:

g définie par $g(x) = -e^{2x}$ est dérivable et, pour tout x réel, $g'(x) = -2e^{2x}$, d'où, $g'(x) - 3g(x) = e^{2x}$

g est solution de (E): $y' - 3y = e^{2x}$

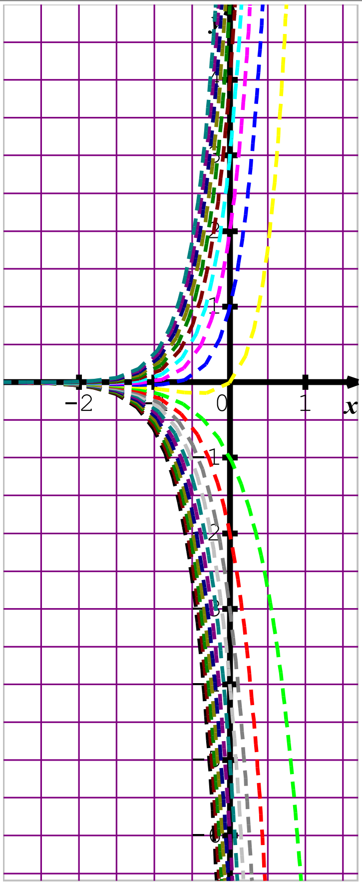
La même démarche que pour les exercices 87 & 88 montre que f est solution de (E) si et seulement si $f - g$ est solution de (E′): $y' - 3y = 0$

Comme g solution de (E) et f solution de (E),

on a le système:

$$\begin{cases} g'(x) - 3g(x) = e^{2x} \\ f'(x) - 3f(x) = e^{2x} \end{cases} \text{ si et seulement si } \begin{cases} g'(x) - 3g(x) = e^{2x} \\ f'(x) - g'(x) - (3f(x) - g(x)) = 0 \end{cases} \text{ si et seulement si}$$

$$\begin{cases} g'(x) - 3g(x) = e^{2x} \\ (f-g)'(x) - 3(f-g)(x) = 0 \end{cases}$$



Voici pour A de –10 à 10 avec un pas de 1, les représentations graphiques des solutions.

Les solutions de (E′) sont les fonctions: $x \mapsto Ae3^x$

Les solutions de (E) sont donc les fonctions f définies par $f(x) = A\ e^{2x} - e^{2x} = e^{2x}\ (A\ e^x - 1)$

---

90 page 98

(E): $y' + y = x + 1$

a) On pose $z = y - x$, **(ne pas oublier que y et z sont des fonctions)**

on en déduit: $y = z + x$, puis $y' = z' + 1$

l'équation (E) devient: $z' + 1 + z + x = x + 1$, soit: (F): $z' + z = 0$

b) L'équation (F): $z' + z = 0$ équivaut à $z' = -z$ qui a pour solutions les fonctions $x \mapsto Ae^{-x}$ (Voir cours)

L'équation (E) a donc pour solutions d'après le a), les fonctions $x \mapsto Ae^{-x} + x$.

---

96 page 99

f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2x\,e^{-x^2}$

C représentation graphique de f dans un repère orthonormal.

a) Pour tout x réel, $f(-x) = 2(-x)\,e^{-(-x)^2} = -2x\,e^{-x^2} = -f(x)$

f est une fonction **impaire**.

L'étude de f sur $[0;+\infty[$ est suffisante en complétant l'étude sur $]-\infty;0[$ par symétrie;

C admet l'origine du repère comme centre de symétrie.

Remarques: *** *f* étant impaire, les variations de *f* sur $[0;+\infty[$ sont celles de *f* sur $]-\infty;0]$
En effet, soit $a<b\leqslant 0$.
On a alors $-a>-b\geqslant 0$. Supposons *f* strictement croissante (resp. strictement décroissante) sur $[0;+\infty[$
On obtient: $f(-a)>f(-b)$ (resp. $f(-a)<f(-b)$)
D'après $f(-x)=-f(x)$, on en tire:
$-f(a)>-f(b)$ (resp.- $f(a)<-f(b)$)
puis, $f(a)<f(b)$ (resp. $f(a)>f(b)$)
*** Le vocabulaire "centre de symétrie" concerne la courbe, en aucun cas, il ne concerne la fonction.

b) "*Petite !!!" erreur dans le texte. Il est nécessaire d'avoir* $x\neq 0$ *pour l'égalité suivante*
$x\neq 0, 2x^2\mathrm{e}^{-x^2}\times\frac{1}{x}=2x\,\mathrm{e}^{-x^2}=f(x)$
Posons $x^2=t$
$\lim\limits_{x\to+\infty} x^2\mathrm{e}^{-x^2}=\lim\limits_{t\to+\infty} t\,\mathrm{e}^{-t}=\lim\limits_{t\to-\infty} -t\,\mathrm{e}^{t}=0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=0$ d'où $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2\mathrm{e}^{-x^2}\times\frac{1}{x}=0$
$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$
Autre méthode: Théorème sur les limites de fonctions composées.
Soit $\phi: x\mapsto x\,\mathrm{e}^x$. On sait $\lim\limits_{x\to-\infty}\phi(x)=0$
f est la composée de $x\overset{\psi}{\mapsto}-x^2\overset{\phi}{\mapsto}\phi(x)$
Comme $\lim\limits_{x\to+\infty}\psi(x)=-\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty}\phi(x)=0$ alors $\lim\limits_{x\to+\infty}\phi\circ\psi(x)=0$

c) *f* est le produit de deux fonctions , $u: x\mapsto 2x$ et $v: x\mapsto \mathrm{e}^{-x^2}$
v est la composée de deux fonctions $x\overset{w}{\mapsto}-x^2$ et $x\mapsto\exp x$ *Cours*: $v=\mathrm{e}^w$ *et* $v'=w'\mathrm{e}^w$
Toutes ces fonctions étant définies et dérivables sur $\mathbb{R}$, *f* est dérivable et
$f'=u'v+v'u$ avec $u'(x)=2$ et $v'(x)=-2x\,\mathrm{e}^{-x^2}$
$f'(x)=2\,\mathrm{e}^{-x^2}+(-2x\,\mathrm{e}^{-x^2})(2x)=2\,\mathrm{e}^{-x^2}(1-2x^2)$
Comme $2\,\mathrm{e}^{-x^2}>0$, le signe de $f'(x)$ est celui de $(1-2x^2)=(1-\sqrt{2}x)(1+\sqrt{2}x)$
Sur $[0;+\infty[$, on a: $f'(x)>0$ sur $\left[0;\frac{\sqrt{2}}{2}\right[$, $f'(x)<0$ sur $\left]\frac{\sqrt{2}}{2};+\infty\right[$ et $f'\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=0$

f est une fonction continue, strictement croissante sur $\left[0;\frac{\sqrt{2}}{2}\right]$ et strictement décroissante sur $\left[\frac{\sqrt{2}}{2};+\infty\right[$

