Index

7 page 154

La suite (u_n) définie par:

1) $u_n = 5 + 4n$ est une suite arithmétique de raison 4 et de premier terme $u_1 = 9$

2) $u_n = -3 + 5(n - 3) = -18 + 5n$ est une suite arithmétique de raison 5 et de premier terme $u_1 = -13$

3) $u_n = -2n + 7(n + 2) = 14 + 5n$ est une suite arithmétique de raison 5 et de premier terme $u_1 = 19$

4) $u_n = 7 + n^2$ n'est ni une suite arithmétique, ni une suite géométrique

5) $u_n = 8\times(\sqrt{2})^{n-2}$ est une suite géométrique de raison $\sqrt{2}$ et de premier terme $u_1 = \dfrac{8}{\sqrt{2}} = 4\sqrt{2}$

6) $u_n = 1 + 3^n$ n'est ni une suite arithmétique, ni une suite géométrique

7) $u_2 = -3$ et $n\in\mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n = u_n\sqrt{2}$

On a donc, $u_{n+1} = (1 + \sqrt{2})u_n$.

La suite (u_n) est une suite géométrique de raison $1 + \sqrt{2}$ et de premier terme $u_1 = \dfrac{-3}{1+\sqrt{2}}$

Suites	arithmétique	géométrique	preuve
$u_n = 5 + 4n$	$u_1 = 9$, $r = 4$		Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n = ... = 4$
$u_n = -3+5(n-3)$ $u_n = -18+5n$	$u_1 = -13$, $r = 5$		Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n = ... = 5$
$u_n = -2n + 7(n+2)$ $u_n = 14 + 5n$	$u_1 = 19$, $r = 5$		Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n = ... = 5$
$u_n = 7 + n^2$	NON	NON	$u_1 = 8$, $u_2 = 11$, $u_3 = 16$ $u_2 - u_1 = 3$ $u_3 - u_2 = 5$ $\frac{u_2}{u_1} = \frac{11}{8}$ et $\frac{u_3}{u_2} = \frac{16}{11}$ les différences et les quotients sont différents.
$u_n = 8\times \left(\sqrt{2}\right)^{n-2}$		$u_1 = 4\sqrt{2}$ et $q = \sqrt{2}$	Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\frac{u_{n+1}}{u_n} = ... = \sqrt{2}$
$u_n = 1 + 3^n$	NON	NON	$u_1 = 4$, $u_2 = 10$, $u_3 = 28$ $u_2 - u_1 = 6$ $u_3 - u_2 = 18$ $\frac{u_2}{u_1} = \frac{10}{4}$ et $\frac{u_3}{u_2} = \frac{28}{10}$ les différences et les quotients sont différents.
$u_2 = -3$ et $u_{n+1} - u_n = u_n\sqrt{2}$ $u_{n+1} = (1+\sqrt{2})u_n$		$u_1 = \frac{3}{1+\sqrt{2}}$, $q = 1+\sqrt{2}$	Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\frac{u_{n+1}}{u_n} = ... = 1+\sqrt{2}$

Commentaires:

* Si (u_n) est une suite arithmétique de raison r, et, de premier terme $u_0 = a$, on a: $u_n = a + r\times n$

La suite (u_n) est la restriction à $\mathbb{N}$ de la fonction affine $x \mapsto a + r\times x$

La réciproque est vraie.

** Si (u_n) est une suite géométrique de raison q, et, de premier terme $u_0 = a$, on a: $u_n = a \times q^n$

La suite (u_n) est la restriction à $\mathbb{N}$ de la fonction exponentielle $x \mapsto a\ q^x$

"J'ai toujours pensé qu'il n'avait pas assez d'imagination pour devenir mathématicien !" ***Hilbert, David***
au sujet d'un étudiant qui a renoncé aux mathématiques pour la poésie

La réciproque est vraie.

---

11 page 154

La suite (u_n) est définie par $\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = 3 + 2u_n \end{cases}$

La proposition à démontrer:

$P(n)$: "$u_n \geqslant 0$"

Initialisation: P(0) est vraie car $u_0 = 0$

Hérédité: Soit **un** entier naturel k tel que $P(k)$, c'est-à-dire, $u_k \geqslant 0$

Comme $u_{k+1} = 3 + 2\,u_k$ est la somme et le produit de nombres positifs, u_{k+1} est positif.

On a montré: $P(k) \Rightarrow P(k+1)$

Conclusion:

D'après l'axiome de récurrence, la proposition $P(n)$ est vraie pour **tout** $n \in \mathbb{N}$.

---

12 page 154

La suite u est définie sur $\mathbb{N}$ par $\begin{cases} u_1 = 1 \\ u_{n+1} = u_n + 2n + 1 \end{cases}$

1) $u_2 = u_1 + 2\times1 + 1 = 4 = 2^2$

$u_3 = u_2 + 2\times2 + 1 = 9 = 3^2$
$u_4 = u_3 + 2\times3 + 1 = 16 = 4^2$
b) Il semble que $u_n = n^2$ (Conjecture)
3) Proposition: $P(n)$: $u_n = n^2$
Démonstration par récurrence:
initialisation faite lors de la recherche de la conjecture.
hérédité: Soit un entier naturel k supérieur ou égal à 1 tel que $u_k = k^2$
D'après la définition de la suite: $u_{k+1} = u_k + 2k + 1 = k^2 + 2k + 1 = (k+1)^2$
On a montré:
Si la propriété est vraie à un rang k alors elle est vraie au rang suivant $k + 1$.
Conclusion: D'après l'axiome de récurrence, la proposition est vraie pour tout entier supérieur ou égal à 1.

---

13 page 154

1) $1 + i$ a pour module $|1+i| = \sqrt{1^2+1^2} = \sqrt{2}$

$(1 + i)^2 = 2i$, d'où, $|(1+i)^2| = |2i| = 2$

$(1 + i)^3 = 2i(1 + i) = -2 + 2i$, d'où, $|(1+i)^3| = \sqrt{(-2)^2+2^2} = 2\sqrt{2}$

$(1 + i)^4 = (2i)^2 = -4$, d'où, $|(1+i)^4| = 4$

2) ***Conjecture:*** $|(1+i)^n| = (\sqrt{2})^n$ (C'est la supposition qui doit être démontrée)

d'où, la proposition à démontrer:

P(n): " $|(1+i)^n| = (\sqrt{2})^n$ "

Initialisation: P(1) est vraie car $|1+i| = \sqrt{2}$ (On peut remarquer P(0) est vraie, car, $(1 + i)^0 = 1$ et $(\sqrt{2})^0 = 1$)

Hérédité: Soit **un** entier naturel $k \geqslant 1$ tel que P(k), c'est-à-dire, $|(1+i)^k| = (\sqrt{2})^k$ *(Hypothèse de récurrence)*

Commentaire: C'est une donnée sur laquelle on s'appuie pour démontrer une autre proposition.

La proposition à démontrer est: P(k + 1), c'est-à-dire: $(1 + i)^{k+1} = \sqrt{2}^{k+1}$

On écrit donc: $(1 + i)^{k+1}$*....*

Comme $|(1+i)^{k+1}| = |(1+i)^k(1+i)| = |(1+i)^k| \times |(1+i)| = (\sqrt{2})^k \times \sqrt{2} = (\sqrt{2})^{k+1}$

On a montré: P(k) ⇒ P(k + 1)

Conclusion:

D'après l'axiome de récurrence, la proposition P(n) est vraie pour **tout** $n \in \mathbb{N}^*$.

