Index

1 page 122

$f : x \mapsto \ln(2x + 4)$ est définie si et seulement si $2x + 4 > 0$

d'où, $D_f =]-2; +\infty[$

Complément:

Sa dérivée est: pour tout $x > 0$, $f'(x) = \dfrac{2}{2x+4} = \dfrac{1}{x+2}$

g: $x \mapsto \ln(2x^2 - 4)$ est définie si et seulement si $2x^2 - 4 > 0$

d'où $D_g =]-\infty; -\sqrt{2}[\cup]\sqrt{2}; +\infty[$

Complément:

Sa dérivée est: pour tout $x \in D_g$ est $g'(x) = \dfrac{4x}{2x^2-4} = \dfrac{2x}{x^2-2}$

h: $x \mapsto \ln(2x - 4)(-x + 3)$ est définie si et seulement si $(2x - 4)(-x + 3) > 0$

d'où $D_h =]2; 3[$

Complément:

Sa dérivée est: pour tout $x \in D_h$,
$h'(x) = \dfrac{2(-x+3)+(-1)(2x-4)}{(2x-4)(-x+3)} = \dfrac{-4x+10}{(2x-4)(-x+3)} = \dfrac{2x-5}{(x-2)(x-3)}$

j: $x \mapsto \ln(2x-4) + \ln(-x+3)$ est définie si et seulement si $\begin{cases} 2x-4>0 \\ -x+3>0 \end{cases}$

d'où $D_j =]2; 3[$
Complément:
Sa dérivée est: pour tout $x \in D_j$,
$j'(x) = \dfrac{2}{2x-4} + \dfrac{-1}{-x+3} = \dfrac{2(-x+3)+(-1)(2x-4)}{(2x-4)(-x+3)} = \dfrac{-4x+10}{(2x-4)(-x+3)} = \dfrac{2x-5}{(x-2)(x-3)}$

k: $x \mapsto \ln(-x^2 + 1)$ est définie si et seulement si $-x^2 + 1 > 0$

d'où $D_k =]-1; 1[$
Complément:
Sa dérivée est: pour tout $x \in D_k$, $k'(x) = \dfrac{-2x}{-x^2+1} = \dfrac{2x}{x^2-1}$

m: $x \mapsto \ln(x^2 + 1)$ est définie si et seulement si $x^2 + 1 > 0$

d'où $D_m = \mathbb{R}$,
Complément:
Sa dérivée est: pour tout $x \in \mathbb{R}$, $m'(x) = \dfrac{2x}{x^2+1}$

---

3 page 122

Important:

Dès qu'on calcule un logarithme, pensez au domaine de définition.

Dans cet exercice, puisque toutes les expressions contiennent le nombre $\ln x$, **nécessairement $x > 0$**

1) $x \ln x = 0$ si et seulement si ($x > 0$ et ($x = 0$ ou $\ln x = 0$))

$x \ln x = 0$ si et seulement si $x = 1$

$S_1 = \{1\}$

2) $x \ln x > 0$

Comme $x > 0$, $x \ln x$ est du signe de $\ln x$.
Par conséquent, $x \ln x > 0$ si et seulement si $x > 1$.
$S_2 =]1; +\infty[$

3) $f : x \mapsto x \ln x$ est le produit des fonctions

$x \mapsto x$ et $x \mapsto \ln x$

f est définie sur $E_f =]0; +\infty[$

$g : x \mapsto \dfrac{1}{x\ln x} = \dfrac{1}{f(x)}$ est l'inverse de la fonction f.
Par conséquent, g est définie si et seulement si f est définie et $f(x) \neq 0$.
D'après 1/ et 3/ $E_g =]0 ;1 [\cup]1; +\infty[$

$h : x \mapsto \sqrt{x\ln x} = \sqrt{f(x)}$ est définie si et seulement si f est définie et $f(x) \geqslant 0$.
D'après 3/, 1/ et 2/, $E_h = [1; +\infty[$

Complément:
Pour tout $x > 0$, $f'(x) = 1\times\ln x + x\times \dfrac{1}{x} = \ln x + 1$
Pour tout $x > 0$ et $x \neq 1$, $g'(x) = \dfrac{-f'(x)}{(f(x))^2} = \dfrac{-(\ln x+1)}{(x\ln x)^2}$
Pour tout $x > 1$, $h'(x) = \dfrac{f'(x)}{2\sqrt{f(x)}} = \dfrac{\ln x+1}{2\sqrt{x\ln x}}$

---

4 page 122

$\ln \dfrac{1}{2} = -\ln 2$;

$\ln 8 = \ln 2^3 = 3\times\ln 2$;

$\ln 64 = \ln 2^6 = 6\times\ln 2$;

$\ln (2e^2) = \ln 2 + \ln e^2 = \ln 2 + 2 = 2 + \ln 2$

$\ln 64e = \ln 64 + \ln e = 6 \ln 2 + 1 = 1 + 6 \ln 2$;

$\ln \sqrt{32} = \dfrac{1}{2} \ln 32 = \dfrac{1}{2} \ln 2^5 = \dfrac{5}{2} \ln 2$;

$\ln \dfrac{2}{e} = \ln 2 - \ln e = \ln 2 - 1$;

$\ln \dfrac{32}{e} = \ln 32 - \ln e = 5 \ln 2 - 1$

---

5 page 122

On pose $\ln 2 = a$ et $\ln 5 = b$ (Remarquer: $\ln 10 = a + b$, $\ln 100 = 2(a + b)$, $\ln 1000 = 3(a + b)$ ...)
$\ln 100 = \ln 2^2\times5^2 = \ln 2^2 + \ln 5^2 = 2 \ln 2 + 2 \ln 5 = 2a + 2b = 2(a + b)$

$\ln 0{,}1 = \ln \dfrac{1}{10} = -(a + b)$; $\ln 40 = \ln 8\times5 = \ln 8 + \ln 5 = 3a + b$;

$\ln \dfrac{1}{20} = -\ln 20 = -\ln 2^2\times5 = -(2a + b) = -2a - b$; $\ln 8000 = \ldots\ 6a + 3b$;

$\ln \sqrt{2000} = \dfrac{1}{2} \ln 2000 = \ldots = \dfrac{1}{2} (\ln 2 + \ln 1000) = \dfrac{1}{2} (a + 3a + 3b) = 2a + \dfrac{3}{2} b$

$\ln \sqrt{0{,}02} = \dfrac{1}{2} \ln 0{,}02 = \dfrac{1}{2} (\ln 2 - \ln 100) = \dfrac{1}{2} (a - 2a - 2b) = -\dfrac{1}{2} a - b$

ln 0,000 008 = ln 8×10^{-6} = $3a-6(a+b)=-3a-6b$
ln 0,000 04 = ln 4×10^{-5} = $2a-5(a+b)=-3a-5b$

8 page 122

Point méthode:

* Lorsqu'on a un équation (E) de la forme ln (Expression{1}) = ln(Expression{2}), on sait

$$(E) \Leftrightarrow \begin{cases} \text{Expression}\{1\} > 0 \\ \text{Expression}\{2\} > 0 \\ \text{Expression}\{1\} = \text{Expression}\{2\} \end{cases}$$

** lorsqu'on a une somme ou une différence ... de logarithmes, on ramène APRÈS avoir analysé les conditions d'existence à la forme précédente en utilisant les propriétés algébriques du logarithme.

*** Lorsqu'on a: a ln b avec $b > 0$, on remplace par ln b^a

1/ $\ln(x-2)+\ln(x-32)=6\ln 2$ équivaut à $\begin{cases} x-2>0 \\ x-32>0 \\ \ln[(x-2)(x-32)]=\ln 2^6 \end{cases}$

Pour la troisième équation, on applique la fonction exp, bijection réciproque de ln.

$\ln(x-2)+\ln(x-32)=6\ln 2$ équivaut à $\begin{cases} x>32 \\ (x-2)(x-32)=64 \end{cases}$ équivaut à $x=34$

$S_1=\{34\}$

2/ $\ln(x-2)(x-32)=6\ln 2$ équivaut à $\begin{cases} (x-2)(x-32)>0 \\ (x-2)(x-32)=64 \end{cases}$

Pour la troisième équation, on applique la fonction exp, bijection réciproque de ln.

$\ln(x-2)(x-32)=6\ln 2$ équivaut à $x=0$ ou $x=34$

$S_2=\{0; 34\}$

3/ $\ln(-2x+7)-\ln(4x-9)=-\ln 3$ équivaut à $\begin{cases} -2x+7>0 \\ 4x-9>0 \\ \ln\dfrac{-2x+7}{4x-9}=\ln\dfrac{1}{3} \end{cases}$

Pour la troisième équation, on applique la fonction exp, bijection réciproque de ln.

$\ln(-2x+7)-\ln(4x-9)=-\ln 3$ équivaut à $\begin{cases} \dfrac{9}{4}<x<\dfrac{7}{2} \\ \dfrac{-2x+7}{4x-9}=\dfrac{1}{3} \end{cases}$

$\ln(-2x+7)-\ln(4x-9)=-\ln 3$ équivaut à $\begin{cases} \dfrac{9}{4}<x<\dfrac{7}{2} \\ -6x+21=4x-9 \end{cases}$ équivaut à $x=3$

$S_3=\{3\}$

9 page 122

1) Savoir que ln 1 = 0 et **on applique la fonction exp, bijection réciproque strictement croissante de ln**

après avoir déterminé le domaine d'existence des solutions.