Calcul du maximum: $f\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=\left(2\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\mathrm{e}^{-\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2}=\sqrt{2}\,\mathrm{e}^{\frac{-1}{2}}=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\mathrm{e}}}=\sqrt{\frac{2}{\mathrm{e}}}$
d) Une équation de T tangente à C en O est $y=f'(0)(x-0)+f(0)=2x$
La position relative de C et T est donnée par le signe de $f(x)-2x=2x(\mathrm{e}^{-x^2}-1)$
Comme $-x^2\leqslant 0$, on a: $\mathrm{e}^{-2x^2}\leqslant 1$, soit, $\mathrm{e}^{-2x^2}-1\leqslant 0$
Conclusion: si $x>0$, $f(x)<2x$ C est en-dessous de T
Si $x<0$, $f(x)>2x$ C est au-dessus de T
e) Si $x>3$ alors $f(x)<f(3)$ car *f* est strictement décroissante sur $\left[\frac{\sqrt{2}}{2};+\infty\right[$

Or, la calculatrice donne $7{,}4\times 10^{-4}<f(3)<7{,}41\times 10^{-4}$
ce qui prouve que $f(x)<10^{-3}$ lorsque $x>3$

f) Pour construire C et T, construire d'abord T et le point $M_{ax}\left(\frac{\sqrt{2}}{2};\sqrt{\frac{2}{\mathrm{e}}}\right)$ avec la tangente "horizontale"
Tenir compte de la position relative de C et T et de l'asymptote d'équation $y=0$
Compléter par symétrie de centre O.
(Choisir des unités qui permettent de "voir" quelque chose!!!!)

---

99 page 99

La fonction θ est solution de l'équation différentielle $\theta' = a - b\theta$ où $a = 2{,}088\times 10^{-2}$ et $b = 2{,}32\times 10^{-4}$
$\theta(0) = 20$
Le temps t est exprimé en secondes et la température $\theta(t)$ en degré Celsius.
a) Les solutions de l'équation (E) sont les fonctions $t \mapsto Ce^{-bt}+\frac{a}{b}$ (Voir cours)
b) La fonction θ vérifiant $\theta(0) = 20$ est donnée par: $C + \frac{a}{b} = 20$.
Application numérique: $\frac{a}{b} = 90$ et $C = -70$.
c) Solution approchée de $\theta(t) = 80$
Avec le tableur de la calculatrice:
On entre la fonction $Y_1 = -70\ \mathrm{e}^{-2{,}32\times 10^{-4}X} + 90$
$8387 < t < 8\,388$
Avec ln: $\theta(t) = 80 \Leftrightarrow -70\ \mathrm{e}^{-2{,}32\times 10^{-4}t} + 90 = 80 \Leftrightarrow \mathrm{e}^{-2{,}32\times 10^{-4}t} = \frac{1}{7} \Leftrightarrow -2{,}32\times 10^{-4}\, t = -\ln(7)$
$t = \frac{\ln(7)}{2{,}32}10^4 \approx 8387$ sec ≈ 2 h 19 min 47 sec Index

---

100 page 99 Loi de Newton

$\theta(t)$ température (en degré Celsius) du corps à l'instant t (en heures)
à $t = 0$, $\theta(0) = 100$
a) La vitesse de refroidissement, $\theta'(t)$ est proportionnelle à la différence entre t et la température 20 °C de la salle.
Le coefficient de proportionnalité pour ce corps vaut: –2,08
D'où, $\theta'(t) = -2{,}08\ (\theta(t) - 20)$
b) La fonction θest donc solution de l'équation différentielle: $y' = ay + b$ avec $a = -2{,}08$ et $b = 41{,}6$.
D'après le cours: $\theta : t \mapsto C\mathrm{e}^{-2{,}08t} + 20$ $\left(\frac{-b}{a}=20\right)$
et comme $\theta(0) = 100$, on en déduit: $100 = C + 20$. $C = 80$
$\theta(t)=80\,\mathrm{e}^{-2{,}08t}+20$
c) $\theta'(t) = -2{,}08 \times 80\ \mathrm{e}^{-2{,}08t}$ est strictement négatif, donc, la fonction θ est strictement décroissante sur $[0;+\infty[$.
Comme $\lim_{t\to+\infty} \mathrm{e}^{-2{,}08t} = \lim_{t\to-\infty} \mathrm{e}^{2{,}08t} = 0$, on a: $\lim_{t\to+\infty} \theta(t) = 20$
La courbe de θ admet une asymptote horizontale d'équation $y = 20$
d) 20 minutes = $\frac{1}{3}$ d'heure, $\theta\left(\frac{1}{3}\right) = 80\ \mathrm{e}^{\frac{-2{,}08}{3}} + 20 \approx 60°$ C arrondi au degré

30 minutes = $\frac{1}{2}$ d'heure, $\theta\left(\frac{1}{2}\right)=80\,e^{-1,04}+20\approx 48$ °C arrondi au degré

e) La température est à 30 °C à partir de *t* = 1 heure

Complément: lorsque la fonction logarithme népérien aura été étudiée:
Résolution de θ(*t*)=30

$80\,e^{-2,08t}+20=30$ équivaut à $e^{-2,08t}=\frac{1}{8}$ équivaut à $-2,08\,t=\ln\left(\frac{1}{8}\right)$ équivaut à $t=\frac{\ln 8}{2,08}$

Une valeur approchée est: 0,999 73 ... heures, soit 59,983 8 ... minutes, soit 59 minutes 59,03... secondes

103 page 100

Rappel du cours:

Savoir (c'est-à-dire: savoir reconnaître une équation différentielle, savoir appliquer le cours pour les formes $y'=ay$ et $y'=ay+b$, savoir démontrer les résultats du cours)

****** Une équation différentielle est une équation liant une fonction et ses dérivées. Dans l'écriture $y'=ay$, il ne faut pas perdre de vue que y est une fonction;***

En conséquence, si dans le traitement d'une équation différentielle apparaît $\frac{1}{y}$ (comme dans l'exercice) ou y^2 ou e^y ou $\ln y$ $(y>0)$, leurs dérivées respectives sont $\frac{-y'}{y^2}$, $2y'y$, $y'e^y$, $\frac{y'}{y}$

****** $a\neq 0$, les solutions de $y'=ay$ sont les fonctions $x\mapsto C\,e^{ax}$ où $C\in\mathbb{R}$***

les solutions de $y'=ay+b$ sont les fonctions $x\mapsto C\,e^{ax}-\dfrac{b}{a}$ où $C\in\mathbb{R}$

****** Les démonstrations du cours: (les grandes étapes...)***

Pour $y'=ay$ (E)

- On prouve l'existence de solutions (il y en a au moins une) que l'on donne nommément.

Soit f la fonction $x\mapsto e^{ax}$. On calcule f' et on vérifie $f'=af$ (ce qui prouve l'existence).

- On montre que toute autre fonction g qui est solution s'écrit $x\mapsto C\,e^{ax}$

Pour cela, on construit $\dfrac{g}{f}$ $(f\neq 0)$. La fonction $\phi=\dfrac{g}{f}$ est définie par $\phi(x)=g(x)\times e^{-ax}$ et a pour dérivée $\phi'(x)=g'(x)\times e^{-ax}+g(x)\times(-a)\,e^{-ax}$ et comme $g'=ag$, il vient: $\phi'=0$, ce qui montre que $\phi=C$...