---

14 page 154

La suite (u_n) est définie par $\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = \frac{3}{4}u_n + \frac{1}{2} \end{cases}$

Le calcul de u_1 , u_2, ... donne 2.

On peut conjecturer $u_n = 2$

Si pour un entier n, on a: $u_n = 2$ alors, $u_{n+1} = \frac{3}{4} \times 2 + \frac{1}{2} = 2$

D'après l'axiome de récurrence, la suite (u_n) est une suite constante égale à 2

---

18 page 155

On pose $S_n = 1 + 2 + ... + n$

Il s'agit de montrer la proposition suivante $P(n)$: $S_n = \frac{n(n+1)}{2}$

Initialisation: $n = 1$ $S_1 = 1$ et $\frac{1\times(1+1)}{2} = 1$ $P(1)$ est vraie

Hérédité: soit un entier $k \geqslant 1$ tel que $P(k)$ est vraie.

On a $S_k = \frac{k(k+1)}{2}$. Hypothèse de récurrence

Or $S_{k+1} = S_k + (k + 1)$ (par définition de S_{k+1})

$S_{k+1} = \frac{k(k+1)}{2} + k + 1 = (k+1)\times\left(\frac{k}{2}+1\right) = \frac{(k+1)(k+2)}{2}$.

On a montré: $P(k)$ implique $P(k+1)$
Conclusion: D'après l'axiome de récurrence, la propriété $P(n)$ est vraie pour tout entier naturel n. Index

---

19 page 155

Pour tout $n\in\mathbb{N}$, la somme des cubes des n premiers entiers naturels est égale au carré de leur somme.

La proposition P(n) : $1^3 + 2^3 + 3^3 + ... + n^3 = (1 + 2 + 3 + ... + n)^2$

On sait: $1 + 2 + ... + n = \frac{n(n+1)}{2}$ (Somme des n premiers termes d'une suite arithmétique de raison 1)

La proposition P(n) devient: $1^3 + 2^3 + 3^3 + ... + n^3 = \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2$

Initialisation: $1^3 = 1$ et $\left[\frac{1(1+1)}{2}\right]^2 = 1^2 = 1$

Hérédité: Soit un entier k tel que P(k)

On a donc l'égalité $1^3 + 2^3 + ... + k^3 = \left[\frac{k(k+1)}{2}\right]^2$ (Hypothèse de récurrence)

(Ne pas perdre de vue que l'on veut en déduire l'égalité: $1^3 + 2^3 + ... + (k+1)^3 = \left[\frac{(k+1)(k+1+1)}{2}\right]^2$)

Soit: $1^3 + 2^3 + ... + (k+1)^3 = [1^3 + 2^3 + ... + k^3] + (k+1)^3$ Par construction de la somme

$= \left[\frac{k(k+1)}{2}\right]^2 + (k+1)^3$ d'après l'hypothèse de récurrence

$= (k+1)^2 \left[\left(\frac{k}{2}\right)^2 + k + 1\right]$ factorisation de ....

$= (k+1)^2 \left(\frac{k^2+4k+4}{4}\right) = (k+1)^2 \left(\frac{k+2}{2}\right)^2 = \left[\frac{(k+1)(k+1+1)}{2}\right]^2$

On a montré: P(k) ⇒ P(k + 1)

Conclusion:

D'après l'axiome de récurrence, la proposition P(n) est vraie pour tout $n\in\mathbb{N}$.

---

20 page 155

a) On **suppose** $3^{2n}-1=4k$
alors $3^{2n}=4k+1$ et $3^{2n+2}-1=3^{2n}\times 3^2-1=(4k+1)\times 9-1=36k+8$
b) Soit $P(n): 3^{2n}-1$ est un multiple de 4
Initialisation: $n=0$ $3^0-1=0$ et 0 est un multiple de 4
Hérédité: soit un entier n tel que $P(n)$ est vrai.
Il existe donc un **entier** k tel que $3^{2n}-1=4k$
Or, d'après a) $3^{2(n+1)}-1=3^{2n+2}-1=36k+8=4(9k+2)$

Comme $9k+2$ est un **entier** alors $3^{2(n+1)}-1$ est un multiple de 4
On a montré: $P(n)$ implique $P(n+1)$
Conclusion: D'après l'axiome de récurrence, la propriété $P(n)$ est vraie pour tout entier naturel *n*. Index

22 page 155

La proposition P(*n*): $3^{n+6} - 3^n$ est divisible par 7.

Initialisation: $n = 0$ $3^6 - 1 = 728 = 7\times104$ La proposition P(0) est vraie

Hérédité: Soit un entier *k* tel que P(*k*)

On a donc : il existe un entier *q* tel que $3^{k+6} - 3^k = 7q$

On étudie: $3^{k+1+6} - 3^{k+1} = 3\times 3^{k+6} - 3\times 3^k = 3(3^{k+6} - 3^k) = 3\times7q = 7\times3q$

Comme *q* est entier, 3*q* est entier, ce qui prouve que $3^{k+1+6} - 3^{k+1}$ est un multiple de 7

On a montré: P(*k*) ⇒ P(*k* + 1)

Conclusion:

D'après l'axiome de récurrence, la proposition P(*n*) est vraie pour tout $n\in\mathbb{N}$.

25 page 155

Revoir si nécessaire les paragraphes du cours sur: limites et opérations
(Il n'y a aucun paragraphe dans les cours du lycée intitulés: somme de limites ou produit de limites....)
Les propriétés sont de la forme:
Si limite de f .... et si limite de g alors limite de (opération sur les fonctions f et g) est ...
ou
Si limite de f .... et si limite de g alors on ne peut pas conclure pour la limite de (opération sur les fonctions f et g)

Autrement dit: il ne faut pas confondre: la limite de la somme de fonctions (phrase correcte)
avec la somme de limites de fonctions (phrase incorrecte)

1) $u_n=n^2-3n-1=n^2\left(1-\frac{3}{n}-\frac{1}{n^2}\right)$ si $n\neq0$, d'où, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=+\infty$

2) $u_n=\frac{n^3+1}{n+1}=\frac{n^2+\frac{1}{n}}{1+\frac{1}{n}}$ si $n\neq0$, d'où, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=+\infty$

3) $u_n=\frac{n+1}{n^3+2}=\frac{1+\frac{1}{n}}{n^2+\frac{2}{n}}$ si $n\neq0$, d'où, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=0$

4) $u_n=5\times(0{,}2)^n$. Comme $0<0{,}2<1$, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=0$

26 page 155

1) $u_n = -7 \times (-0{,}3)^n$. Comme $-1 < -0{,}3 < 1$, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$

2) $u_n = 5^n \times (0{,}3)^n = (1{,}5)^n$. Comme $1{,}5 > 1$, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$

3) $u_n = \dfrac{\ln n}{n}$ On sait: $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln x}{x} = 0$, d'où, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$.

4) $u_n = \dfrac{2^n}{3^n} = \left(\dfrac{2}{3}\right)^n$, comme $0 < \dfrac{2}{3} < 1$, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$

---

30 page 155

1) Pour tout n∈ℕ, $-1 \leqslant n - \cos n \leqslant n + 1$

Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} n-1 = +\infty$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} n - \cos n = +\infty$.