$\ln(4x-8) > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 4x-8>0 \\ 4x-8>1 \end{cases} \Leftrightarrow x > \dfrac{9}{4}$ $\quad S_1 = \left]\dfrac{9}{4};+\infty\right[$

2) **on applique la fonction exp, bijection réciproque strictement croissante de ln après avoir déterminé le domaine d'existence des solutions..**

$\ln(4x-8) > 1 \Leftrightarrow \begin{cases} 4x-8>0 \\ 4x-8>\mathrm{e} \end{cases} \Leftrightarrow x > \dfrac{8+\mathrm{e}}{4}$ $\quad S_2 = \left]\dfrac{8+\mathrm{e}}{4};+\infty\right[$

3) **on applique la fonction exp, bijection réciproque strictement croissante de ln après avoir déterminé le domaine d'existence des solutions..**

$\ln(2x-8) > \ln 3 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x-8>0 \\ 2x-8>3 \end{cases} \Leftrightarrow x > \dfrac{11}{2}$ $\quad S_3 = \left]\dfrac{11}{2};+\infty\right[$

4) A**près avoir déterminé le domaine d'existence des solutions, on réorganise l'inéquation et on applique la fonction exp, bijection réciproque strictement croissante de ln.**

$\ln(2+x) + 1 < 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 2+x>0 \\ \ln(2+x)<-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>-2 \\ 2+x<\dfrac{1}{\mathrm{e}} \end{cases}$ $\quad S_4 = \left]-2;-2+\dfrac{1}{\mathrm{e}}\right[$

---

10 page 122

Voir exercice précédent pour les conditions

1) Résoudre l'équation:

$$\ln(x^2-1) = \ln(4x-1) - 2\ln 2 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2-1>0 \\ 4x-1>0 \\ \ln(x^2-1)=\ln\dfrac{4x-1}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x<-1 \text{ ou } x>1 \\ x>\dfrac{1}{4} \\ x^2-1=\dfrac{4x-1}{4} \end{cases}$$

$$\ln(x^2-1) = \ln(4x-1) - 2\ln 2 \Leftrightarrow \begin{cases} x>1 \\ 4x^2-4x-3=0 \end{cases}$$

Les solutions de $4x^2 - 4x - 3 = 0$ sont $-\dfrac{1}{2}$ et $\dfrac{3}{2}$.

$\ln(x^2-1) = \ln(4x-1) - 2\ln 2$ a pour unique solution le réel $\dfrac{3}{2}$.

2) Résoudre l'inéquation:

$$\ln(x^2-1) \leqslant \ln(4x-1) - 2\ln 2 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2-1>0 \\ 4x-1>0 \\ \ln(x^2-1)\leq\ln\dfrac{4x-1}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x<-1 \text{ ou } x>1 \\ x>\dfrac{1}{4} \\ x^2-1\leq\dfrac{4x-1}{4} \end{cases}$$

$\ln(x^2-1) = \ln(4x-1) - 2\ln 2 \Leftrightarrow \begin{cases} x>1 \\ 4x^2-4x-3\leq 0 \end{cases}$

Les solutions de $4x^2 - 4x - 3 \leqslant 0$ sont les réels de l'intervalle $\left[-\frac{1}{2};\frac{3}{2}\right]$

$\ln(x^2-1) \leqslant \ln(4x-1) - 2\ln 2$ a pour solutions les réels de l'intervalle $\left]1;\frac{3}{2}\right]$

Remarque:

on peut vérifier grâce à une calculatrice graphique en entrant les deux fonctions

$x \mapsto \ln(x^2-1)$ et $x \mapsto \ln(4x-1) - 2\ln 2$

---

12 page 122

1) $\ln x > 3 \Leftrightarrow x > e^3$ (on applique la fonction exp qui est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ et réciproque de ln)

$e^x > 3 \Leftrightarrow x > \ln 3$ (on applique la fonction ln qui est strictement croissante sur $]0; +\infty[$ et réciproque de exp)

2) $f : x \mapsto \sqrt{\ln x - 3}$ est définie si et seulement si $\ln x - 3 \geqslant 0$ $D_f = [e^3 ; +\infty[$ (d'après 1)

$g : x \mapsto \sqrt{\ln 2x - 3}$ est définie si et seulement si $\ln 2x - 3 \geqslant 0$

si et seulement si $\ln 2x \geqslant 3$

si et seulement si $2x \geqslant e^3$

si et seulement si $x \geqslant \frac{1}{2}e^3$ $D_g = \left[\frac{1}{2}e^3;+\infty\right[$

$h : x \mapsto \sqrt{e^x - 3}$ est définie si et seulement si $e^x \geqslant 3$ $D_h = [\ln 3 ; +\infty[$ (d'après 1)

$j : x \mapsto \sqrt{e^{2x} - 3}$ est définie si et seulement si $e^{2x} \geqslant 3$

est définie si et seulement si $2x \geqslant \ln 3$

est définie si et seulement si $x \geqslant \frac{1}{2}\ln 3$ $D_j = \left[\frac{1}{2}\ln 3;+\infty\right[$.

Compléments:

Comme la fonction $\sqrt{\ }$ n'est pas dérivable en 0, les fonctions f, g, h et j sont dérivables respectivement sur les intervalles **ouverts** $]e^3 ; +\infty[$, $\left]\frac{1}{2}e^3;+\infty\right[$, $]\ln 3 ; +\infty[$, $\left]\frac{1}{2}\ln 3;+\infty\right[$

$f'(x) = \frac{1}{x} \times \frac{1}{2\sqrt{\ln x - 3}}$

$g'(x) = \frac{2}{2x} \times \frac{1}{2\sqrt{\ln 2x - 3}} = \frac{1}{x} \times \frac{1}{2\sqrt{\ln 2x - 3}}$

$h'(x) = e^x \times \frac{1}{2\sqrt{e^x - 3}}$

$j'(x) = 2\times e^{2x}\times \frac{1}{2\sqrt{e^{2x} - 3}} = e^{2x}\times \frac{1}{\sqrt{e^{2x} - 3}}$

---

13 page 122

Prérequis:

Revoir si nécessaire: Résolution des systèmes linéaires ...

Méthode par substitution

Méthode par combinaison linéaire.

On peut consulter: *http://dossierslmm.chez-alice.fr/fiche/systeme_lineaire.pdf*

$\begin{cases} 5\ln x + 2\ln y = 8 \\ 4\ln x - 3\ln y = 11 \end{cases}$ équivaut à $\begin{cases} x>0\,;\, y>0 \\ X = \ln x\,;\, Y = \ln y \\ 5X + 2Y = 8 \\ 4X - 3Y = 11 \end{cases}$ On trouve $X = 2$ et $Y = -1$ $x = e^2$ et $y = \dfrac{1}{e}$

---

15 page 122

$f(x) = x \ln(x)$ définie sur $]0; +\infty[$
f est le produit de deux fonctions dérivables sur $]0; +\infty[$, donc, f est dérivable sur $]0; +\infty[$ et
pour tout $x > 0$, $f'(x) = 1\times\ln(x) + x\times \dfrac{1}{x} = \ln(x) + 1$

$g(x) = \dfrac{\ln(x)}{x}$ définie sur $]0; +\infty[$
g est le quotient de deux fonctions dérivables sur $]0; +\infty[$, et, le dénominateur ne s'annule pas, donc, g est dérivable sur $]0; +\infty[$ et
pour tout $x > 0$, $g'(x) = \dfrac{\frac{1}{x}\times x - 1\times\ln(x)}{x^2} = \dfrac{1-\ln(x)}{x^2}$

Compléments:

$f'(x) > 0 \Leftrightarrow x > \dfrac{1}{e}$ et $f'(x) < 0 \Leftrightarrow 0 < x \dfrac{1}{e}$, d'où,

x	0		$1/e$		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$	‖ 0	↘	$-1/e$	↗	$+\infty$

$g'(x) > 0 \Leftrightarrow 0 < x < e$ et $g'(x) < 0 \Leftrightarrow x > e$

x	0		e		$+\infty$
$g'(x)$	‖	$+$	0	$-$	
$g(x)$	‖ $-\infty$	↗	$1/e$	↘	0

---

16 page 122

$\dfrac{x}{x+1} > 0$ équivaut à $x \in]-\infty;-1[\cup]0;+\infty[$

Soit h définie sur $]0; +\infty[$ par $h(x) = \ln\left(\dfrac{x}{x+1}\right)$.

Pour $x > 0$, $x + 1 > 0$, d'où, $h(x) = \ln x - \ln(x + 1)$

h est dérivable sur $]0; +\infty[$ et $h'(x) = \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{x+1}$

$h'(x) > 0$ et h strictement croissante sur $]0; +\infty[$

Remarque:

Sur $]-\infty; -1[$, $\dfrac{x}{x+1} > 0$, mais, $x < 0$ et $x + 1 < 0$, d'où, $\ln\left(\dfrac{x}{x+1}\right) = \ln(-x) - \ln[-(x + 1)]$

---

17 page 123

$f(x) = 2x^2 - 4x + \ln x$ sur $]0;+\infty[$

f est la somme de fonctions dérivables sur $]0;+\infty[$

Pour tout $x > 0$, $f'(x) = 4x - 4 + \dfrac{1}{x} = \dfrac{4x^2-4x+1}{x} = \dfrac{(2x-1)^2}{x}$

$g(x) = x^2 \ln x - x^2$ sur $]0;+\infty[$

f est la somme des fonctions $u: x \mapsto x^2 \ln x$ et $v: x \mapsto -x^2$

u est le produit de fonctions dérivables sur $]0;+\infty[$ ....

Pour tout $x > 0$, $g'(x) = (2x \times \ln x + \dfrac{1}{x} \times x^2) - 2x = 2x \ln x - x = x(2\ln x - 1)$

Compléments:

Le signe de $g'(x)$ est celui de $2\ln x - 1$ car $x > 0$

$2\ln x - 1 > 0$ si et seulement si $\ln x > \dfrac{1}{2}$ si et seulement si $x > \sqrt{e}$.

étude des limites:

En 0, $g(x) = x \times x\ln x - x^2$,

comme $\lim\limits_{x\to 0} x = 0$ et $\lim\limits_{x\to 0} x\ln x = 0$ alors $\lim\limits_{x\to 0} g(x) = 0$

En $+\infty$, $g(x) = x^2(\ln x - 1)$

comme $\lim\limits_{x\to +\infty} x^2 = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to +\infty} \ln x = +\infty$ alors $\lim\limits_{x\to +\infty} g(x) = +\infty$

$g(\sqrt{e}) = (\sqrt{e})^2 \ln\sqrt{e} - (\sqrt{e})^2 = \dfrac{1}{2}e - e = -\dfrac{1}{2}e$

x	0		$\sqrt{e}$		$+\infty$
$g'(x)$	‖	$-$	0	$+$	
$g(x)$	‖ 0	↘	$-\dfrac{e}{2}$	↗	$+\infty$

---

19 page 123

sur $]0;+\infty[$ $f(x)=x+\ln x$ $f'(x)=1+\dfrac{1}{x}$ f strictement croissante sur $]0;+\infty[$

$g(x)=x-\ln x$ $g'(x)=1-\dfrac{1}{x}=\dfrac{x-1}{x}$ g strictement décroissante sur $]0;1]$ et strictement croissante sur $[1;+\infty[$ $g(1)=1$

$h(x)=x\ln x$ $h'(x)=\ln x+1$ h strictement décroissante sur $\left]0;\dfrac{1}{e}\right]$ et strictement croissante sur $\left[\dfrac{1}{e};+\infty\right[$. $h\left(\dfrac{1}{e}\right)=-\dfrac{1}{\mathrm{e}}$

---

22 page 123

p et s définies sur [2; +∞[par: $p : x \mapsto \dfrac{x}{\ln x}$ et s: $x \mapsto \dfrac{\ln x}{x+1}$

1) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln x}{x} = 0$ et les nombres sont positifs, d'où, son inverse a pour limite +∞.