- Lorsqu'une condition initiale est donnée, on montre l'unicité en calculant la constante C

Pour $y'=ay+b$ (E')

- On cherche une solution particulière f en recherchant une fonction constante. On trouve $y=-\dfrac{b}{a}$

- On montre l'équivalence suivante: g solution de (E') équivaut à $(g-f)$ solution de (E)

- On peut conclure pour toutes les solutions de $y'=ay+b$

- Lorsqu'une condition initiale est donnée, on montre l'unicité en calculant la constante C

a) Pour $t>0$, $y(t)$ est la fréquence des personnes connaissant la rumeur à l'instant *t* et $1-y(t)$ est la fréquence de ceux ne connaissant pas la nouvelle;
$y'(t)$ représente la vitesse de propagation de la rumeur (définition de la dérivée qui est la limite du taux d'accroissement: $\dfrac{y(t+h)-y(t)}{h}$ en 0).
On sait que cette vitesse est proportionnelle au produit de $y(t)$ par $1-y(t)$ et que 1,15 est le coefficient de proportionnalité.
$y(t)$ vérifie l'équation: $y'(t)=1{,}15\,y(t)\times(1-y(t))$ (1)
Comme au temps $t=0$, il y a 100 personnes sur 10 000 qui connaissent la nouvelle, on a:
$y(0)=\dfrac{100}{10000}=0{,}01$.

b) En développant (1) et en divisant par $(y(t))^2$ (non nul), il vient: $\dfrac{y'(t)}{(y(t))^2}=\dfrac{1{,}15}{y(t)}-1{,}15$

En posant: $z=\dfrac{1}{y}$, d'où, $z'=\dfrac{-y'}{y^2}$, on obtient: $-z'=1{,}15z-1{,}15$
z est donc solution de l'équation différentielle (2): $z'=-1{,}15z+1{,}15$
Cette équation (2) est de la forme: $f'=af+b$ avec $a\in\mathbb{R}^*$ donc, les solutions de (2) sont les fonctions
$z\ :\ t\mapsto Ce^{-1{,}15t}+1$

Comme $z(0)=\dfrac{1}{y(0)}=100,$ il vient: $C=99$

$z(t)=99\,e^{-1{,}15t}+1$ et $y(t)=\dfrac{1}{99\,e^{-1{,}15t}+1}$

c) Par définition de *y*, on sait: $0<y<1$ (fréquence), d'où, $1-y>0$ et $y'=1{,}15\,y(1-y)>0$.
y est une fonction strictement croissante sur $]0;+\infty[$

(On peut aussi: *y* est la composée de $t:\overset{u}{\mapsto}-1{,}15\,t\overset{\exp}{\mapsto}e^{-1{,}15t}\overset{v}{\mapsto}99\,e^{-1{,}15t}+1\overset{inv}{\mapsto}\dfrac{1}{99\,e^{-1{,}15t}+1}$

u est une fonction affine strictement décroissante, exp est strictement décroissante, *v* est une fonction affine strictement croissante et la fonction inverse est strictement décroissante.
La fonction composée $y=inv\circ v\circ\exp\circ u$ est donc strictement croissante.

ou encore (pour l'entraînement aux calculs): $y'=-1{,}15\times\exp(-1{,}15\,t)\times 99\times\frac{(-1)}{(99\,\mathrm{e}^{-1{,}15\,t}+1)^2}=\frac{113{,}85\,\mathrm{e}^{-1{,}15\,t}}{(99\,\mathrm{e}^{-1{,}15t}+1)^2}$)

limite en $+\infty$

La limite de *u* en +∞ est –∞, celle exp en –∞ est 0, d'où, la limite de *v* en 0 est $v(0)=1$ (fonction affine continue en 0) et la limite de la fonction inverse en 1 est $\frac{1}{1}=1$ (fonction inverse continue en 1).

finalement: la limite en +∞ de *y* est 1.

La représentation graphique de *y* a une asymptote d'équation $y=1$.

Tracé de C_y

Tracer l'asymptote

Faire un tableau de valeurs:

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
y	0,01	0,03	0,09	0,24	0,50	0,76	0,91	0,97	0,99	1

Rechercher le coefficient directeur de la tangente en (0;0,01): $y'(0)=\frac{113{,}85}{10^4}\approx 0{,}11$

d) À midi, $t=4$, on a: $y(4)\approx 0{,}5$, d'où 5000 habitants environ connaissent la rumeur à midi.

e) On cherche la plus petite valeur telle que $y\geqslant 0{,}99$

Lecture graphique: $t\approx 8$, il est environ 16 heures;

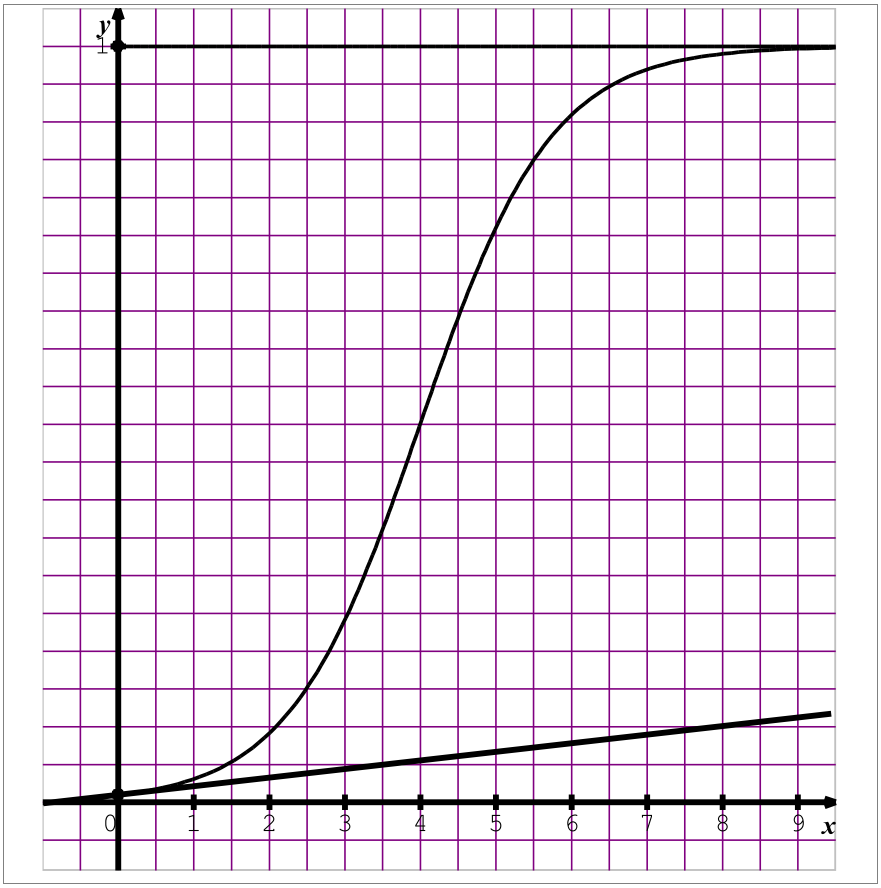
Calculatrice: tableau de valeurs, Pour $t=7{,}9$, $y(7{,}9)\approx 0{,}9889$, pour $t=8$, $y(8)\approx 0{,}9901$