Dans ce cas, il est inutile de considérer l'inégalité $n - \cos n \leqslant n + 1$

2) $u_n = \dfrac{n - \sin n}{n^2+1}$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $-1 \leqslant n - \sin n \leqslant n + 1$ $\dfrac{n-1}{n^2+1} \leqslant u_n \leqslant \dfrac{n+1}{n^2+1}$ car, $\dfrac{1}{n^2+1} > 0$

Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n-1}{n^2+1} = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n+1}{n^2+1} = 0$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$ (Théorème des gendarmes)

---

31 page 115

1) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $2 - 1 \leqslant 2 + \cos n \leqslant 3$, d'où, $1 \geqslant \dfrac{1}{2+\cos n} \geqslant \dfrac{1}{3}$

Comme $n \geqslant 0$, il vient: $n \geqslant \dfrac{n}{2+\cos n} \geqslant \dfrac{n}{3}$

Or, $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n}{3} = +\infty$, d'où, $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n}{2+\cos n} = +\infty$.

2) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $-1 \leqslant \sin 2n \leqslant 1$, d'où, $-\left(\dfrac{2}{3}\right)^n \leqslant \left(\dfrac{2}{3}\right)^n \sin 2n \leqslant \left(\dfrac{2}{3}\right)^n$

Comme $0 < \dfrac{2}{3} < 1$, $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\dfrac{2}{3}\right)^n = 0$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$

---

34 page 155

(u_n) définie par $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \sqrt{1+(u_n)^2} \end{cases}$

1) Récurrence :

Proposition à démontrer : Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \sqrt{1+n}$

Initialisation :

$u_0 = 1$ (donné) et $\sqrt{1+0} = 1$. L'égalité est vérifiée en 0

Hérédité :

Soit un entier n tel que $u_n = \sqrt{1+n}$

Par définition de la suite (u_n) : $u_{n+1} = \sqrt{1+(u_n)^2}$, or,

$(u_n)^2 = \sqrt{1+n}^2 = 1 + n$ d'après l'hypothèse de récurrence.

On en déduit : $u_{n+1} = \sqrt{1+(n+1)}$ qui est la proposition au rang $n + 1$.

On a montré : Si la proposition est vraie en N alors elle est vraie en $n + 1$

Conclusion :

D'après l'axiome de récurrence, la proposition est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

2) Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} n = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x} = +\infty$, on en déduit : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.

La suite (u_n) diverge vers $+\infty$.

3) $v_n = \dfrac{u_{n+1}}{u_n}$ et $w_n = \dfrac{u_n+u_{n+1}}{u_{n+2}}$

$$v_n = \frac{\sqrt{n+2}}{\sqrt{n+1}} = \sqrt{\frac{n+2}{n+1}}$$

Or, $\dfrac{n+2}{n+1} = \dfrac{1+\dfrac{2}{n}}{1+\dfrac{1}{n}}$, d'où, $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n+2}{n+1} = 1$ et la fonction $\sqrt{\ }$ est continue en 1.

D'où, $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt{\dfrac{n+2}{n+1}} = 1$.

La suite (v_n) converge vers 1.

$$w_n = \frac{\sqrt{1+n}+\sqrt{2+n}}{\sqrt{3+n}} = \frac{\sqrt{n}\left(\sqrt{\frac{1}{n}+1}+\sqrt{\frac{2}{n}+1}\right)}{\sqrt{n}\left(\sqrt{\frac{3}{n}+1}\right)} = \frac{\sqrt{\frac{1}{n}+1}+\sqrt{\frac{2}{n}+1}}{\sqrt{\frac{3}{n}+1}}$$

Comme $\dfrac{1}{n}$, $\dfrac{2}{n}$ et $\dfrac{3}{n}$ tendent vers 0 en $+\infty$ et que la fonction $\sqrt{\ }$ est continue en 1, on a : $\lim\limits_{n\to+\infty} w_n = 2$

---

36 page 155

$u_0 = 1$ et $u_{n+1} = \ln(2u_n + 1)$

1) ***Propriété à démontrer:*** P(n): $1 \leqslant u_n \leqslant 2$

Initialisation: Comme $u_0 = 1$, P(0) est vraie

Hérédité:

Soit un entier k tel que $1 \leqslant u_k \leqslant 2$ En multipliant par 2, on a:

$2 \leqslant 2u_k \leqslant 4$ En ajoutant 1, on a:

$3 \leqslant 2u_k + 1 \leqslant 5$ En appliquant la fonction ln croissante sur [3; 5]

$\ln 3 \leqslant \ln(2u_k + 1) \leqslant \ln 5$

Or, $e < 3$, d'où, $1 < \ln 3$ et $5 < e^2$, d'où, $\ln 5 < 2$

Finalement: $1 < \ln 3 \leqslant \ln(2u_k + 1) \leqslant \ln 5 < 2$

On a montré: Si P(k) est vraie alors P($k + 1$) est vraie

Conclusion: D'après l'axiome de récurrence la propriété "P(n): $1 \leqslant u_n \leqslant 2$ "est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

2) Calculons u_1

$u_1 = \ln 3$, donc, $u_0 < u_1$.

Supposons que la suite (u_n) est croissante. ***Proposition Q(n)***

Puisque $u_0 < u_1$ la propriété est ***initialisée.***

Hérédité:

Soit un entier k tel que $u_k \leqslant u_{k+1}$ En multipliant par 2 et en ajoutant 1, on a:,

$2u_k + 1 \leqslant 2u_{n+1} + 1$ En appliquant la fonction ln croissante sur $\mathbb{R}^{+*}$

$\ln(2u_k + 1) \leqslant \ln(2u_{n+1} + 1)$

Soit $u_{k+1} \leqslant u_{k+2}$

On a montré: Si Q(k) est vraie alors Q(k + 1) est vraie

Conclusion: D'après l'axiome de récurrence la propriété est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

(u_n) est une suite croissante

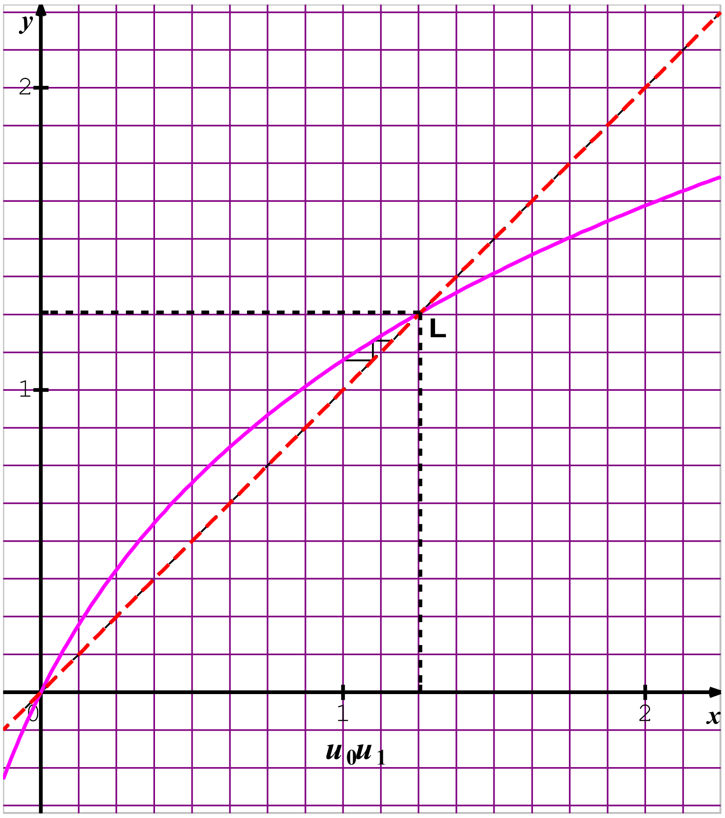
3) La suite (u_n) est croissante et majorée par 2, donc, elle est convergente.