$\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x}{\ln x} = +\infty$.

2) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln x}{x+1}$

Pour étudier cette limite, on peut remarquer que les nombres réels x et $x + 1$ sont équivalents à l'infini.

Cela se traduit par le fait que $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x}{x+1} = 1$

Comme on connaît la limite de $\dfrac{\ln x}{x}$, on écrit: $\dfrac{\ln x}{x} \times \dfrac{x}{x+1} = \dfrac{\ln x}{x+1}$

Par produit, on a donc: $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln x}{x+1} = 0$

3) Ce dernier résultat prouve que la droite d'équation $y = 0$ est asymptote à la courbe représentative de s.

Recherche d'une asymptote pour la courbe représentative de p

On cherche donc s'il existe a (non nul) et b tels que $\lim\limits_{x\to+\infty} (p(x) - ax - b) = 0$

Il faudrait donc: $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{p(x)}{x} = a$.

Étudions $\dfrac{p(x)}{x}$

$\dfrac{p(x)}{x} = \dfrac{1}{\ln x}$ a pour limite 0 en +∞.

La courbe représentative de la fonction p a une direction asymptotique parallèle à l'axe des abscisses, mais, n'a pas d'asymptote.

---

23 page 123

$\lim\limits_{x \to 0} (x + \ln x) = -\infty$ (asymptote d'équation $x = 0$) $\lim\limits_{x \to +\infty} (x + \ln x) = +\infty$

$\lim\limits_{x \to 0} (x - \ln x) = +\infty$ (asymptote d'équation $x = 0$) $\lim\limits_{x \to +\infty} (x - \ln x) = \lim\limits_{x \to +\infty} x\left(1 - \dfrac{\ln x}{x}\right) = +\infty$

$\lim\limits_{x \to 0} x \ln x = 0$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} x \ln x = +\infty$

---

30 page 123

On pose $g(x) = \dfrac{1}{\ln x}$.

g est par conséquent la fonction **composée**: ***fonction ln*** suivie de la ***fonction inverse***

1) g est définie si et seulement si $\begin{cases} x > 0 \\ \ln x \neq 0 \end{cases}$ si et seulement si $\begin{cases} x > 0 \\ x \neq 1 \end{cases}$, d'où, $D_g =]0; 1[\cup]1; +\infty[$.

Le signe de $g(x)$ est celui de $\ln x$, d'où, $g(x) > 0$ sur $]1; +\infty[$ et $g(x) < 0$ sur $]0; 1[$

2) g est de la forme $\dfrac{1}{u}$ avec u dérivable et non nulle sur chaque intervalle de D_g, d'où, $g' = \dfrac{-u'}{u^2}$

Pour tout x de D_g, on a: $g'(x) = \dfrac{-\frac{1}{x}}{(\ln x)^2} = -\dfrac{1}{x(\ln x)^2}$

On en déduit que pour tout $x \in D_g$, $g'(x) < 0$.

g est strictement décroissante sur $]0; 1[$ et strictement décroissante sur $]1; +\infty[$

3) $\lim\limits_{x \to +\infty} \ln x = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{x} = 0$, d'où, $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = 0$ (limites de fonctions composées)

$\lim\limits_{x \to 0} \ln(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{1}{x} = 0$, d'où, $\lim\limits_{x \to -\infty} g(x) = 0$ (limites de fonctions composées)

On sait: si $0 < x < 1$ alors $\ln x < 0$,

$\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x < 1}} \ln x = 0$ et $\ln x < 0$ et $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x < 0}} \dfrac{1}{x} = -\infty$, d'où, $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x < 1}} g(x) = -\infty$

On sait: si $x > 1$ alors $\ln x > 0$,

$\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x > 1}} \ln x = 0$ et $\ln x > 0$ et $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \dfrac{1}{x} = +\infty$, d'où, $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x > 1}} g(x) = +\infty$.

4) Tableau de variations et tracé de la courbe de g.

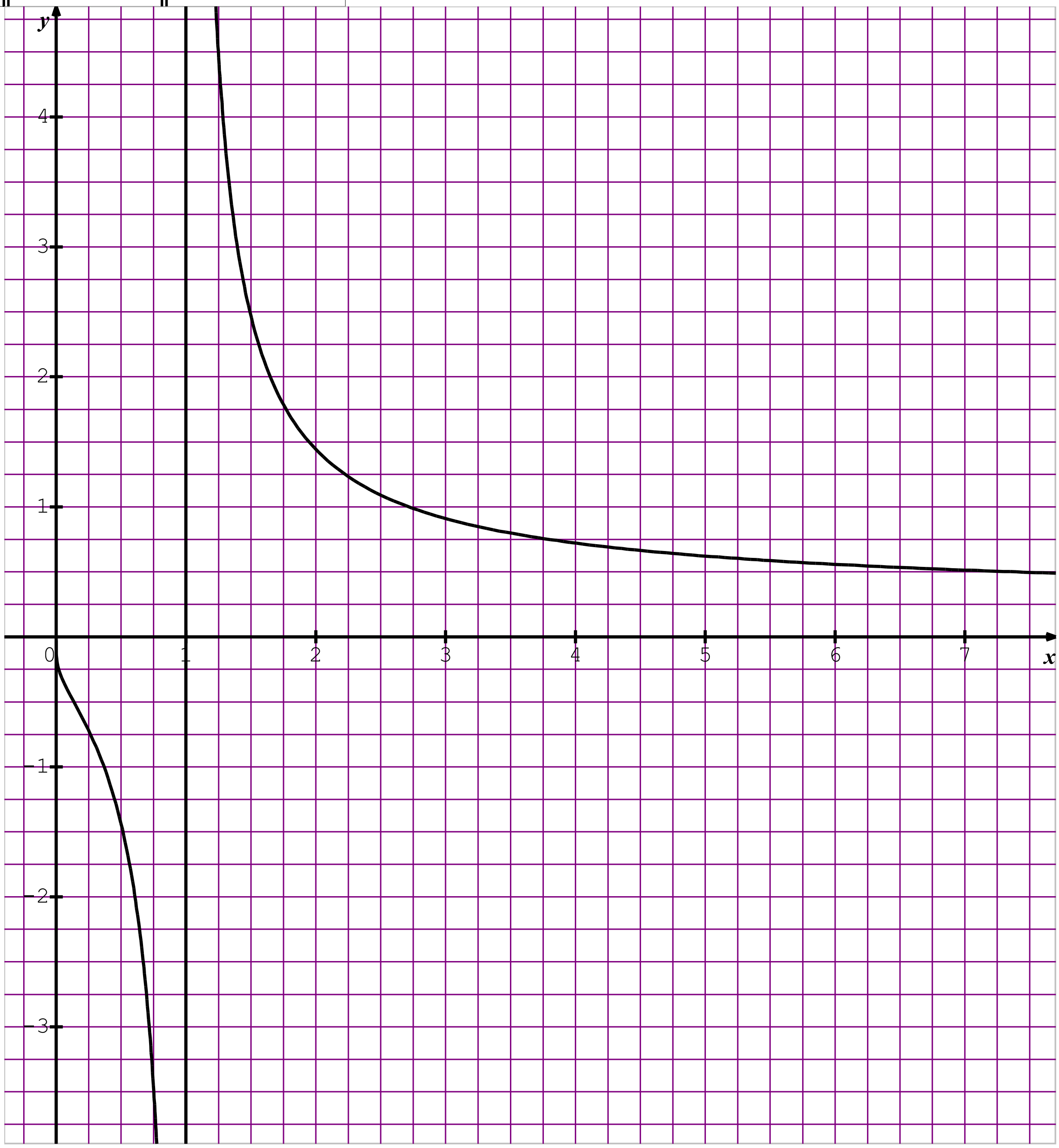
Ne pas oublier les " doubles barres ".

Préciser quelques coordonnées et pourquoi pas quelques coefficients directeurs de tangentes.

$g(e) = 1$ *$g'(e) = -\dfrac{1}{\mathrm{e}}$*

Pour x très proche de 0, $|g'(x)|$ est très, très grand .... la pente de la courbe au point de départ est très *forte ...*

x	0	1	$+\infty$
$g'(x)$	‖ $-$	‖ $-$	
$g(x)$	‖ $0 \searrow -\infty$	‖ $+\infty \searrow 0$	



31 page 123

1) h définie sur $]0; +\infty[$ par $h(x) = x^2 + 1 - \ln x$

h est la différence des fonctions $x \mapsto x^2 + 1$ et $x \mapsto \ln x$ dérivables sur $\mathbb{R}^{+*}$, donc, h est dérivable sur $\mathbb{R}^{+*}$

Pour tout $x > 0$, $h'(x) = 2x - \frac{1}{x} = \frac{2x^2-1}{x}$

Comme $2x^2 - 1 = (\sqrt{2}\,x - 1)(\sqrt{2}\,x + 1)$ et que $x > 0$, $h'(x)$ est donc du signe de $\sqrt{2}\,x - 1$

$\sqrt{2}\,x - 1 > 0$ si et seulement si $x > \frac{1}{\sqrt{2}}$ $\left(\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

x	0			$\frac{\sqrt{2}}{2}$			$+\infty$
$h'(x)$	‖		$-$	0	$+$		
$h(x)$	‖		$\searrow$	min	$\nearrow$		

Le minimum vaut: $h\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{1}{2} + 1 - \ln\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{3}{2} + \ln(\sqrt{2}) = \frac{3}{2} + \frac{1}{2}\ln 2$,

Or, $2 > 1$ implique $\ln 2 > 0$,

d'où, ce minimum est strictement positif.

Pour tout $x > 0$, $h(x) > 0$

2) f définie sur $]0; +\infty[$ par $f(x) = x + \frac{\ln x}{x}$

f est la ***somme*** de $x \mapsto x$ et v: $x \mapsto \frac{\ln x}{x}$

v est le ***quotient*** de ln par la fonction inverse.