À l'aide du ln: $\frac{1}{99\,\mathrm{e}^{-1{,}15\,t}+1}\geqslant 0{,}99 \Leftrightarrow$

$99\,\mathrm{e}^{-1{,}15\,t}+1\leqslant\frac{100}{99} \Leftrightarrow 99\,\mathrm{e}^{-1{,}15\,t}\leqslant\frac{1}{99} \Leftrightarrow$

$\mathrm{e}^{-1{,}15\,t}\leqslant\frac{1}{99^2} \Leftrightarrow -1{,}15\,t\leqslant\ln\left(\frac{1}{99^2}\right) \Leftrightarrow$

$t\geqslant\frac{-2\times\ln 99}{-1{,}15} \Leftrightarrow t\geqslant 7{,}992$ à 10^{-3} par excès



Exercice A page 102 (Bac S La réunion juin 2004)

f est dérivable sur ℝ et vérifie:

(1) pour tout *x* réel, $(f'(x))^2-(f(x))^2=1$

(2) $f'(0)=1$

(3) la fonction f' est dérivable sur ℝ.

1 a) $(f'(x))^2 - (f(x))^2 = 1 \Leftrightarrow (f'(x))^2 = 1 + (f(x))^2$
Comme $(f(x))^2 \geqslant 0$, on a: $(f'(x))^2 \geqslant 1$, soit: $f'(x) \leqslant -1$ ou $f'(x) \geqslant 1$.
pour tout x réel, $f'(x) \neq 0$
ou par l'absurde:
Supposons qu'il existe une valeur a réelle telle que $f'(a) = 0$, on a alors d'après (1): $-(f(a))^2 = 1$, ce qui est impossible.
Il n'existe aucun réel x tel que $f'(x) = 0$
pour tout x réel, $f'(x) \neq 0$

b) D'après (1), $(f'(0))^2 - (f(0))^2 = 1$ et d'après (2): $(f'(0))^2 = 1$
Par conséquent: $(f(0))^2 = 0$
Conclusion: $f(0) = 0$

2) D'après (3), f' est dérivable sur $\mathbb{R}$.
Le premier membre de l'égalité (1) se dérive en $x \mapsto 2\times f''(x)\times f'(x) - 2\times f'(x)\times f(x)$

Le second membre de l'égalité (1) se dérive en $x \mapsto 0$

L'égalité (1) implique: $2\times f''(x)\times f'(x) - 2\times f'(x)\times f(x) = 0$, soit
$2f'(x)(f''(x) - f(x)) = 0$
Comme $f'(x) \neq 0$, il vient $f''(x) - f(x) = 0$
(4): Pour tout nombre réel x, $f''(x) = f(x)$.

3) On pose $u = f' + f$ et $v = f' - f$.
a) $u(0) = f'(0) - f(0) = 1$ et $v(0) = \ldots = 1$

b) u et v, étant la somme ou la différence de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$, sont dérivables sur $\mathbb{R}$.
pour tout x réel, $u'(x) = f''(x) + f'(x) = f(x) + f'(x) = u(x)$ (car $f''(x) = f(x)$)
pour tout x réel, $v'(x) = f''(x) - f'(x) = f(x) - f'(x) = -(f'(x) - f(x)) = -v(x)$.

c) La fonction u est donc la solution de l'équation différentielle $y' = y$ prenant la valeur 1 en 0.
On sait d'après le cours que c'est la fonction exponentielle de base e.
Pour tout x réel, $u(x) = \mathrm{e}^x$

La fonction v est donc la solution de l'équation différentielle $y' = -y$ prenant la valeur 1 en 0.
On a alors: pour tout x réel, $v(x) = C\mathrm{e}^{-x}$ et $v(0) = 1$, d'où, $C = 1$
Pour tout x réel, $v(x) = \mathrm{e}^{-x}$

d) Par définition de u et v, on a: $2f = u - v$,
d'où, pour tout x réel, $2f(x) = \mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}$

$$f(x) = \frac{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}}{2}$$

4a) On sait: $\lim_{x\to+\infty} \mathrm{e}^x = +\infty$ et $\lim_{x\to+\infty} \mathrm{e}^{-x} = 0$, donc, (somme de fonctions) $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.
et
$\lim_{x\to-\infty} \mathrm{e}^x = 0$ et $\lim_{x\to-\infty} \mathrm{e}^{-x} = +\infty$, donc, $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$.

b) $f'(x) = \dfrac{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}}{2}$ (Soit on remarque $2f' = u + v$, soit on dérive ...)

Comme pour tout X, $\mathrm{e}^X > 0$, $f'(x) > 0$ et f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

x	$-\infty$ $\qquad$ $+\infty$
$f'(x)$	$+$
$f(x)$	$-\infty$ $\nearrow$ $+\infty$

5) a) D'après les questions précédentes:
f est dérivable sur $\mathbb{R}$, donc, continue sur $\mathbb{R}$.
f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$,
donc, f réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur $f(\mathbb{R}) = \left] \lim\limits_{x\to-\infty} f(x) \,;\, \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) \right[= \mathbb{R}$.

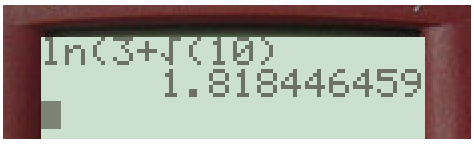
Conclusion:
Pour tout $m \in \mathbb{R}$, l'équation $f(x) = m$ a une et une seule solution réelle.

b) $f(x) = 3$ a pour solution α telle que $f(\alpha) = 3$

Résolution de $\dfrac{e^x - e^{-x}}{2} = 3$

$$\frac{e^x - e^{-x}}{2} = 3 \Leftrightarrow e^x - e^{-x} = 6$$
$$\Leftrightarrow (e^x)^2 - 6\,e^x - 1 = 0$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} X = e^x \\ X^2 - 6X - 1 = 0 \end{cases}$$

Résolution de l'équation du second degré: discriminant $\Delta = b^2 - 4ac = 40 = 2\sqrt{10}$
L'équation en X a deux solutions: $X_1 = 3 - \sqrt{10}$ et $X_2 = 3 + \sqrt{10}$
Comme $e^x > 0$, la seule solution acceptable est $e^x = 3 + \sqrt{10}$.
On cherche donc l'antécédent par la fonction exponentielle de $3 + \sqrt{10}$
$x = \ln(3 + \sqrt{10})$
La calculatrice donne : la fonction réciproque de l'exp; est la fonction ln.



$\alpha = 1{,}82$ à 10^{-2} près par excès.

Exercice B page 102 (Bac S France juin 2004)

Les lois de Newton conduisent à l'équation différentielle (E): $25x\,' + 200x\,'' = 50$

où x' est la dérivée première et x'' la dérivée seconde de la fonction x par rapport au temps

x est la loi horaire (fonction en mathématique) du mouvement.
Le terme $25\,x'$ est la valeur de la force de frottement due à la résistance (x' est la fonction donnant la vitesse)

Le terme $200x''$ est la valeur de la force due à l'accélération pour une masse de 200 kg.