(la limite n'est pas égale à 2)

La limite l vérifie l'égalité $l = \ln(2l + 1)$.

Graphiquement: Le point $L(l; l)$ est le point d'intersection de la droite d'équation $y = x$ et de C_f d'équation $y = \ln(2x + 1)$

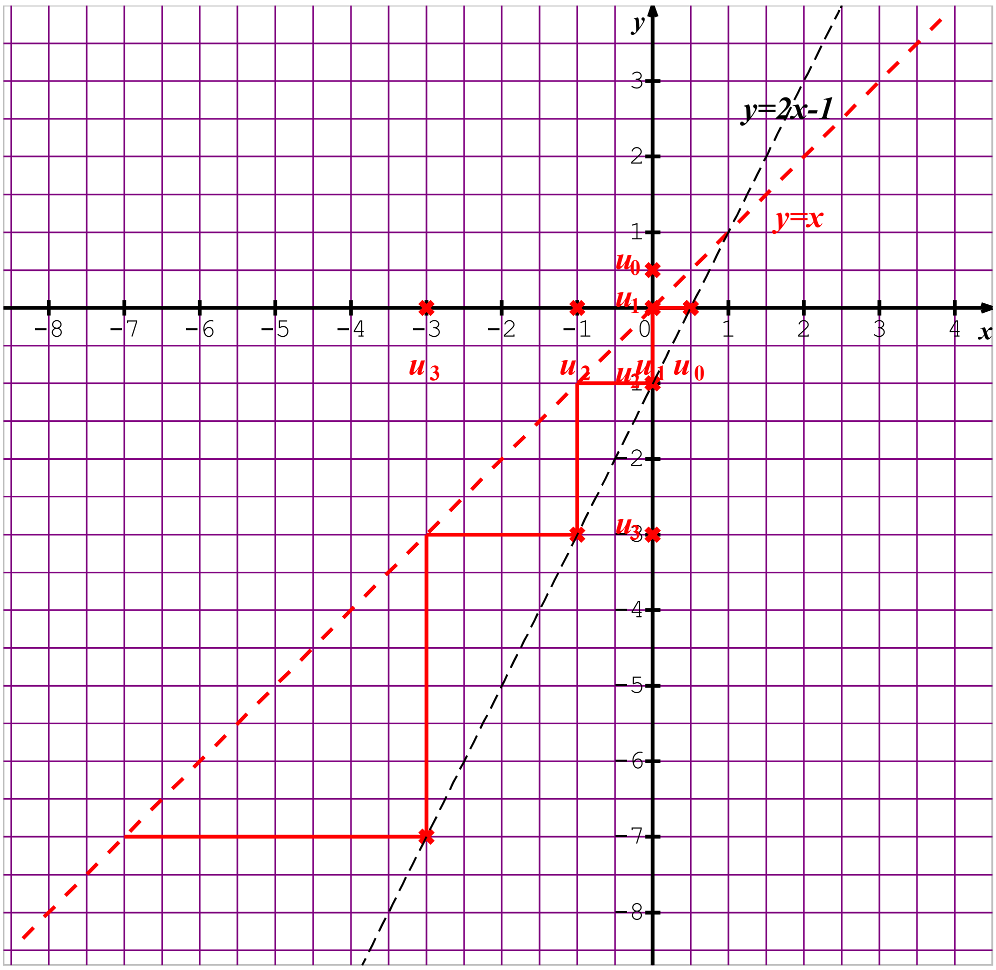
Visualisation avec Sinequanon



52 page 157

La suite (u_n) est définie sur $\mathbb{N}$ par: $\begin{cases} u_0 = 0{,}5 \\ u_{n+1} = 2u_n - 1 \end{cases}$

1)



La suite (u_n) est définie par $u_{n+1} = f(u_n)$ avec $f(x) = 2x - 1$.

On place donc $u_0 = 0,5$ en abscisses, puis, le point d'abscisse 0,5 sur Δ d'équation $y = f(x)$ a pour ordonnée u_1.

On reporte grâce à la droite d d'équation $y = x$, u_1 sur l'axe des abscisses et on cherche sur Δ, le point d'abscisse u_1. Son ordonnée est u_2, et, ainsi de suite.

2) On pose $u_n = v_n + 1$.

On a donc: $v_n = u_n - 1$

On a: $v_{n+1} = u_{n+1} - 1 = 2u_n - 1 - 1 = 2u_n - 2 = 2(u_n - 1) = 2v_n$

La suite (v_n) est donc une suite géométrique de premier terme $v_0 = u_0 - 1 = -0,5$ et de raison 2.

3) On en déduit: $v_n = (-0,5)\times 2^n = -2^{n-1}$, puis, $u_n = -2^{n-1} + 1$

4) Puisque $2 > 1$, la suite géométrique (2^n) diverge vers $+\infty$, d'où, (v_n) et (u_n) divergent vers $-\infty$.

---

53 page 157

$$\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = 2u_n + 1 \end{cases}$$

a) $u_n = v_n - 1$, c'est-à-dire: $v_n = u_n + 1$

On a alors: $v_{n+1} = u_{n+1} + 1 = (2u_n + 1) + 1 = 2(u_n + 1) = 2v_n$.

(v_n) est donc une suite géométrique de premier terme $v_0 = u_0 + 1 = 2 + 1 = 3$, et, de raison 2

Par conséquent: $v_n = 3\times2^n$ et $u_n = 3\times2^n - 1$

b) $\sum_{p=0}^{p=10} v_p$ est la somme de 11 termes consécutifs de la suite géométrique (v_n),

d'où, $\sum_{p=0}^{p=10} v_p = 3\times \frac{2^{11}-1}{2-1} = 3\times2\,047 = 6\,141$

$$\sum_{p=0}^{p=10} u_p = \sum_{p=0}^{p=10} (v_p-1) = \sum_{p=0}^{p=10} v_p - \sum_{p=0}^{p=10} 1 = 6141 - 11 = 6\,130$$

A remarquer: Soit (u_n) une suite géométrique de premier terme u_0 et de raison q
soit (v_n) une suite arithmétique de premier terme v_0 et de raison r
la suite (w_n) définie par $u_n = v_n + w_n$ n'est ni géométrique, ni arithmétique, mais, on peut faire la somme de $n + 1$ termes consécutifs.