D'où, pour tout $x > 0$, $f'(x) = 1 + \frac{\frac{1}{x}\times x - 1\times\ln x}{x^2} = \frac{x^2+1-\ln x}{x^2} = \frac{h(x)}{x^2}$

Or, $h(x) > 0$ (montré au 1/), d'où, $f'(x) > 0$

Comme $f'(x) > 0$, la fonction f est strictement croissante sur $\mathbb{R}^{+*}$.

Limite en 0:

On sait:

$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \ln x = -\infty$ et $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{1}{x} = +\infty$, d'où, par produit, $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{\ln x}{x} = -\infty$.

Comme $\lim\limits_{x\to 0} x = 0$, par somme, $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = -\infty$.

Limite en $+\infty$.

On sait: $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$

(Preuve: On pose $\ln x = X$, d'où, $x = e^X$.

La limite quand x tend vers $+\infty$ de $\frac{\ln x}{x}$ est la limite quand X tend vers $+\infty$ de $\frac{X}{e^X}$)

Comme $\lim\limits_{x\to+\infty} x = +\infty$, on en déduit: $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

3) Puisque $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = -\infty$, l'axe des ordonnées est asymptote à C_f représentation graphique de f.

4) Puisque $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) - x = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$, la droite d d'équation $y = x$ est asymptote à C_f.

5) L'abscisse du point d'intersection I de C_f et d est la solution de l'équation $f(x) = x$,

$f(x) = x \Leftrightarrow \dfrac{\ln x}{x} = 0 \Leftrightarrow \ln x = 0 \Leftrightarrow x = 1$

Les coordonnées du point $I(1;\ 1)$

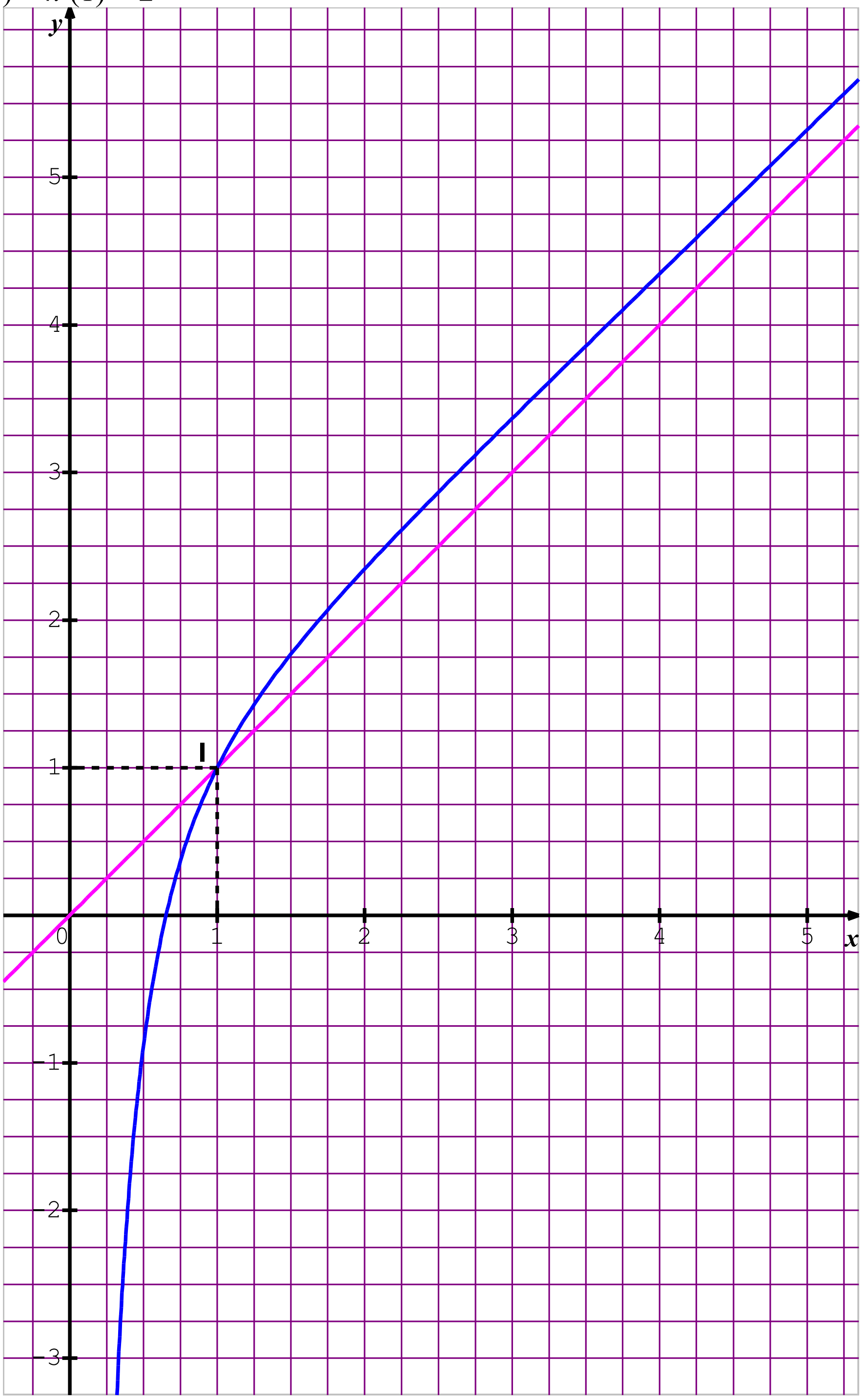
(On peut compléter par la position relative des courbes: si $x > 1, f(x) > x$, et, si $0 < x < 1, f(x) < x$)

Tracé:

Commencer par tracer les asymptotes, placer le point I déterminé précédemment

Faire un tableau de valeurs pour préciser quelques points ...

On peut préciser $f'(1) = h(1) = 2$



32 page 124

f définie sur $]2; +\infty[$ par $f(x) = \ln \dfrac{x-2}{x-1}$

1) **Limite de f en 2**

Remarque: nécessairement $x > 2$

$\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x-2}{x-1} = 0$ et $\dfrac{x-2}{x-1} > 0$

Comme $\lim\limits_{x \to 0} \ln x = -\infty$, on a: $\lim\limits_{x \to 2} f(x) = -\infty$ (limite de fonctions composées)

Limite en $+\infty$.

$\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x-2}{x-1} = 1$ (limite de fonctions rationnelles)

Comme $\lim\limits_{x \to 1} \ln x = \ln 1 = 0$ (continuité de ln), on a:

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$

2) **Variations**

Posons $u(x) = \dfrac{x-2}{x-1}$ $\qquad u'(x) = \dfrac{1 \times (x-1) - 1 \times (x-2)}{(x-1)^2} = \dfrac{1}{(x-1)^2}$

$f'(x) = \dfrac{u'(x)}{u(x)} = \dfrac{1}{(x-1)^2} \times \dfrac{x-1}{x-2} = \dfrac{1}{(x-1)(x-2)}$

Pour tout $x > 2$, $f'(x) > 0$ et f est par conséquent strictement croissante sur $]2;+\infty[$

x	2		$+\infty$
$f'(x)$	‖	+	
$f(x)$	‖ $-\infty$	↗	0

Compléments:

En supposant la même expression algébrique, la fonction g définie sur $]-\infty; 1[\cup]2; +\infty[$ par $g(x) = = \ln \dfrac{x-2}{x-1}$ aurait:

Limite en $-\infty$: $\lim\limits_{x \to -\infty} g(x) = 0$ (même démarche qu'en $+\infty$)

Limite en 1 (Nécessairement $x < 1$)

$\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x < 1}} (x-1) = 0$ et $x - 1 < 0$, et, $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x < 1}} (x-2) = 1$

d'où, $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x < 1}} \dfrac{x-2}{x-1} = +\infty$, comme $\lim\limits_{x \to +\infty} \ln x = +\infty$, $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x < 1}} g(x) = +\infty$.

$g'(x) = \dfrac{1}{(x-1)(x-2)}$

x	$-\infty$		1	XXXXXX	2		$+\infty$
$g'(x)$		+	‖	XXXXXX	‖	+	
$g(x)$	0	↗	$+\infty$ ‖	XXXXXX XXXXXX XXXXXX	‖ $-\infty$	↗	0

33 page 124

$g(x) = \ln(2 - x) + \ln(2 + x)$ $\qquad x \in]-2\,;2[$

1) $g(-x) = \ln(2 - (-x)) + \ln(2 + (-x)) = \ldots = g(x)$ $\qquad$ Fonction paire (d'où l'axe des ordonnées est un axe de symétrie de C_g)

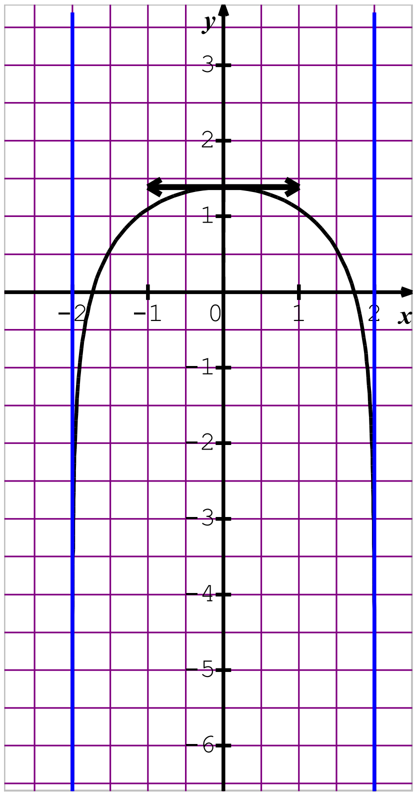
2) $\lim\limits_{x \to 2} g(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x \to -2} g(x) = -\infty$ (limites de fonctions composées).

Les droites d'équations respectives $x = 2$ et $x = -2$ sont asymptotes à C_g.

3) $g'(x) = \dfrac{-1}{2-x} + \dfrac{1}{2+x} = \dfrac{-2x}{(2-x)(2+x)}$.