50 est la valeur de la force d'entraînement.

Dans tout l'exercice $t \geqslant 0$

1) On pose $v(t) = x'(t)$ d'où, $v'(t) = x''(t)$.

En remplaçant dans(E): on a:

$$\begin{cases} 25\,x\,'+200\,x\,''=50 \\ v(t)=x\,'(t) \\ v\,'(t)=x\,''(t) \end{cases} \quad \text{équivaut à} \quad \begin{cases} 25\,v(t)+200\,v\,'(t)=50 \\ v(t)=x\,'(t) \\ v\,'(t)=x\,''(t) \end{cases}$$

En divisant par 200 et en réorganisant, on a: (E) équivaut à (F): $v' = -\dfrac{1}{8}v + \dfrac{1}{4}$.

(Ne pas oublier de montrer l'équivalence)

L'équation (F) est de la forme $y' = ay + b$, d'où, en appliquant le cours, il vient:

avec $a = -\dfrac{1}{8}$, $b = \dfrac{1}{4}$ et $-\dfrac{b}{a} = 2$

Pour $t \geqslant 0$, $v(t) = C\,\mathrm{e}^{-\frac{1}{8}t} + 2$ avec $C \in \mathbb{R}$.

2) Les conditions initiales sont $x(0) = 0$ et $x'(0) = 0$

a) On a: $x'(t) = v(t) = C\,\mathrm{e}^{-\frac{1}{8}t} + 2$ et $v(0) = 0$,

d'où, $C\,\mathrm{e}^0 + 2 = 0$, soit: $C = -2$, puisque $\mathrm{e}^0 = 1$.

$x'(t) = -2\,\mathrm{e}^{-\frac{1}{8}t} + 2$
b) Les fonctions x qui ont pour dérivée x' sont de la forme:

$x(t) = -2\times \dfrac{1}{-\frac{1}{8}} \times \mathrm{e}^{-\frac{1}{8}t} + 2t + K$ où $K \in \mathbb{R}$.

Soit $x(t) = 16\,\mathrm{e}^{-\frac{1}{8}t} + 2t + K$ où $K \in \mathbb{R}$.

Or, $x(0) = 0$, d'où, $16 + K = 0$.

Conclusion: $x(t) = 16\,\mathrm{e}^{-\frac{1}{8}t} + 2t - 16$ avec $t \geqslant 0$

On sait: $\lim\limits_{X \to -\infty} \mathrm{e}^X = 0$, d'où, comme $\lim\limits_{t \to +\infty} -\dfrac{1}{8}t = -\infty$, on a, d'après la limite de fonction composée:

$\lim\limits_{t \to +\infty} \mathrm{e}^{-\frac{1}{8}t} = \lim\limits_{X \to -\infty} \mathrm{e}^X = 0$.

Conclusion: $\lim\limits_{t \to +\infty} (-2\,\mathrm{e}^{-\frac{1}{8}t} + 2) = 2$

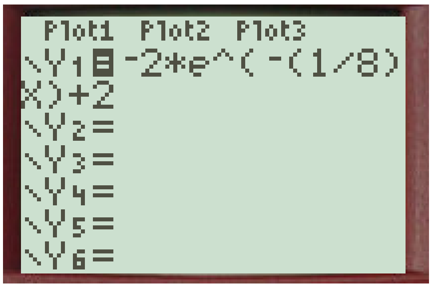
La vitesse limite $V = 2$ (m.s^{-1})

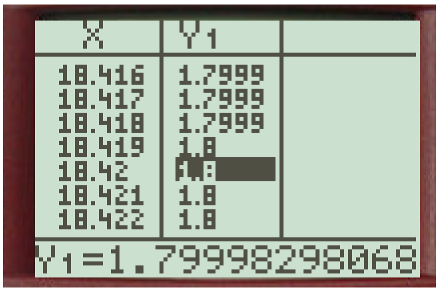
On cherche t telle que $v(t) \leqslant 0{,}9 \times V$, soit, $-2\,\mathrm{e}^{-\frac{1}{8}t} + 2 \leqslant 1{,}8$

$-2\,\mathrm{e}^{-\frac{1}{8}t} + 2 \leqslant 1{,}8$ équivaut à $\mathrm{e}^{-\frac{1}{8}t} \geqslant 0{,}1$

Avant d'étudier le logarithme népérien:

En remarquant que la fonction v est croissante, un encadrement à la calculatrice donne:





$t \geqslant 18{,}421$ (valeur approchée à 10^{-3})

Après l'étude le logarithme népérien:

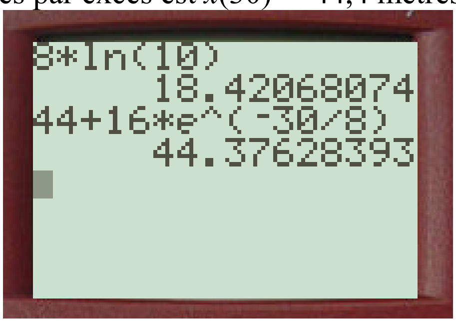
$\mathrm{e}^{-\frac{1}{8}t} \geqslant 0{,}1$ équivaut à $-\dfrac{1}{8}t \leqslant \ln 0{,}1$ Or, $\ln 0{,}1 = -\ln 10$

d'où, $v(t) \leqslant 0{,}9 \times V$ équivaut à $t \geqslant 8 \ln 10$

Une valeur approchée de $8 \ln 10$ est 18,4206 ...

La distance parcourue en 30 secondes est $x(30) = 2 \times 30 - 16 + 16\,\mathrm{e}^{-\frac{30}{8}} = 44 + 16\,\mathrm{e}^{-\frac{30}{8}}$

Une valeur approchée au décimètre près par excès est $x(30) \approx 44{,}4$ mètres



---

exercice C page 102

f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \mathrm{e}^{-x}(\cos(x) + \sin(x))$

1) a) $\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right) = \sin(x).\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)+\cos(x).\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}(\sin(x)+\cos(x))$

Par conséquent: Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt{2}\,e^{-x}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$

b) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $f(x) = 0$.
Comme $\sqrt{2}.e^{-x} > 0$,

$f(x) = 0$ si et seulement si $\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right) = 0$