Exemple: $w_n = 5\left(\frac{1}{2}\right)^n + 3n - 4$

Calculer $\sum_{p=0}^{p=78} w_p$

Posons $u_n = 5\left(\frac{1}{2}\right)^n$. (u_n) est une suite géométrique de premier terme $u_0 = 5$ et de raison $\frac{1}{2}$

et $v_n = 3n - 4$. (v_n) est une suite arithmétique de premier terme $v_0 = -4$ et de raison 3

$$\sum_{p=0}^{p=78} w_p = \sum_{p=0}^{p=78} u_p + \sum_{p=0}^{p=78} v_p \quad \text{(Somme de 79 termes consécutifs)}$$

$$\sum_{p=0}^{p=78} u_p = 5\times\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{79}}{1-\frac{1}{2}} = 10\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^{79}\right) = 10-10\times\left(\frac{1}{2}\right)^{79}$$

$$\sum_{p=0}^{p=78} v_p = 79\times\frac{-4+(-4+78\times3)}{2} = 8\,927 \text{ car } v78 = v_0 + 78\times r.$$

$$\sum_{p=0}^{p=78} w_p = 8\,937-10\times\left(\frac{1}{2}\right)^{79}$$

---

56 page 157

(u_n)	(v_n)	l'une croissante	l'autre décroissante	$(w_n) = (v_n) - (u_n)$	Conclusion
$u_n = \frac{-1}{n+1}$	$v_n = \frac{1}{n+3}$	$u_{n+1} - u_n = \frac{-(n+1)+(n+2)}{(n+1)(n+2)} = \frac{1}{(n+1)(n+2)}$ (u_n) est croissante	$v_{n+1} - v_n = \frac{(n+3)-(n+4)}{(n+3)(n+4)} = \frac{-1}{(n+3)(n+4)}$ (v_n) est décroissante	$w_n = \frac{1}{n+3} + \frac{1}{n+1}$ converge vers 0	(u_n) et (v_n) sont des suites adjacentes. Leur limite commune vaut 0

$u_n = 1 - \frac{1}{n}$	$v_n = 1 + \sin \frac{1}{n}$	$u_{n+1} - u_n = \frac{1}{n(n+1)}$ (u_n) est croissante	$v_{n+1} - v_n =$ $\sin \frac{1}{n+1} - \sin \frac{1}{n}$ Comme : pour $n > 1$ $0 < \frac{1}{n+1} < \frac{1}{n} < \frac{\pi}{2}$ et la fonction sinus est croissante sur $[0 ; \frac{\pi}{2}]$, on a : $\sin \frac{1}{n+1} - \sin \frac{1}{n} < 0$ (v_n) est décroissante	$w_n = \sin \frac{1}{n} + \frac{1}{n}$ Or $\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n} = 0$ et sinus est une fonction continue en 0. d'où, $\lim_{n \to +\infty} \sin \frac{1}{n} = 0$ (w_n) converge vers 0	(u_n) et (v_n) sont des suites adjacentes. Leur limite commune vaut 1
$u_n = 3 - \frac{1}{n^2}$	$v_n = 3 + \frac{1}{n^3}$	On pose : $f(x) = 3 - \frac{1}{x^2}$ avec $x > 0$. $f'(x) = \frac{2}{x^3}$ est strictement positif pour $x > 0$, d'où, f est croissante sur $]0 ; +\infty[$. La restriction de f à $\mathbb{N}^*$ est la suite (u_n) qui est par conséquent croissante.	On pose : $g(x) = 3 + \frac{1}{x^3}$ avec $x > 0$. $g'(x) = \frac{-3}{x^4}$ est strictement négatif pour $x > 0$, d'où, g est décroissante sur $]0 ; +\infty[$. La restriction de g à $\mathbb{N}^*$ est la suite (v_n) qui est par conséquent décroissante.	$w_n = \frac{1}{n^3} + \frac{1}{n^2}$ qui converge vers 0	(u_n) et (v_n) sont des suites adjacentes. Leur limite commune vaut 3

57 page 157

$u_n = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + ... + \frac{1}{n!}$ et $v_n = u_n + \frac{1}{n!}$

La suite (u_n) est strictement croissante car $u_{n+1} - u_n = \frac{1}{(n+1)!}$ est strictement positif.

La suite (v_n) est strictement décroissante car $v_{n+1} - v_n = u_{n+1} + \frac{1}{(n+1)!} - u_n - \frac{1}{n!} = \frac{2}{(n+1)!} - \frac{1}{n!}$

En mettant au même dénominateur: $v_{n+1} - v_n = \frac{2-n-1}{(n+1)!} = \frac{1-n}{(n+1)!}$

Comme $n \geqslant 1$, $v_{n+1} - v_n \leqslant 0$ et (v_n) est une suite décroissante.

Comme $v_n - u_n = \frac{1}{n!}$ tend vers 0 en $+\infty$, on peut conclure:

les suite (u_n) et (v_n) sont des suites adjacentes.
Elles convergent vers la même limite.
Remarque: Cette limite est le nombre e.

59 page 157

(u_n) et (v_n) sont définies par: $u_n=\sum_{p=1}^{n}\frac{1}{p^2}$ et $v_n=u_n+\frac{1}{n}$

Étude des variations de (u_n)

$u_{n+1}-u_n=\frac{1}{(n+1)^2}$ est strictement positif, donc, (u_n) est une suite strictement croissante. (1)

Étude des variations de (v_n)

$v_{n+1}-v_n=u_{n+1}-u_n+\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n}=\frac{1}{(n+1)^2}+\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n}=\frac{n+n(n+1)-(n+1)^2}{n(n+1)^2}=\frac{-1}{n(n+1)^2}$ est strictement négatif, donc, (v_n) est une suite strictement décroissante. (2)

Étude de la suite (w_n) définie par $w_n=v_n-u_n$

$w_n=\frac{1}{n}$ (évident par construction), donc, (w_n) converge vers 0. (3)

D'après (1), (2) et (3), les suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes, donc, elles convergent vers la même limite *l*.

À titre informatif: la limite *l* vaut $\frac{\pi^2}{6}$

---

87 page 160

1) À la fin de l'année 2005 + *n*, la somme en euros placée au taux annuel de 4% vaut u_n à laquelle on retire 25 €.
À la fin de l'année suivante, on a: $u_{n+1}=1{,}04\,u_n-25$

2) La suite (v_n) définie par $v_n=u_n-625$ vérifie $v_{n+1}=u_{n+1}-625=1{,}04\,u_n-25-625=1{,}04(u_n-625)=1{,}04\,v_n$
On en déduit que (v_n) est une suite géométrique de premier terme $v_0=u_0-625=250-625=-375$ et de raison 1,04, donc,
$v_n=-375\times1{,}04^n$ et $u_n=v_n+625=-375\times1{,}04^n+625$

3) Le compte est créditeur lorsque $u_n>0$

On cherche donc *n* minimum et $n\in\mathbb{N}$ tel que $-375\times1{,}04^n+625<0$, soit, $1{,}04^n>\frac{625}{375}$, or, $\frac{625}{375}=\frac{5}{3}$

Le tableau de valeurs de $1{,}04^n$ donne: $1{,}04^{13}\approx1{,}6651\,...$ et $1{,}04^{14}\approx1{,}73$
La 14$^{\text{ième}}$ année, soit, 2019, le compte n'est plus créditeur
Un tableau de valeurs de la suite (u_n) donne:

fin année	**2005**	**2006**	**2007**	**2008**	**2009**	**2010**	**2011**	**2012**	**2013**	**2014**	**2015**	**2016**	**2017**	**2018**
u_n	250	235	219,4	203,18	186,3	168,76	150,51	131,53	111,79	91,26	69,91	47,7	24,61	0,6

Autre méthode:

Avec la fonction ln $1{,}04^n>\frac{5}{3}$ équivaut à $n\ln(1{,}04)>\ln\left(\frac{5}{3}\right)$ équivaut à $n>\frac{\ln\left(\frac{5}{3}\right)}{\ln(1{,}04)}$.