Sur $]-2; 2[$, le produit $(2 - x)(2 + x) > 0$, d'où, $f'(x)$ est du signe de $-x$.

x	-2		0		2
$g'(x)$	‖	$+$	0	$-$	‖
$g(x)$	‖ $-\infty$	$\nearrow$	$\ln 4$	$\searrow$	$-\infty$ ‖



36 page 124

1) u définie sur $]0;+\infty[$ par $u(x) = \ln x - x$ $\quad u'(x) = \dfrac{1}{x} - 1 = \dfrac{1-x}{x}$

Remarque: $\lim\limits_{x \to +\infty} u(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} x\left(\dfrac{\ln x}{x} - 1\right) = -\infty$

x	0		1		$+\infty$
$u'(x)$	‖	$+$	0	$-$	
$u(x)$	‖ $-\infty$	$\nearrow$	-1	$\searrow$	$-\infty$

le maximum de u étant -1 , $u(x)<0$

2) $f(x)=(\ln x)^2-2x$ $\quad f'(x)=2\times\frac{1}{x}\times\ln x-2=2\times\frac{\ln x-x}{x}=2\frac{u(x)}{x}$

f est donc strictement décroissante sur $]0;+\infty[$

---

37 page 124

$f(x) = x^2 - \ln x$ $\quad g(x) = x^2 + \ln x$ $\quad$ sur $]0; +\infty[$

1) $\lim_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$ et $\lim_{x\to 0} g(x) = -\infty$ (immédiat)

f en $+\infty$ (Factoriser x^2, car, $\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x^2} = 0$)

$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} x^2(1-\ln x/x^2) = +\infty$ $\quad$ $\lim_{x\to 0} f(x) = +\infty$ (immédiat)

2) $f(x) = x^2 - \ln(x)$.

f est la différence de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}^{+*}$, donc, f est dérivable sur $\mathbb{R}^{+*}$ et, $f'(x) = 2x - \frac{1}{x} = \frac{2x^2-1}{x}$

qui est du signe de $2x^2 - 1$ sur $]0; +\infty[$

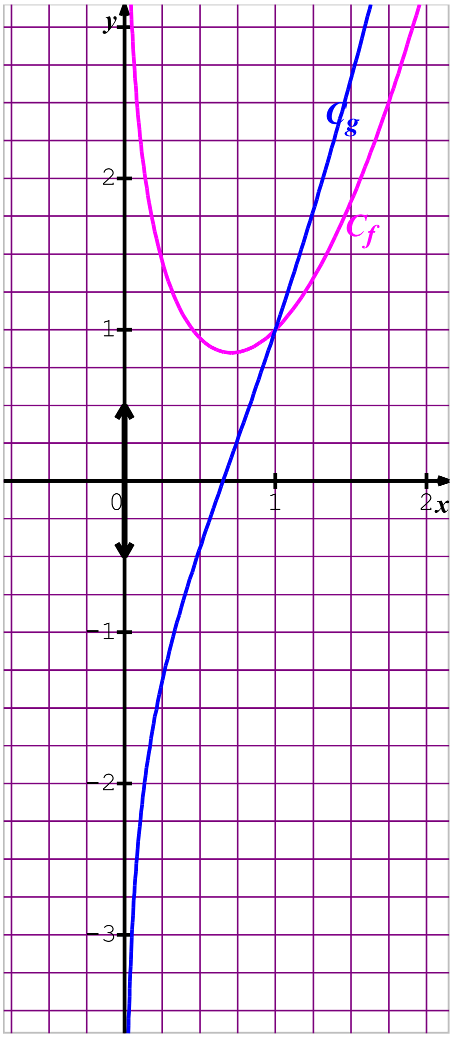
$x > 0$ et $2x^2 - 1 > 0$ sur $\left]\frac{\sqrt{2}}{2};+\infty\right[$, d'où,

x	0		$\frac{\sqrt{2}}{2}$		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$	‖ $+\infty$	$\searrow$	min	$\nearrow$	$+\infty$

$g(x) = x^2 + \ln(x)$.

g est la somme de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}^{+*}$, donc, g est dérivable sur $\mathbb{R}^{+*}$ et, $g'(x) = 2x + \frac{1}{x}$ qui est strictement positif sur $\mathbb{R}^{+*}$.

g est strictement croissante sur $\mathbb{R}^{+*}$.



40 page 124

1) $g(x) = x^2 \ln(x)$. g est définie sur $\mathbb{R}^{+*}$.
g est le produit de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}^{+*}$, d'où, f est dérivable sur $\mathbb{R}^{+*}$ et

$g'(x) = 2x\ln(x)+\dfrac{x^2}{x} = 2x\ln(x)+x = x(2\ln(x)+1)$

Comme $x > 0$, le signe de $g'(x)$ est celui de $2\ln(x) + 1$

$2\ln(x) + 1 = 0$ si et seulement si $\ln(x) = -\dfrac{1}{2}$ si et seulement si $x = e^{-1/2} = \dfrac{1}{\sqrt{e}}$

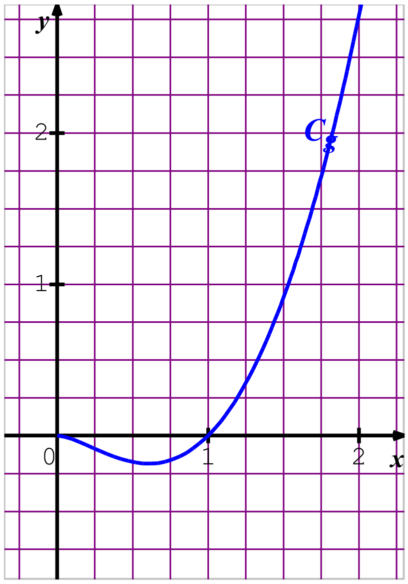
$2\ln(x) + 1 > 0$ si et seulement si $\ln(x) > -\dfrac{1}{2}$ si et seulement si $x > e^{-1/2}$ si et seulement si $x > \dfrac{1}{\sqrt{e}}$

g est strictement décroissante sur $]0; \dfrac{1}{\sqrt{e}}]$ et strictement croissante sur $[\dfrac{1}{\sqrt{e}} ; +\infty[$

Le minimum de g vaut $g\left(\dfrac{1}{\sqrt{e}}\right) = -\dfrac{1}{2e}$

Comme $g(x) = x\times(x\ln(x))$ et que $\lim\limits_{x\to 0} x\ln(x) = 0$, on a: $\lim\limits_{x\to 0} g(x) = 0$

$\lim\limits_{x\to +\infty} g(x) = +\infty$ (aucune difficulté)



2) $g(x) = 0$ si et seulement si $x > 0$ et $\ln x = 0$, d'où, $x = 1$
$g(x)$ est du signe de $\ln x$, d'où, $g(x) < 0$ sur $]0; 1[$ et $g(x) > 0$ sur $]1; +\infty[$

---

49 page 125

$h : x \mapsto 4^x$ et $p : x \mapsto (0{,}25)^x$

1) 2) $h(x) = 4^x = e^{x\ln 4}$ et $p(x) = (0{,}25)^x = e^{x\ln 0{,}25}$, d'où, $h'(x) = \ln 4\, e^{x\ln 4}$ et $p'(x) = \ln(0{,}25)e^{x\ln 0{,}25}$

Comme $\ln 4 > 0$ alors h strictement croissante sur $\mathbb{R}$ et comme $\ln 0{,}25 < 0$ alors p strictement décroissante sur $\mathbb{R}$

3) $\lim\limits_{x\to+\infty} h(x) = +\infty$ $\lim\limits_{x\to-\infty} h(x) = 0$ $\lim\limits_{x\to+\infty} p(x) = 0$ $\lim\limits_{x\to-\infty} p(x) = +\infty$

---

50 page 125

1) a) $4^x = 10\,000$ équivaut à $x\ln 4 = \ln 10\,000 = 4\ln 10$ équivaut à $x = \dfrac{4\ln 10}{\ln 4} = \dfrac{2\ln 10}{\ln 2}$

b) $4^x = 0{,}2$ équivaut à $x\ln 4 = \ln 0{,}2 = -\ln 5$ équivaut à $x = \dfrac{-\ln 5}{\ln 4}$

c) $4^x = 1$ équivaut à $x = 0$

d) $0{,}25^x = 1$ équivaut à $x = 0$

e) $0{,}25^x = -0{,}001$ aucune solution

f) $0{,}25^x = 10$ équivaut à $x\ln 0{,}25 = \ln 10$ équivaut à $x = \dfrac{\ln 10}{-\ln 4} = -\dfrac{\ln 10}{\ln 4}$

2) $4^x < 10\,000$ si et seulement si $0 < x < \dfrac{2\ln 10}{\ln 2}$

b) $4^x > 0{,}2$ si et seulement si $x > \dfrac{-\ln 5}{\ln 4}$

Dans les deux cas, la fonction *h* est strictement croissante (voir 49 page 125) et voir questions 1a) b) de cet exercice

51 page 125

$A=\sqrt[3]{54}\times\sqrt{108}\times\sqrt[5]{1024}$ Comme $54=2\times3^3$, $108=2^2\times3^3$ et $1024=2^{10}$, on a:

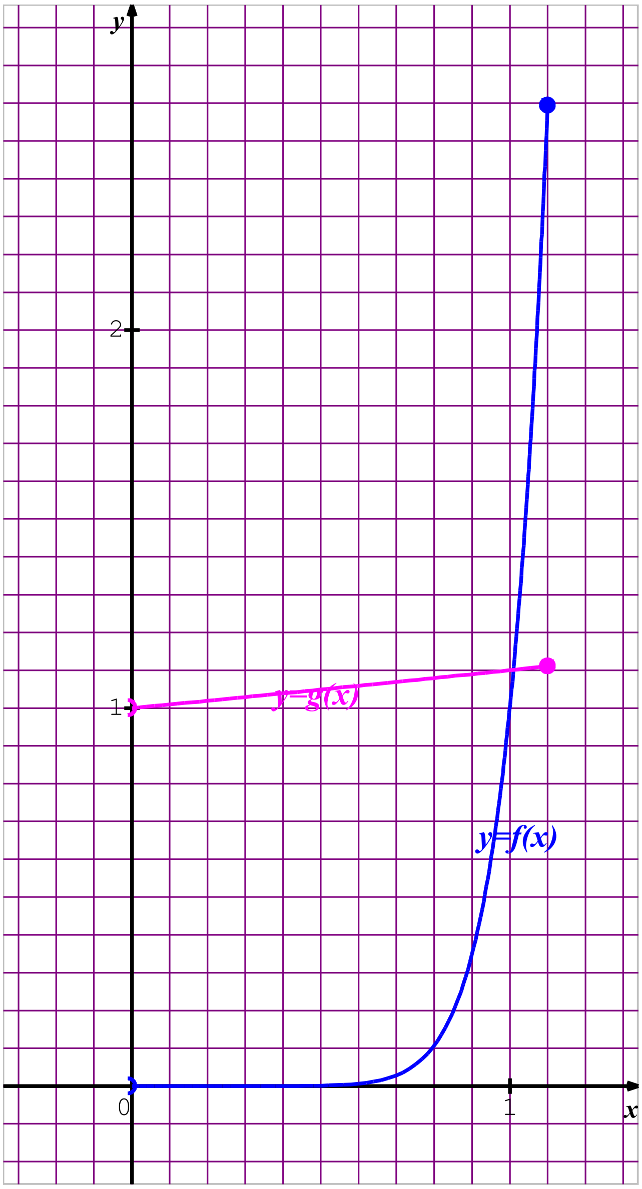
$A=(2\times3^3)^{\frac{1}{3}}\times(2^2\times3^3)^{\frac{1}{2}}\times(2^{10})^{\frac{1}{5}}=2^{\frac{10}{3}}\times3^{\frac{5}{2}}=2^3\times2^{\frac{1}{3}}\times3^2\times3^{\frac{1}{2}}$ $\qquad A=72\times\sqrt[3]{2}\times\sqrt{3}$