$f(x) = 0$ si et seulement si $x+\frac{\pi}{4} = 0 + k\pi$; $k \in \mathbb{Z}$,

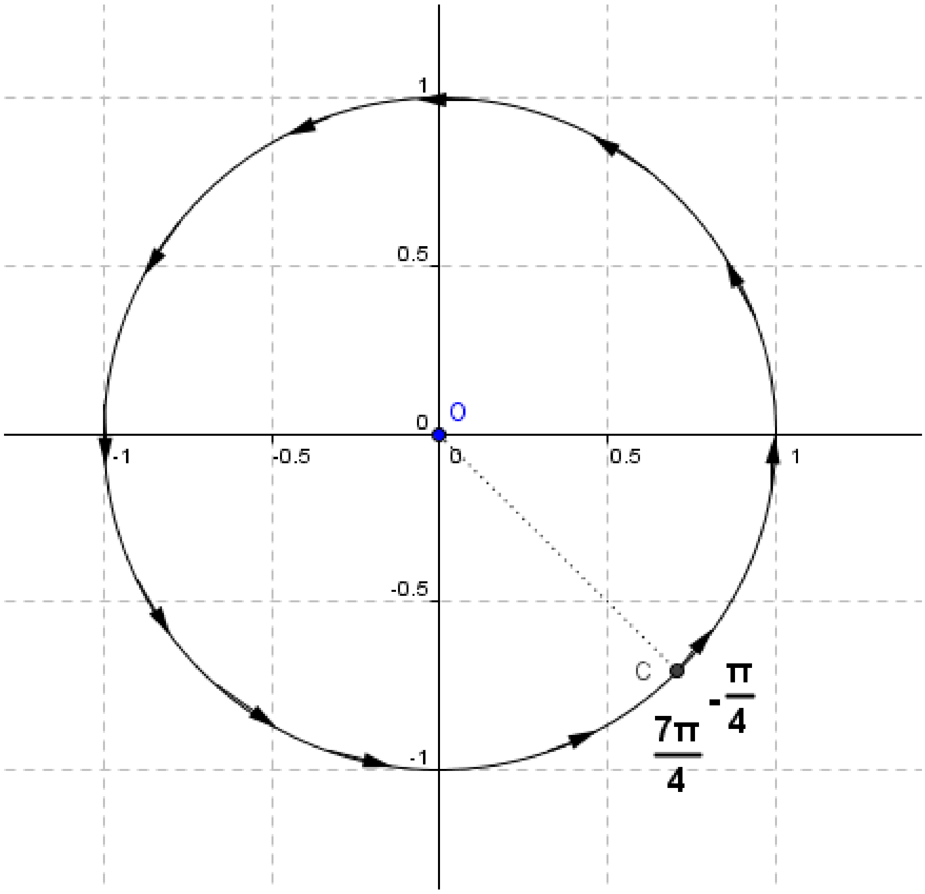
$f(x) = 0$ si et seulement si $x = -\frac{\pi}{4} + k\pi$; $k \in \mathbb{Z}$.

c) Comme, pour tout x réel, $-1 \leqslant \sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right) \leqslant 1$, et, que $\sqrt{2}.e^{-x} > 0$,
on a: $-\sqrt{2}.e^{-x} \leqslant f(x) \leqslant \sqrt{2}.e^{-x}$
Or, $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{-x} = 0$, donc, d'après les théorèmes sur les limites et comparaisons de fonctions, (th. des gendarmes)
il vient: $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$

2) f est le produit de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$, ...
$f'(x) = -e^{-x}(\cos(x)+\sin(x))+e^{-x}(-\sin(x)+\cos(x)) = -2e^{-x}\sin(x)$

b) $f'(x) = 0$ si et seulement si $x = 0 + k\pi$; $k \in \mathbb{Z}$.

3) Soit $I = \left[-\frac{\pi}{4};\frac{7\pi}{4}\right]$
a) Comme $-2e^{-x} < 0$, le signe de $f'(x)$ est le signe opposé de $\sin(x)$.
Remarque: on fait un tour complet en partant du point C repéré par $-\frac{\pi}{4}$ ....et, on applique les propriétés **connues** du sinus. (Un bon schéma vaut toutes les explications... il suffit de connaître le cercle trigo...)

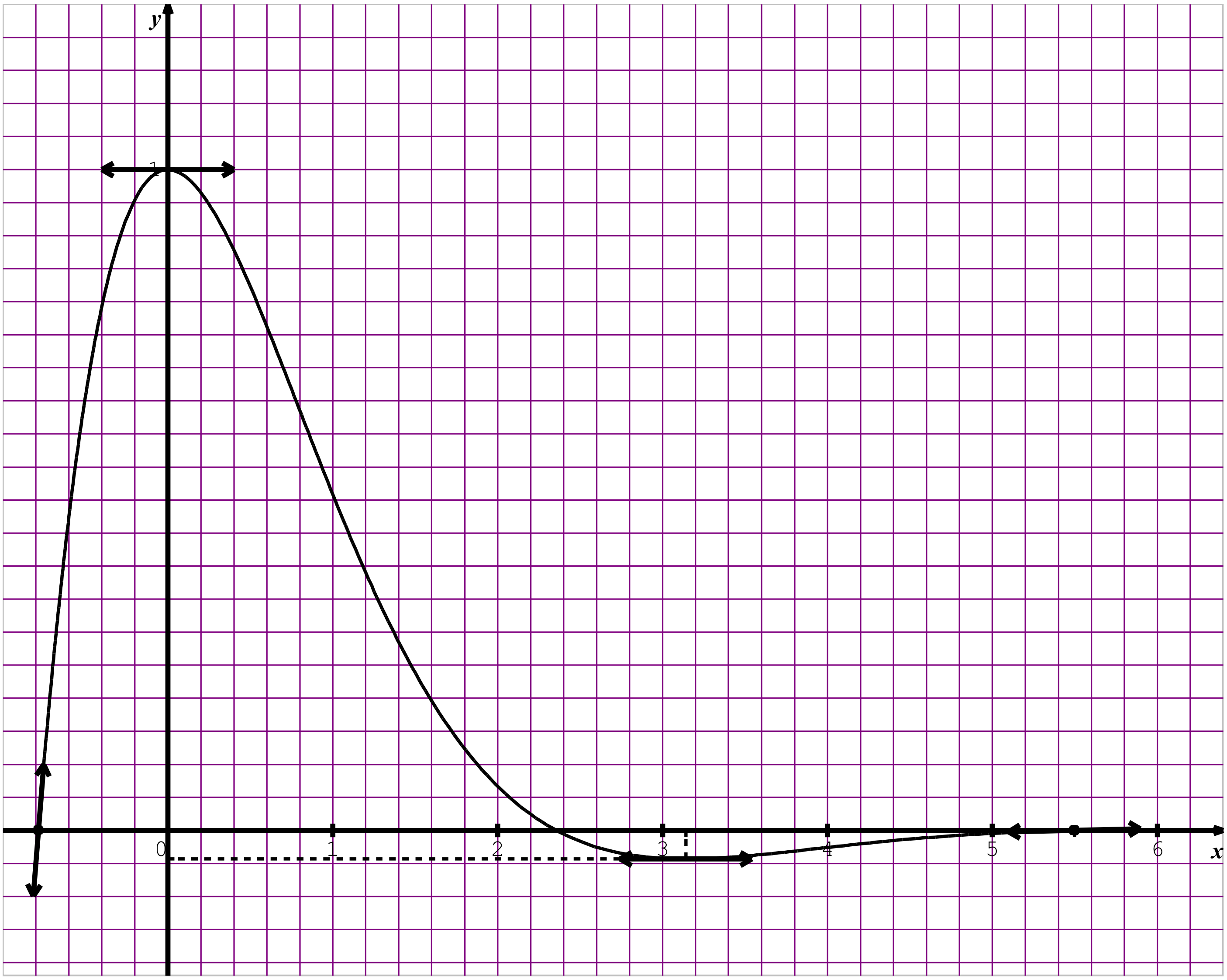


Or, la fonction sinus est strictement négative sur $\left]-\frac{\pi}{2};0\right[\cup \left]\pi;\frac{3\pi}{2}\right[$ et strictement positive sur $]0;\pi[$

D'où, le tableau suivant:

x	$-\frac{\pi}{4}$		0		π		$\frac{7\pi}{4}$
$-2e^{-x}$ $\sin(x)$		$-$ $-$	0	$-$ $+$	0	$-$ $-$	
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	1	$\searrow$	$-e^{-\pi}$	$\nearrow$	0

b) Tracé de $\mathscr{C}$ courbe représentative de f sur I.