La calculatrice donne: $n>13{,}02\ldots,$ comme *n* est entier, le minimum est $n=14$

---

91 page 160

(u_n) et (v_n) sont définies par $\begin{cases} u_0=2 \\ v_0=1 \\ u_{n+1}=\dfrac{u_n+v_n}{2} \\ v_{n+1}=\sqrt{u_n v_n} \end{cases}$

Commentaires :

u_{n+1} est la moyenne arithmétique des termes u_n et v_n.
v_{n+1} est la moyenne géométrique des termes u_n et v_n.
La limite commune des deux suites est la moyenne arithmético-géométrique de u_0 et v_0.

1) * Pour tout $n\in\mathbb{N}$, les termes v_n et u_n sont ***strictement positifs***
Preuve par récurrence: Vrai pour 0 et en supposant que, pour un entier n, u_n et v_n sont strictement positifs, il est immédiat de montrer que u_{n+1} et v_{n+1} sont strictement positifs.
Pour tout $n\in\mathbb{N}$, $u_n \neq v_n$,
en effet, supposons qu'il existe un entier n tel que $u_n = v_n$, on a lors : $u_{n+1} = u_n$ et $v_{n+1} = v_n$
Tous les termes sont égaux, ce qui est faux.

$u_1 = 1{,}5$ et $v_1 = \sqrt{2}$, d'où, $v_1 < u_1$
Pour comparer des termes strictement positifs, il faut et il suffit de comparer leurs carrés.
Les inégalités suivantes sont équivalentes:
Pour tout $n\in\mathbb{N}$, $v_{n+1} < u_{n+1} \Leftrightarrow u_nv_n < \left(\dfrac{u_n+v_n}{2}\right)^2 \Leftrightarrow 4u_nv_n < (u_n + v_n)^2 \Leftrightarrow 0 < (u_n - v_n)^2$

Cette dernière inégalité étant vérifiée pour tout $n\in\mathbb{N}$, l'inégalité $v_{n+1} < u_{n+1}$ est donc vraie .
**
On a:
pour $n \geqslant 1$, $v_n < u_n$. En multipliant par $v_n > 0$ les deux membres, on a: $v_n^2 < u_nv_n$, soit : $v_n < v_{n+1}$ (1)
On a donc: $u_{n+1} - \mathbf{v_{n+1}} < u_{n+1} - v_n$

$$u_{n+1} - \mathbf{v_{n+1}} < \frac{u_n+v_n}{2} - v_n$$

$$u_{n+1} - \mathbf{v_{n+1}} < \frac{u_n-v_n}{2}$$

Ce qui prouve le résultat

2) On a:
pour $n \geqslant 1$, $v_n < u_n$, en ajoutant u_n aux deux membres, on a: $v_n + u_n < 2u_n$, soit : $u_{n+1} < u_n$
Par conséquent : (u_n) est une suite strictement décroissante

L'inégalité (1) prouve que (v_n) est une suite strictement croissante
(Remarque: $v_n < u_n$, en multipliant par $u_n > 0$ les deux membres, on a: $u_nv_n < u_n^2$, soit, $u_{n+1} < u_n$)

Il reste à montrer que (w_n) définie par $w_n = u_n - v_n$ converge vers 0.
Or, on a montré que $w_{n+1} = \dfrac{w_n}{2}$ avec $w_0 = 2 - 1 = 1$
(w_n) est une suite géométrique de raison $\dfrac{1}{2}$ et comme $0 < \dfrac{1}{2} < 1$, la suite (w_n) converge vers 0.

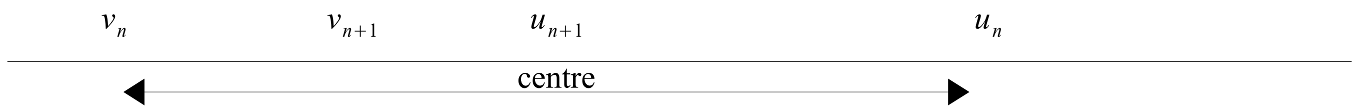
Remarquer : $w_n = \dfrac{1}{2^n}$

Les suites (u_n) et (v_n) sont donc adjacentes, et, par conséquent, convergent vers la même limite *l*.

*** Illustration graphique

$u_n - v_n$ est la longueur de l'intervalle $[v_n\,;\,u_n]$, u_{n+1} est le centre de cet intervalle, et $\dfrac{v_n - u_n}{2}$ est le rayon de l'intervalle.

La distance du centre à n'importe quel point de l'intervalle est inférieure au rayon de cet intervalle.



Pour tout *x* de $[a\,;b]$ de centre *c*, $|x-c| \leqslant \dfrac{b-a}{2}$

**** Les différentes moyennes (liste non exhaustive)*
a et b étant des réels strictement positifs, on appelle

moyenne arithmétique de a et b le réel $c = \dfrac{a+b}{2}$ *(exemple avec les notes)*

moyenne géométrique de a et b, le réel $q = \sqrt{ab}$ *(exemple le côté d'un carré de même aire qu'un rectangle)*

moyenne harmonique de a et b, le réel h défini par: $\dfrac{2}{h} = \dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b}$ *(exemple: la vitesse moyenne d'un véhicule faisant un aller-retour à deux vitesses constantes et différentes: pour l'aller 100 km à 50* $km.h^{-1}$ *au retour les 100 km à 70* $km.h^{-1}$*, l'aller-retour à la moyenne de 58,333...* $km.h^{-1}$

Preuve: durée de l'allée 2 heures, durée du retour $\dfrac{100}{70}$ *heures.*

Durée de l'aller-retour: $2 + \dfrac{100}{70} = \dfrac{240}{70}$ *heures. Vitesse moyenne de l'aller-retour:* $\dfrac{200 \times 70}{240} = \dfrac{175}{3}$ $km.h^{-1}$

On a les inégalités suivantes:
a et b étant strictement positifs, on montre $a < h < q < c < b$
Preuve: (Toutes les équivalences sont dans $]0;+\infty[$ *)*

$h = \dfrac{2ab}{b+a}$ $\qquad h<q \Leftrightarrow \dfrac{2ab}{b+a} < \sqrt{ab} \Leftrightarrow \dfrac{4a^2b^2}{(b+a)^2} < ab$

d'où, $h<q \Leftrightarrow 4ab < (b+a)^2 \Leftrightarrow 0 < (b-a)^2$ *(Vrai)*

$$q<c \Leftrightarrow \sqrt{ab} < \frac{a+b}{2} \Leftrightarrow ab < \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 \Leftrightarrow 0 < \left(\frac{b-a}{2}\right)^2 \quad \textit{(Vrai)}$$

"J'ai toujours pensé qu'il n'avait pas assez d'imagination pour devenir mathématicien !" ***Hilbert, David***
au sujet d'un étudiant qui a renoncé aux mathématiques pour la poésie

Autre exemple :

$$\begin{cases} u_0=0 \\ v_0=100 \\ u_{n+1}=\dfrac{u_n+v_n}{2} \\ v_{n+1}=\dfrac{u_{n+1}+v_n}{2} \end{cases}$$