$B=\sqrt[3]{75}\times\sqrt[5]{375}$ Comme $75=3\times5^2$ et $375=3\times5^3$, on a:

$B=(3\times5^2)^{\frac{1}{3}}\times(3\times5^3)^{\frac{1}{5}}=3^{\frac{8}{15}}\times5^{\frac{19}{15}}=5\times3^{\frac{8}{15}}\times5^{\frac{4}{15}} = 5\times(9\times5)^{\frac{4}{15}}$ =...

66 page 128

f et *g* sont définies sur]0; + ∞[par $f(x) = x^{10}$ et $g(x) = (1{,}1)^x$
1) La dérivée de *f* est $f'(x) = 10\ x^9$
Dérivée de *g:*
$g(x) = (1{,}1)^x = \mathrm{e}^{x\ln 1{,}1}$, d'où, $g'(x) = \ln 1{,}1\times \mathrm{e}^{x\ln 1{,}1}$.
Comme 1,1 > 1, ln 1,1 > 0.
$f'(x)$ et $g'(x)$ sont donc strictement positifs sur]0; +∞[.
Les fonctions *f* et *g* sont strictement croissantes sur]0; +∞[.
2) Tracé



3) On pose $d(x) = g(x) - f(x)$

$d(1) = 1,1 - 1 = 0,1$

$d(1,1) = 1,1^{1,1} - 1,1^{10} \approx -1,48$

d étant la différence de deux fonctions dérivables est dérivable sur [1; 1,1]

Elle est donc continue et comme $d(1) > 0$ et $d(1,1) < 0$, il existe au moins un réel α de [1; 1,1] solution de $d(x) = 0$

La calculatrice donne: $d(1,01) \approx -0,00357$

on en déduit $1 < \alpha < 1,01$

Complément: Pour prouver que cette valeur est unique sur [1; 1,1], il faudrait montrer que la fonction d est strictement monotone.

4) $d(x) = 0 \Leftrightarrow f(x) = g(x) \Leftrightarrow x^{10} = 1,1^{x}$

Or, $x^{10} = e^{10 \ln x}$ et $(1,1)^{x} = e^{x \ln 1,1}$

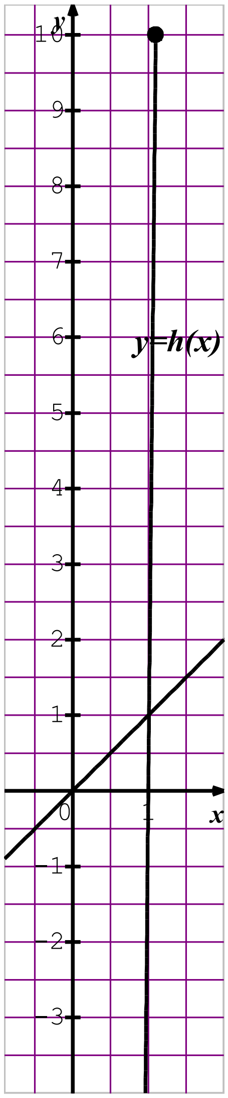
Comme l'exponentielle est une fonction bijective, l'équation $e^{10 \ln x} = e^{x \ln 1,1} \Leftrightarrow 10 \ln x = x \ln 1,1$

On pose $h(x) = \dfrac{10 \ln x}{\ln 1,1}$

Finalement: $d(x) = 0 \Leftrightarrow x = h(x)$

5) La solution de l'équation $d(x) = 0$ est l'abscisses du point d'intersection de la courbe C_h et de la droite Δ

d'équation $y = x$.



Remarque:
La fonction exponentielle finira par dépasser la fonction puissance.
Calculer 686^{10} et $1{,}1^{686}$ et comparer ...

Exercice A page 130 Amérique du Nord juin 2002 (sauf partie C)

Pour tout réel $k > 0$, f_k définie sur $[0; +\infty[$ par $f_k(x) = \ln(e^x + kx) - x$.

Soit $\mathscr{C}_k$ la courbe de f_k dans un repère orthogonal $(O ; \vec{i}, \vec{j})$. (Unités: 5 cm sur (Ox), 10 cm sur (Oy))

Partie A: étude de f_1

1) $f_1(x) = \ln(e^x + x) - x$

$$f_1'(x) = \frac{e^x+1}{e^x+x} - 1 = \frac{1-x}{e^x+x}$$

La dérivée est du signe de $1 - x$,
d'où, f_1 est strictement croissante sur $[0; 1]$ et strictement décroissante sur $[1; +\infty[$.
Le maximum vaut $f_1(1) = \ln(e + 1) - 1$.

2) Comme $x = \ln(e^x)$ et que la différence de deux logarithmes est le logarithme du quotient ..., on a:

$$f_1(x) = \ln(e^x + x) - x = \ln(e^x + x) - \ln(e^x) = \ln \frac{e^x + x}{e^x} = \ln\left(1 + \frac{x}{e^x}\right)$$

En $+\infty$, on sait: $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$, d'où, $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{x}{e^x} = 0$, puis, $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(1 + \frac{x}{e^x}\right) = 1$

Comme la fonction ln est continue en 1, on a: $\lim\limits_{x \to +\infty} f_1(x) = \ln 1 = 0$

3) $f_1(0) = ... = 0$

x	0		1		$+\infty$
$f_1'(x)$		$+$	0	$-$	
$f_1(x)$	0	$\nearrow$	Max	$\searrow$	0

Partie B: étude de f_k

1) $f_k(x) = \ln(e^x + kx) - x$ *($k > 0$)*

$$f_k'(x) = \frac{e^x + k}{e^x + kx} - 1 = ... = \frac{k(1-x)}{e^x + kx}$$

La dérivée est du signe de $1 - x$,
d'où, f_k est strictement croissante sur [0; 1] et strictement décroissante sur $[1; +\infty[$.
Le maximum vaut $f_k(1) = \ln(e + k) - 1$

2) $f_k(x) = \ln(e^x + kx) - x = \ln(e^x + kx) - \ln(e^x) = \ln \frac{e^x + kx}{e^x} = \ln\left(1 + k\frac{x}{e^x}\right)$

En $+\infty$, on sait: $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$, d'où, $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{x}{e^x} = 0$, puis, $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(1 + k\frac{x}{e^x}\right) = 1$

Comme la fonction ln est continue en 1, on a: $\lim\limits_{x \to +\infty} f_k(x) = \ln 1 = 0$

3) a) $f_k(0) = ... = 0$

x	0		1		$+\infty$
$f_k'(x)$		$+$	0	$-$	
$f_k(x)$	0	$\nearrow$	Max	$\searrow$	0

3 b) Le maximum vaut: $f_k(k) = \ln(e + k) - 1 = \ln\left(1 + \frac{k}{e}\right)$

Première étape: Montrons que, pour tout $t \geqslant 0$, $\ln(1 + t) \leqslant t$

On étudie $\phi(t) = \ln(1 + t) - t$ qui a pour dérivée $\phi'(t) = \frac{1}{1+t} - 1 = \frac{1-1-t}{1+t} = -\frac{t}{1+t}$

Comme $t \geqslant 0$, $\phi'(t) \leqslant 0$, d'où, ϕ décroissante sur $[0; +\infty[$, soit: $\phi(t) \leqslant \phi(0)$

Conclusion: pour tout $t \geqslant 0$, $\ln(1 + t) \leqslant t$

Deuxième étape: Posons $\dfrac{k}{\mathrm{e}} = t$, comme $\dfrac{k}{\mathrm{e}} > 0$, d'après ce qui précède, on a:

$\ln\left(1 + \dfrac{k}{\mathrm{e}}\right) \leqslant \dfrac{k}{\mathrm{e}}$

Finalement: Le maximum de la fonction f_k est donc majorée par $\dfrac{k}{\mathrm{e}}$

Pour tout $x \geqslant 0$, $f_k(k) \leqslant \dfrac{k}{\mathrm{e}}$.

4) Tangente

Une équation de $\mathcal{T}_k$ tangente à $\mathcal{C}_k$ au point $O(0, 0)$ est $y = f_k\,'(0)(x - 0) + 0 = kx$.

5) Position relative de courbes:

$0 < p < m$,

la position de $\mathcal{C}_p$ et $\mathcal{C}_m$ est donnée par le signe de la différence $d(x) = f_m(x) - f_p(x)$

$d(x) = \ln\left(1 + m\dfrac{x}{\mathrm{e}^x}\right) - \ln\left(1 + p\dfrac{x}{\mathrm{e}^x}\right) = \ln\left(\dfrac{\mathrm{e}^x + mx}{\mathrm{e}^x + px}\right)$.

Il suffit donc de comparer $\left(\dfrac{\mathrm{e}^x + mx}{\mathrm{e}^x + px}\right)$ et 1.