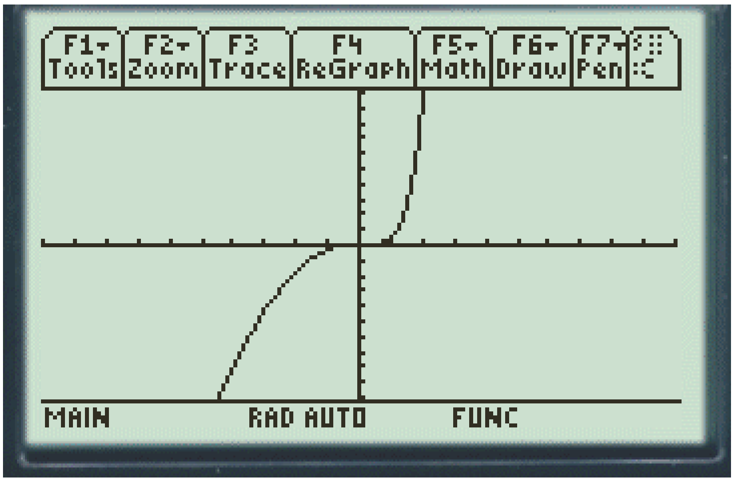
On marque les tangentes horizontales ... et les extremums
On calcule les coordonnées de quelques points de C_f.

Exercice D page 102- 103 ***Pondichéry Mars 2003 (sauf partie D : calcul intégral)***

à la question 3a) de la partie B, admettre que la fonction ln (logarithme népérien) est la fonction réciproque de la fonction exponentielle de base e.
C'est-à-dire: La solution de $e^x = a$ avec a est ln a.

f définie sur $\mathbb{R}$ par: $f(x) = x^2 e^{x-1} - \dfrac{x^2}{2}$

Graphique:



Conjectures:
Il semble que la fonction est croissante sur [–3; 2] et que la fonction coupe l'axe ($x'x$) à l'origine du repère.
Partie A:
1) f est le produit et la somme de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$
u: $x \mapsto x^2$ qui a pour dérivée $u'(x) = 2x$; v: $x \mapsto e^{x-1}$ qui a pour dérivée $v'(x) = 1 \times e^{x-1} = e^{x-1}$
w: $x \mapsto \dfrac{x^2}{2}$ qui a pour dérivée $w'(x) = x$
Pour tout x réel, $f'(x) = 2x\,e^{x-1} + x^2 e^{x-1} - x = x[(x+2)e^{x-1} - 1] = x \times g(x)$ avec $g(x) = (x+2)e^{x-1} - 1$
2) a) $\lim\limits_{x\to+\infty} (x+2) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{x-1} = +\infty$, d'où, (limite d'un produit) $\lim\limits_{x\to+\infty} (x+2)e^{x-1} = +\infty$, puis,
$\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$.
On sait: $\lim\limits_{x\to-\infty} xe^x = 0$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} .e^x = 0$
Comme $(x+2)e^{x-1} = xe^x \times \dfrac{1}{e} + \dfrac{2}{e}\,e^x$, on a: (limite d'une somme): $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x) = -1$
b) $g'(x) = 1 \times e^{x-1} + (x+2)e^{x-1} = (x+3)e^{x-1}$ qui a le même signe que $x + 3$, d'où, le tableau de variations suivant:

x	$-\infty$		-3		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
$g(x)$	-1	$\searrow$	$g(-3)$	$\nearrow$	$+\infty$

$g(-3) = -1 \times e^{-4} - 1 = -e^{-4} - 1$
c) ***Sur]–inf; –3]***, g est strictement décroissante et $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x) = -1$, d'où, pour $x \leqslant -3$, on a: $g(x) \leqslant -1$.
g ne s'annule pas sur $]-\infty; -3]$.
sur [–3; +∞[,
g est dérivable donc continue
g est strictement croissante
$g(-3) < 0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$, d'où, $0 \in [g(-3); +\infty[$
D'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires ou théorème de la bijection,
l'équation $g(x) = 0$ admet une et une seule solution sur $[-3; +\infty[$.
Soit **α le réel défini** par $g(\alpha) = 0$
Plus précisément: $g(0,20) \approx -0,0115$ et $g(0,21) \approx 0,003$
Comme $g(0,20) < g(\alpha) < g(0,21)$ et g croissante, on a: $0,20 < \alpha < 0,21$
d) On sait déjà: $g(x) < 0$ sur $]-\infty; -3]$,

et sur [3; +∞[, on obtient:
Si $x < \alpha$ alors $g(x) < 0$ et si $x > \alpha$ alors $g(x) > 0$

Résumé dans un tableau

x	$-\infty$		-3		α		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$			
$g(x)$	-1	$\searrow$	$g(-3)$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$
Signe g (x)		$-$		$-$	0	$+$	

3) Variations de f.
Comme $f'(x) = x \times g(x)$, il vient:

x	$-\infty$		0		α		$+\infty$
x		$-$	0	$+$		$+$	
g (x)		$-$		$-$	0	$+$	
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\nearrow$	0	$\searrow$	$f(\alpha)$	$\nearrow$	

La première conjecture est fausse.

Partie B:

($\mathscr{C}$) est la représentation graphique de f dans un repère orthogonal.

1) D'après la définition de α, on a: $(\alpha + 2)e^{\alpha-1} - 1 = 0$, d'où, $e^{\alpha-1} = \dfrac{1}{\alpha+2}$.

$$f(\alpha) = \alpha^2 e^{\alpha-1} - \frac{\alpha^2}{2} = \alpha^2 \frac{1}{\alpha+2} - \frac{\alpha^2}{2} = \frac{2\times\alpha^2 - \alpha^2(\alpha+2)}{2(\alpha+2)} = \frac{-\alpha^3}{2(\alpha+2)}$$

2) h est définie sur [0; 1] par $h(x) = \dfrac{-x^3}{2(x+2)} = -\dfrac{1}{2}\ \dfrac{x^3}{2(x+2)}$

a) Pour tout x de [0; 1], $h'(x) = -\dfrac{1}{2} \times \left[\dfrac{3x^2(x+2) - 1\times x^3}{(x+2)^2}\right] = -\dfrac{1}{2} \times \left[\dfrac{2x^2(x+1)}{(x+2)^2}\right]$