$w_n = v_n - u_n$ est une suite géométrique de raison $\frac{1}{4}$. En effet,

$$w_{n+1} = v_{n+1} - u_{n+1} = \frac{u_{n+1}+v_n}{2} - \frac{u_n+v_n}{2} = \frac{u_n+v_n+2v_n-2u_n-2v_n}{4} = \frac{v_n-u_n}{4} = \frac{w_n}{4}$$

La suite (w_n) converge vers 0 car $0 < \frac{1}{4} < 1$

On a aussi : $w_0 = 100$ et $w_n = 100\times \frac{1}{4^n}$, donc, $w_n > 0$ pour tout $n\in\mathbb{N}$.

$$u_{n+1} - u_n = \frac{u_n+v_n}{2} - u_n = \frac{v_n-u_n}{2} = \frac{w_n}{2}$$

on en déduit que (u_n) est croissante.

$$v_{n+1} - v_n = \frac{u_{n+1}+v_n}{2} - v_n = \frac{u_n+v_n+2v_n-4v_n}{4} = -\frac{v_n-u_n}{4} = -\frac{w_n}{4}$$

on en déduit que (v_n) est décroissante.

Comme : (u_n) est croissante, (v_n) décroissante et $v_n - u_n$ converge vers 0, les suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes.

Par conséquent : (u_n) et (v_n) convergent vers la même limite l.

Soit $x_\mathrm{n} = u_n + 2v_n$,

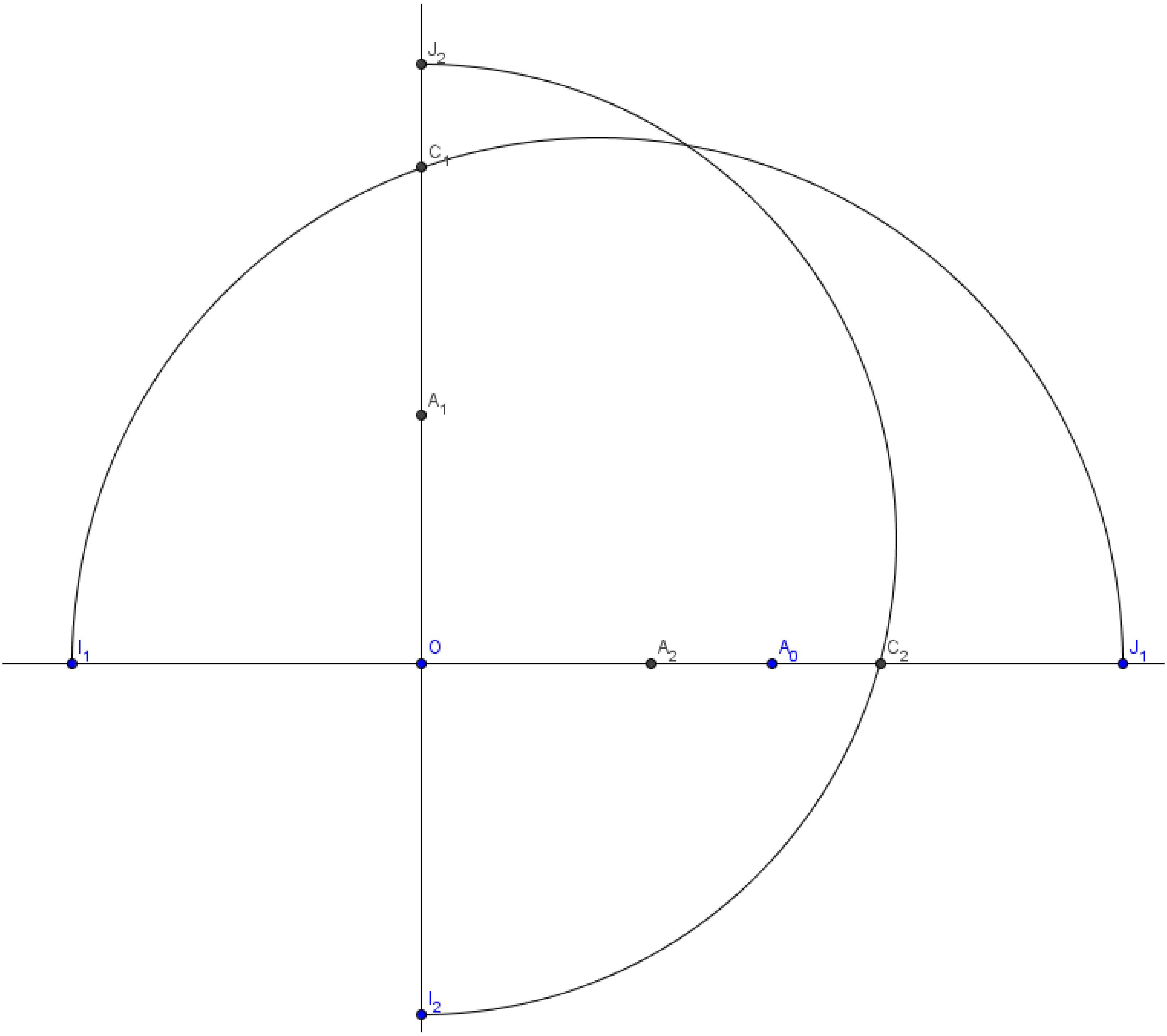
on a : $x_{\mathrm{n}+1} = u_{n+1} + 2v_{n+1} = \frac{u_n+v_n}{2} + u_{n+1} + v_n = \frac{u_n+v_n}{2} + \frac{u_n+v_n}{2} + v_n = u_n + 2v_n = x_\mathrm{n}$.

La suite (x_n) est stationnaire et vaut $x_0 = 0 + 200 = 200$

Comme (u_n) et (v_n) convergent vers l, la suite (x_n) converge vers $+ 2l = 3l$.

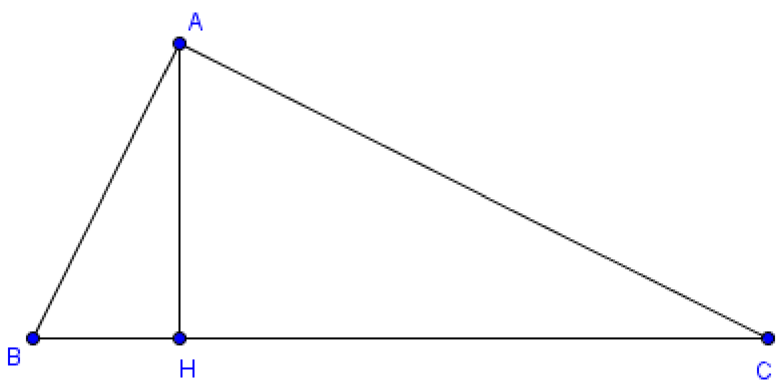
On en déduit : $3l = 200$, d'où, $l = \frac{200}{3}$

96 page 161



Rappels sur les triangles rectangles :

ABC est un triangle rectangle en *A* et [*AH*] est la hauteur relative à l'hypoténuse.



On a : $AH^2 = BH \times HC$

Preuve : on peut utiliser les triangles semblables ou les relations trigonométriques.

$\tan \widehat{ABH} = \dfrac{AH}{BH}$ dans le triangle *ABH* rectangle en *H* et

$\tan \widehat{HAC} = \frac{HC}{AH}$ dans le triangle ACH rectangle en H.