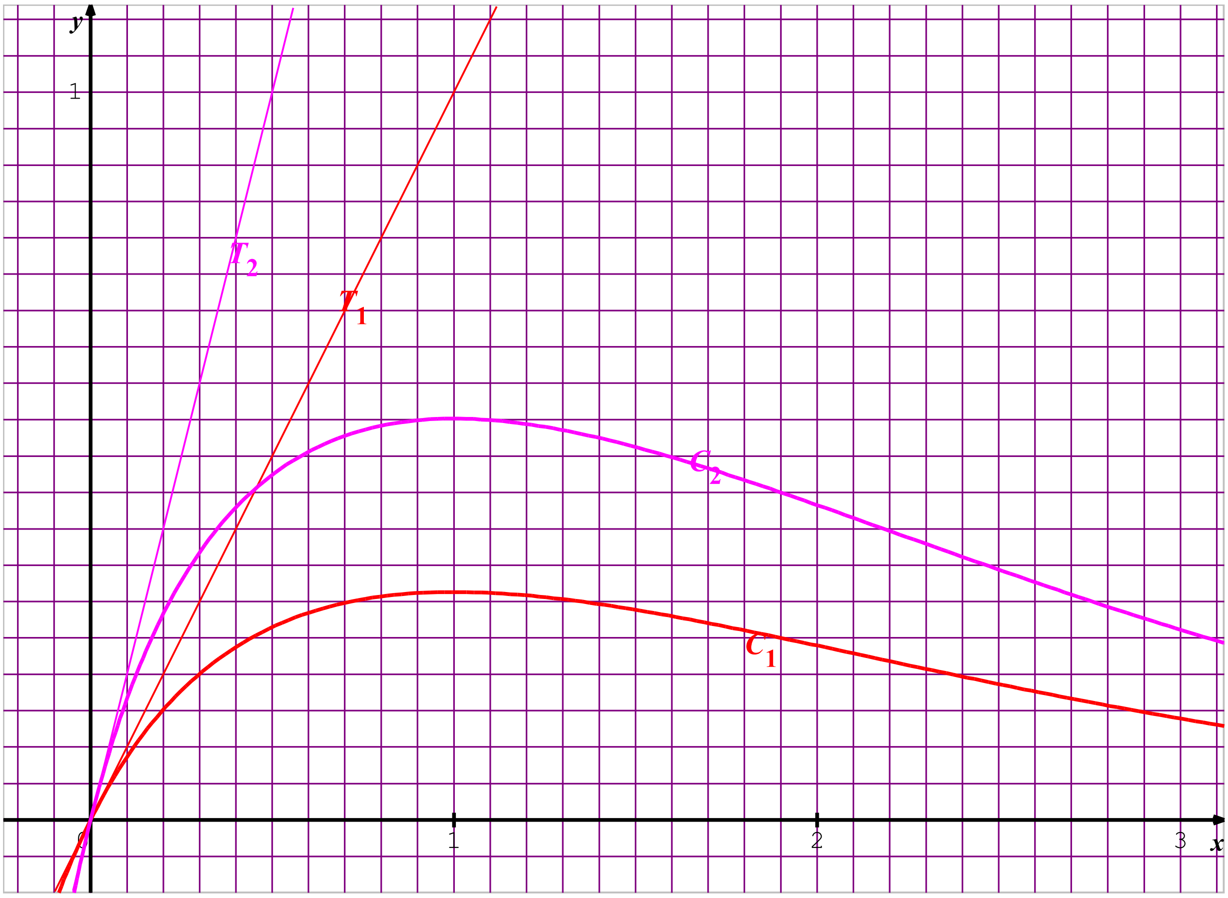
Comme $\mathrm{e}^x + px > 0$, il suffit de comparer $\mathrm{e}^x + mx$ et $\mathrm{e}^x + px$.

Comme $x > 0$, l'ordre de ces expressions est celui de m et p.

Pour tout $x \geqslant 0$, $\left(\dfrac{\mathrm{e}^x + mx}{\mathrm{e}^x + px}\right) \geqslant 1$, d'où, $\ln\left(\dfrac{\mathrm{e}^x + mx}{\mathrm{e}^x + px}\right) \geqslant 0$

$\mathcal{C}_m$ est au-dessus de $\mathcal{C}_p$.

6) Tracé des courbes $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$ et de leurs tangentes $\mathcal{T}_1$ et $\mathcal{T}_2$ au point O.



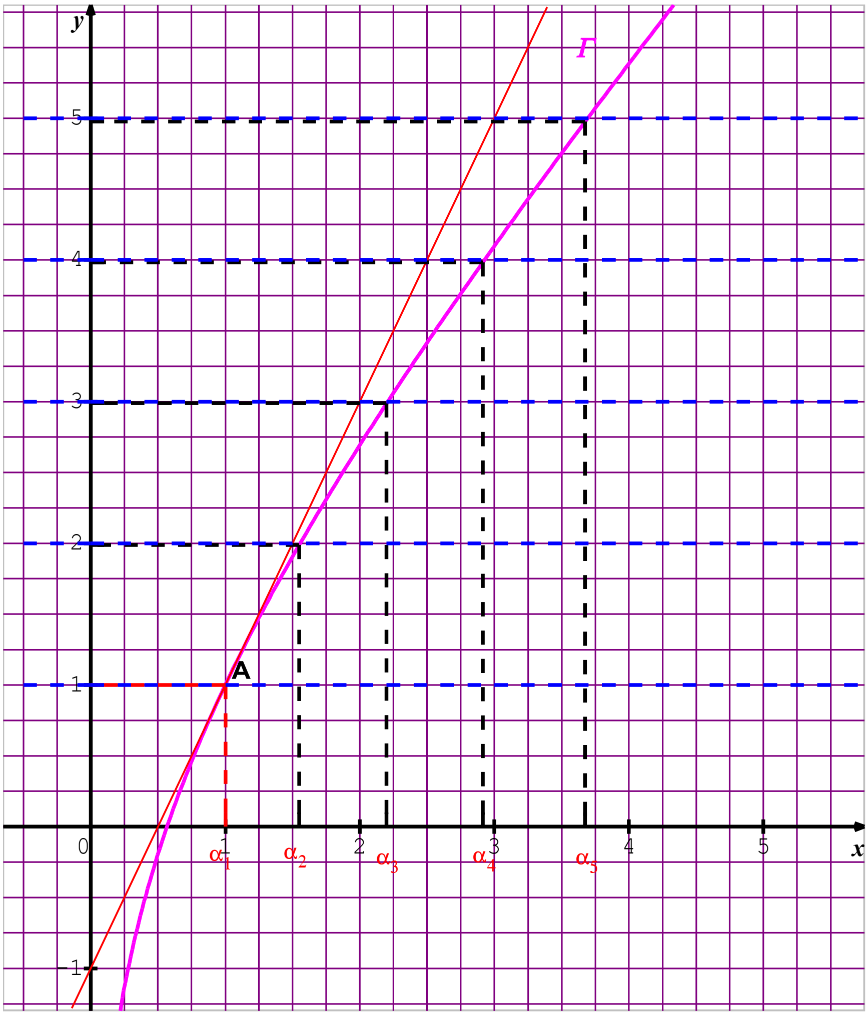
exercice B page 130

f définie sur $]0; +\infty[$ par $f(x) = x + \ln x$.
Γ sa courbe représentative dans un repère orthogonal $(O ; \vec{i}, \vec{j})$.
1 a) $\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$ et $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ (aucune difficulté)

b) f est la somme de $x \mapsto x$ et de $x \mapsto \ln x$ qui sont deux fonctions strictement croissantes sur $]0; +\infty[$, donc, f est strictement croissante sur cet intervalle.

Remarque: la dérivée sera utile au 3a). $f'(x) = 1 + \dfrac{1}{x}$

2a) Pour tout entier naturel **non nul** n, l'équation $f(x) = n$ admet une et une seule solution sur $]0; +\infty[$ d'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires.
En effet:
f continue sur $]0; +\infty[$ (somme de fonctions continues)
f strictement croissante sur $]0; +\infty[$
L'intervalle image est $\mathbb{R}$, donc, contient $\mathbb{N}$.
b) Tracé



Pour faire apparaître α_1, α_2, α_3, α_4 et α_5, on trace les droites d_1, ..., d_5 d'équations respectives $y = 1$, ..., $y = 5$ et les abscisses des points d'intersection de Γ et de ces droites donnent les nombres cherchés.
c) Comme $f(1) = 1$ et que α_1 est l'unique réel vérifiant l'égalité $f(\alpha_1) = 1$, on a: $\alpha_1 = 1$
d) Comme f est strictement croissante l'ordre des images est celui des antécédents.
On sait : $1 < 2 < 3< ... < n < n + 1 < ...$
d'où, $f(\alpha_1) < f(\alpha_2) < f(\alpha_3) < .... < f(\alpha_n) < f(\alpha_{n+1})$ ....
Comme f est strictement croissante, il vient:
$\alpha_1 < \alpha_2 < \alpha_3 < .... < \alpha_n < \alpha_{n+1}$ ....

3 a) Une équation de la tangente Δ à Γ au point A d'abscisse 1 est : $y = f'(1)(x - 1) + f(1)$
$y = 2x - 1$
b) $h(x) = \ln x - x + 1$ a pour dérivée $h'(x) = \dfrac{1}{x} - 1$
On a donc: $h'(x) > 0$ si $x \in]0; 1[$ et $h'(x) < 0$ si $x \in]1; +\infty[$.
La fonction h admet un maximum en 1 qui vaut: $h(1) = 0$
Pour tout $x > 0$, $h(x) \leqslant 0$.
Or, $h(x) = f(x) - (2x - 1)$.
Γ est donc au-dessous de Δ.
c) Tracé de Δ.
4) On vient de montrer que $\ln x \leqslant x - 1$,

On a donc: $\ln\dfrac{n+1}{2} \leqslant \dfrac{n+1}{2} - 1$, soit: $\ln\dfrac{n+1}{2} \leqslant \dfrac{n-1}{2}$

Or, $f\left(\dfrac{n+1}{2}\right) = \dfrac{n+1}{2} + \ln\dfrac{n+1}{2}$

d'où, $f\left(\dfrac{n+1}{2}\right) \leqslant \dfrac{n+1}{2} + \dfrac{n-1}{2}$

soit: $f\left(\dfrac{n+1}{2}\right) \leqslant n$

Comme $f(\alpha_n) = n$ et que f est croissante, on obtient: $\dfrac{n+1}{2} \leqslant \alpha_n$

Comme $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{n+1}{2} = +\infty$ et que $\dfrac{n+1}{2} \leqslant \alpha_n$, la suite (α_n) diverge vers $+\infty$.