Il est évident que $h'(x)$ est négatif (nul en 0) sur [0 ; 1], d'où, le tableau suivant:

x	0		1
$h'(x)$	0	$-$	$-\dfrac{2}{9}$
$h(x)$	0	$\searrow$	$-\dfrac{1}{6}$

b) Comme $h(\alpha) = f(\alpha)$, un encadrement de $h(\alpha)$ donne un encadrement de $f(\alpha)$.
On sait $0{,}2 < \alpha < 0{,}21$ et h décroissante sur [0; 1], d'où, $h(0{,}21) < h(\alpha) < h(0{,}2)$
D'autre part, $f(\alpha)$ étant le minimum de f sur [0; +∞[, $f(\alpha) < f(0{,}20)$ et $f(\alpha) < f(0{,}21)$
Finalement: un minorant de $f(\alpha) = h(0{,}21)$
On peut prendre pour majorant le minimum des trois valeurs $h(0{,}2)$, $f(0{,}2)$ et $f(0{,}21)$

Valeurs numériques:

$h(0{,}21) = \dfrac{-0{,}21^3}{4{,}42} = -0{,}002\ 095\ 24$ ... soit $-0{,}002\ 10$ à 10^{-5} près par défaut

$h(0{,}2) = \dfrac{-0{,}2^3}{4{,}4} = -0{,}001\ 818$... soit $-0{,}001\ 81$ à 10^{-5} près par excès

$f(0{,}2) \approx -0{,}002\ 0268$ ... soit $-0{,}002\ 02$ à 10^{-5} près par excès

$f(0{,}21) \approx -0{,}002\ 0354$ ... soit $-0{,}002\ 03$ à 10^{-5} près par excès

$-0{,}002\ 10 < f(\alpha) < -0{,}002\ 03$ avec une amplitude de 7×10^{-5}

3 a) Les abscisses des points d'intersection de ($\mathscr{C}$) et de l'axe des abscisses sont les solutions de l'équation $f(x) = 0$

Soit: $x^2e^{x-1} - \dfrac{x^2}{2} = 0$ qui équivaut à $x^2(e^{x-1} - \dfrac{1}{2}) = 0$

qui équivaut à $x^2 = 0$ ou $e^{x-1} = \dfrac{1}{2}$

qui équivaut à $x = 0$ ou $x - 1 = \ln\dfrac{1}{2}$

qui équivaut à $x = 0$ ou $x = 1 + \ln\dfrac{1}{2}$

($\mathscr{C}$) est strictement en-dessous de l'axe sur $]-\infty; 0[\cup]0; 1 + \ln\dfrac{1}{2}[$ et

strictement au-dessus sur $]1 + \ln\dfrac{1}{2}; +\infty[$

Partie C:

Tracé de la courbe sur $[-0{,}2; 0{,}4]$

Unité sur $(x'x)$: 1 cm représente 0,05

Unité sur $(y'y)$: 1 cm représente 0,001

Tableau de valeurs avec un arrondi à 10^{-4} près

x	–0,20	–0,15	–0,10	–0,05	0	0,05	0,1	0,15	0,2	0,25	0,3	0,35	0,4
$f(x)\times10^4$	–80	–41	–17	–4	0	–3	–9	–16	–20	–17	–3	27	78

Tracé:

Le complément donné au bac

Partie D:calcul d'aire

On désire maintenant calculer l'aire du domaine D délimité par la courbe Γ, l'axe des abscisses, l'axe des ordonnées et la droite d'équation $x = 1 - \ln 2$.

1. À l'aide d'une double intégration par parties, déterminer une primitive sur $\mathbb{R}$ de la fonction:

$$x \mapsto x^2\,e^x .$$

2. En déduire une primitive F sur $\mathbb{R}$ de la fonction f.
3. Calculer alors,en unités d'aire, l'aire du domaine D puis en donner une valeur approchée en cm².

Correction de la partie D

1) Les fonctions $x \mapsto x^2$ et $x \mapsto e^x$ sont dérivables et leurs dérivées $x \mapsto 2x$ et $x \mapsto e^x$ sont continues sur $\mathbb{R}$,

d'où, on peut intégrer par parties $x \mapsto x^2\,e^x$.

Primitive G qui s'annule en 0 de $x \mapsto x^2\,e^x$.

$$G(x) = \int_0^x t^2 e^t\,dt = \left[t^2\times e^t\right]_0^x - \int_0^x 2t\times e^t\,dx$$

$G(x) = x^2\, e^x - 2 \displaystyle\int_0^x t\, e^t\, dt$

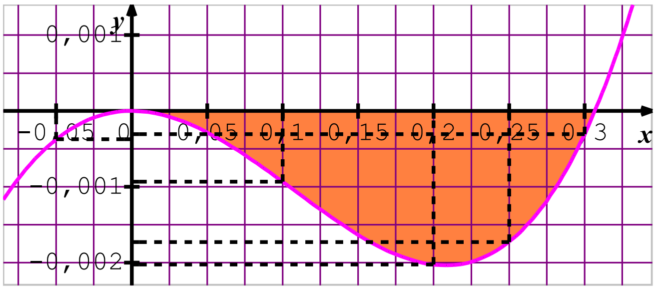
$\displaystyle\int_0^x t\, e^t\, dt = \left[t \times e^t\right]_0^x - \int_0^x 1 \times e^t\, dx = x\, e^x - \left[e^t\right]_0^x = x\, e^x - (e^x - 1) = x\, e^x - e^x + 1$

Finalement: $G(x) = x^2\, e^x - 2\,(x\, e^x - e^x + 1) = x^2\, e^x - 2\, x\, e^x + 2e^x - 2$

2) Or, $f(x) = \dfrac{1}{e} \times x^2\, e^x - \dfrac{x^2}{2}$,

d'où, une primitive F de f est $F(x) = \dfrac{1}{e}\, G(x) - \dfrac{1}{6}\, x^3$

3) Calcul de l'aire de D



En u.a.

Comme $f(x) \leqslant 0$ sur $[0;\, 1 - \ln 2]$, on a: $\mathscr{A}(D) = -\,(F(1 - \ln 2) - F(0)) = F(0) - F(1 - \ln 2)$ u.a.

$F(0) = \dfrac{1}{e}\, G(0) - 0 = 0$

$F(1 - \ln 2) = \dfrac{1}{e}\, G(1 - \ln 2) - \dfrac{1}{6}\, (1 - \ln 2)^3$

$\mathscr{A}(D) = -\,F(1 - \ln 2)$ u.a

En cm²

1 unité en abscisse fait: 20 cm

1 unité en ordonnée fait: 1 000 cm

1 u.a. = 20 000 cm²

$\mathscr{A}(D) = -\,F(1 - \ln 2) \times 20\,000$ cm²

$\mathscr{A}(D) \approx 0{,}0003478500650 \times 20\,000 = 6{,}957001299$ cm²

$\mathscr{A}(D) \approx 7$ cm²

"J'ai toujours pensé qu'il n'avait pas assez d'imagination pour devenir mathématicien !" ***Hilbert, David***
au sujet d'un étudiant qui a renoncé aux mathématiques pour la poésie