Exercice C page 130

Partie a

f définie sur $]0; +\infty[$ par $f(x) = \dfrac{x\ln x}{x+1}$

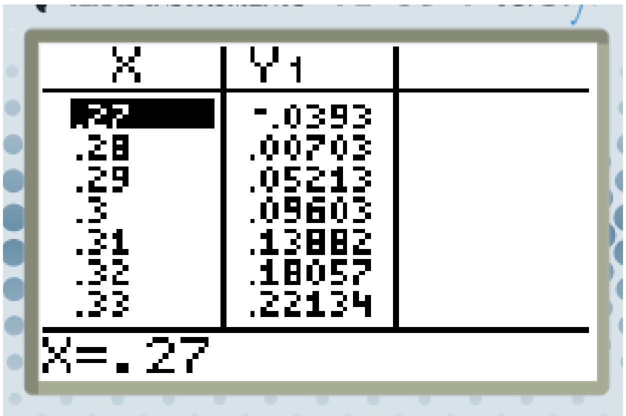
1) Soit ϕ la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par $\phi(x) = \ln x + x + 1$

ϕ, étant la somme de deux fonctions $x \mapsto \ln x$ et $x \mapsto x + 1$ continues et strictement croissantes sur $]0; +\infty[$, est continue et strictement croissante sur $]0; +\infty[$.

Par conséquent, ϕ réalise une bijection de $]0; +\infty[$ sur $J = \left]\lim\limits_{x\to0}\phi(x) ; \lim\limits_{x\to+\infty}\phi(x)\right[$.

Or, $\lim\limits_{x\to0}\phi(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\phi(x) = +\infty$.

Comme $0 \in J$, l'équation $\phi(x) = 0$ a une et une seule solution β.



X	Y1
.27	-.0393
.28	.00703
.29	.05213
.3	.09603
.31	.13882
.32	.18057
.33	.22134

X=.27

Un balayage à la calculatrice donne $0{,}27 < \beta < 0{,}28$

2) Pour $x > 0$, f est le quotient de deux fonctions .... $u : x \mapsto x\ln x$ et $v : x \mapsto x + 1$

u est le produit de ... , d'où, ...

$$f'(x) = \frac{\left(1\times\ln x+\frac{1}{x}\times x\right)(x+1)-1\times(x\ln x)}{(x+1)^2} = \frac{x\ln x+\ln x+x+1-x\ln x}{(x+1)^2} = \ldots = \frac{\phi(x)}{(x+1)^2}.$$

$f'(x)$ est par conséquent du signe de $\phi(x)$ (voir résumé dans le tableau de variations).

Limite en 0

$\lim\limits_{x\to 0} x\ln x = 0$ et $\lim\limits_{x\to 0} (x+1) = 1$, d'où, (par quotient) $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0$

Limite en +∞

Sous la forme donnée, on ne peut pas conclure. On peut écrire, pour $x > 0$, $f(x) = \dfrac{\ln x}{\left(1+\dfrac{1}{x}\right)}$

$\lim\limits_{x\to +\infty} \ln x = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to +\infty} (1 + \dfrac{1}{x}) = 1$, d'où, par quotient, $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = +\infty$.

Tableau de variations complet:

x	0		β		$+\infty$
signe de $\phi(x)$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$	‖ 0	↘	$f(\beta)$	↗	$+\infty$

Partie B

n est un ***entier naturel non nul***

1) D'après la **partie A**, f est une fonction strictement décroissante sur $]0; \beta]$ et $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0$.

On en déduit: $f(\beta) < 0$ et pour tout x de $]0; \beta]$, $f(x) < 0$.

L'équation $f(x) = n$ où n est un entier naturel non nul n'a pas de solution sur $]0; \beta]$

f est continue et strictement croissante sur $]\beta; +\infty[$ et $n \in]f(\beta); +\infty[$.

Par conséquent, l'équation $f(x) = n$ admet une et une seule solution $\alpha_n \in]\beta; +\infty[$

D'autre part, $f(1) = 0$, donc, comme $n > 0$, $\alpha_n > 1$

x	0		β		$\mathbf{1}$		α_n		$+\infty$
signe de $\phi(x)$	‖	$-$	0	$+$		$+$		$+$	
$f(x)$	‖ 0	↘	$f(\beta)$	↗	0	↗	n	↗	$+\infty$

2) ***Comparaison de α_n et e^n.***

a) $f(e^n) = \dfrac{e^n \ln e^n}{e^n+1} = n \times \dfrac{e^n}{e^n+1}$.

Comme $0 < e^n < e^n + 1$, on obtient: $0 < \dfrac{e^n}{e^n+1} < 1$, puis, $n \times \dfrac{e^n}{e^n+1} < n$,

soit: $f(e^n) < n$.

D'autre part, $f(\alpha_n) = n$, d'où, $f(e^n) < f(\alpha_n)$

Comme f est strictement croissante sur $[\beta; +\infty[$, on en déduit: $e^n < \alpha_n$

b) $f(\alpha_n) = n \Leftrightarrow \dfrac{\alpha_n \ln \alpha_n}{\alpha_n+1} = n \Leftrightarrow \alpha_n\ln\alpha_n = n(\alpha_n + 1) \Leftrightarrow \alpha_n\ln\alpha_n - n\alpha_n = n \Leftrightarrow \ln\alpha_n - n = \dfrac{n}{\alpha_n}$

D'autre part: $n = \ln(e^n)$ et $\ln\alpha_n - \ln(e^n) = \ln\left(\dfrac{\alpha_n}{e^n}\right)$

Finalement: $f(\alpha_n) = n \Leftrightarrow \ln\left(\frac{\alpha_n}{e^n}\right) = \frac{n}{\alpha_n}$ (1)

Au 2a), on a: $0 < e^n < \alpha_n$, d'où, $\frac{1}{e^n} > \frac{1}{\alpha_n}$, puis: $\frac{n}{e^n} > \frac{n}{\alpha_n} > 0$

Comme $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{n}{e^n} = 0$, on obtient: (théorème des gendarmes) $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{n}{\alpha_n} = 0$

D'autre part, d'après (1), $\left(\frac{\alpha_n}{e^n}\right) = \exp\left(\frac{n}{\alpha_n}\right)$

Conclusion: $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\frac{\alpha_n}{e^n}\right) = \lim\limits_{x \to 0} \exp(x) = 1$

3. ***Comparaison de α_n et $e^n + n$.***

Comme $\alpha_n \geqslant e^n$, et, que $\left(\frac{\alpha_n}{e^n}\right)$ tend vers 1 (et reste supérieur à 1), on peut écrire que $\left(\frac{\alpha_n}{e^n}\right)$ est égale à 1 + une quantité positive qui dépend de n, d'où, l'écriture:

$\alpha_n = e^n(1 + \epsilon_n)$ où $\epsilon_n \geqslant 0$ (2)

a) En substituant dans (1), on a: $\ln\left(\frac{e^n(1+\epsilon_n)}{e^n}\right) = \frac{n}{e^n(1+\epsilon_n)}$

On obtient: $\ln(1 + \epsilon_n) = \frac{n}{e^n(1+\epsilon_n)}$, puis, $(1 + \epsilon_n)\ln(1 + \epsilon_n) = \frac{n}{e^n}$

b) Soit $t \geqslant 0$.

On pose $g(t) = (1 + t)\ln(1 + t) - t - \frac{t^2}{2}$

$g'(t) = 1 \times \ln(1 + t) + \frac{1+t}{1+t} - 1 - t = \ln(1 + t) - t$.

$g''(t) = \frac{1}{1+t} - 1 = \frac{1-(1+t)}{1+t} = -\frac{t}{1+t}$

Résumé dans un tableau

En remarquant que $g'(0) = 0$ et $g(0) = 0$, on a:

t	0 $\qquad$ $+\infty$
$g''(t)$	$-$
$g'(t)$	0 ↘
$g'(t)$	$-$
$g(t)$	0 ↘
$g(t)$	$-$

Pour $t \geqslant 0$, on a: $g(t) \leqslant 0$

Conclusion: $(1 + t)\ln(1 + t) - t \leqslant \frac{t^2}{2}$

Posons $h(t) = (1 + t)\ln(1 + t) - t$,
d'où, $h'(t) = \ln(1 + t)$ et comme $1 + t \geqslant 1$, on a: $h'(t) \geqslant 0$.
La fonction h est croissante. Or, $h(0) = 0$, d'où, $h(t) \geqslant h(0)$
Conclusion: $(1 + t)\ln(1 + t) - t \geqslant 0$

Pour tout $t \geqslant 0$, $0 \leqslant (1 + t)\ln(1 + t) - t \leqslant \dfrac{t^2}{2}$.
Remarquer: Cette double inégalité contient aussi l'inégalité $(1 + t)\ln(1 + t) \geqslant t$. (4)

c) On pose $t = \epsilon_n$
D'après 3b), $0 \leqslant (1 + \epsilon_n)\ln(1 + \epsilon_n) - \epsilon_n \leqslant \dfrac{\epsilon_n^2}{2}$, soit:

$\epsilon_n \leqslant (1 + \epsilon_n)\ln(1 + \epsilon_n) \leqslant \epsilon_n + \dfrac{\epsilon_n^2}{2}$

D'après 3a)

$\epsilon_n \leqslant \dfrac{n}{e^n} \leqslant \epsilon_n + \dfrac{\epsilon_n^2}{2}$

$0 \leqslant \dfrac{n}{e^n} - \epsilon_n \leqslant \dfrac{\epsilon_n^2}{2}$

De l'inégalité (4) : $(1 + t)\ln(1 + t) \geqslant t$. et $t = \epsilon_n$
On montre: $\dfrac{n}{e^n} \geqslant \epsilon_n$, soit: $\dfrac{\epsilon_n^2}{2} \leqslant \dfrac{1}{2} \times \dfrac{n^2}{e^{2n}}$

On obtient: (3) $0 \leqslant ne^{-n} - \epsilon_n \leqslant \dfrac{n^2}{2}e^{-2n}$

d) En multipliant (3) par $e^n > 0$, on a:

$0 \leqslant n - \epsilon_n e^n \leqslant \dfrac{n^2}{2}e^{-n}$

Or, $\epsilon_n e^n = \alpha_n - e^n$, d'où,

$0 \leqslant n - \alpha_n + e^n \leqslant \dfrac{n^2}{2}e^{-n}$

Comme (croissance comparée): $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{n^2}{2}e^{-n} = 0$

Le théorème des gendarmes permet de conclure: $n - \alpha_n + e^n$ converge vers 0

Remarque:
D'après (3), et le théorème des gendarmes $ne^{-n} - \epsilon_n$ tend vers 0 en $+\infty$.