Or, $\widehat{ABH} = \widehat{HAC}$ (ils ont le même complémentaire $\widehat{BCA}$)

1) $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \sqrt{\frac{1+u_n}{4}} \end{cases}$

$u_0 = OA_0 = 1$ (donnée de l'exercice)

$u_1 = OA_1 = \frac{1}{2}\ OC_1$, or, OC_1 est la hauteur issue de C_1 dans le triangle rectangle $I_1C_1J_1$ (inscrit dans le demi-cercle de diamètre $[I_1J_1]$

d'où, $OC_1^2 = OI_1 \times OJ_1 = 1\times(1 + OA_0) = 1\times(1 + u_0) = 1 + u_0$.

$u_1 = \frac{1}{2}\ \sqrt{1+u_0} = \sqrt{\frac{1+u_0}{4}}$

La même démarche s'applique pour construire le segment OA_{n+1} à partir de OA_n.

$u_n = OA_n$

$u_{n+1} = OA_{n+1} = \frac{1}{2}\ OC_{n+1}$, or, OC_{n+1} est la hauteur issue de C_{n+1} dans le triangle rectangle $I_{n+1}C_{n+1}J_{n+1}$ (inscrit dans le demi-cercle de diamètre $[I_{n+1}J_{n+1}]$

d'où, $OC_{n+1}^2 = OI_{n+1} \times OJ_{n+1} = 1\times(1 + OA_n) = 1\times(1 + u_n) = 1 + u_n$.

$u_{n+1} = \frac{1}{2}\ \sqrt{1+u_n} = \sqrt{\frac{1+u_n}{4}}$

2) $u_1 = \frac{1}{2}\ \sqrt{1+1} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ et $u_2 = \frac{1}{2}\ \sqrt{1+\frac{\sqrt{2}}{2}}$

La suite (u_n) est majorée par tout réel supérieur ou égal à 1.

Démonstration : (par récurrence)

Initialisation :

$u_0 \leqslant 1$

Hérédité :

soit un entier $n \in \mathbb{N}$ tel que $u_n \leqslant 1$

en ajoutant 1 à chaque membre, puis en divisant par 4 qui est positif et en appliquant la fonction $\sqrt{\ }$ qui est croissante, on a :

$u_n \leqslant 1$

$1 + u_n \leqslant 2$

$\frac{1+u_n}{4} \leqslant \frac{1}{2}$

$\sqrt{\frac{1+u_n}{4}} \leqslant \sqrt{\frac{1}{2}}$ qui est un réel inférieur à 1.

On a donc : $u_{n+1} \leqslant 1$.

3) La suite (u_n) est décroissante.

Démonstration : (par récurrence)

Initialisation :

$u_0 \geqslant u_1$

Hérédité :

soit un entier $n \in \mathbb{N}$ tel que $u_n \geqslant u_{n+1}$
en ajoutant 1 à chaque membre, puis en divisant par 4 qui est positif et en appliquant la fonction $\sqrt{\ }$ qui est croissante, on a :
$u_n \geqslant u_{n+1}$
$1 + u_n \geqslant 1 + u_{n+1}$
$\frac{1+u_n}{4} \geqslant \frac{1+u_{n+1}}{4}$
$\sqrt{\frac{1+u_n}{4}} \geqslant \sqrt{\frac{1+u_{n+1}}{4}}$
On a donc : $u_{n+1} \geqslant u_{n+2}$

La suite (u_n) est minorée par 0 (tous les termes sont positifs)

La suite (u_n) est décroissante et minorée donc convergente.

4) Soit la limite de la suite (u_n).
On a : u_{n+1} converge ver l.
D'autre part : $1 + u_n$ converge vers $1 + l$ et $\frac{1+u_n}{4}$ converge vers $\frac{1+l}{4}$.
La fonction $\sqrt{\ }$ étant continue sur $\mathbb{R}^+$, la limite en $\frac{1+l}{4}$ de $\sqrt{\ }$ est $\sqrt{\frac{1+l}{4}} = \frac{1}{2}\sqrt{1+l}$
l'unicité de la limite donne l'égalité : $l = \frac{1}{2}\sqrt{1+l}$ qui équivaut à $2l = \sqrt{1+l}$
Résolution de l'équation : $2x = \sqrt{1+x}$
On en déduit : $4x^2 = 1 + x$, puis, $4x^2 - x - 1 = 0$
$\Delta = (-1)^2 - 4\times4\times(-1) = 17$
Deux racines : $x_1 = \frac{-(-1)-\sqrt{17}}{2\times4} = \frac{1-\sqrt{17}}{8}$ et $x_2 = \frac{1+\sqrt{17}}{8}$
Seule la solution positive est acceptable, d'où, $l = \frac{1+\sqrt{17}}{8}$

---

100 page 162

Soit les suites (u_n) et (v_n) définies par: $\begin{cases} u_0=1 \ ; \ v_0=2 \\ u_{n+1}=\dfrac{u_n+v_n}{2} \ ; \ v_{n+1}=\dfrac{u_{n+1}+v_n}{2} \end{cases}$

1) $v_{n+1}-u_{n+1}=\frac{u_{n+1}+v_n}{2}-\frac{u_n+v_n}{2}=\frac{u_n+v_n}{4}-\frac{u_n}{2}=\frac{v_n-u_n}{4}=\frac{1}{4}(v_n-u_n)$

Cela veut dire: la suite (y_n) définie par $y_n=v_n-u_n$ est une suite géometrique de premier terme $y_0=v_0-u_0=1$ et de raison $\frac{1}{4}$.

Par conséquent: Pour tout n, $y_n=\left(\frac{1}{4}\right)^n$ (et aussi $y_n>0$)

2) Soit la proposition $P(n): u_n<v_n$

Initialisation: $n=0$ $u_0=1$ et $v_0=2$ $P(0)$ est vraie

Hérédité: soit un entier naturel *p* tel que $P(p)$
Soit: $u_p<v_p$, c'est-à-dire, $v_p-u_p>0$
D'après 1), $v_{p+1}-u_{p+1}=\frac{1}{4}(v_p-u_p)$, d'où, $v_{p+1}-u_{p+1}>0$
On obtient: $u_{p+1}<v_{p+1}$ c'est-à-dire $P(p+1)$

Conclusion: l'axiome de récurrence montre que pour tout entier naturel *n*, $u_n<v_n$

3) ***Montrons que*** (u_n) ***est croissante***
$$u_{n+1}-u_n=\frac{u_n+v_n}{2}-u_n=\frac{v_n-u_n}{2}=\frac{y_n}{2}$$
donc, strictement positif. (u_n) est strictement croissante (i)

Montrons que (v_n) ***est décroissante***
$$v_{n+1}-v_n=\frac{u_{n+1}+v_n}{2}-v_n=\frac{u_{n+1}-v_n}{2}=\frac{u_n+v_n}{4}-\frac{v_n}{2}=\frac{u_n-v_n}{4}=-\frac{y_n}{4}$$
donc, strictement négatif
(v_n) est strictement décroissante (ii)

Montrons que v_n-u_n ***converge vers 0***
D'après le 1), la suite est une suite géométrique de raison $\frac{1}{4}$ donc convergente vers 0 (iii)
Les (i), (ii), (iii) sont les conditions suffisantes pour montrer que les suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes.
Par conséquent, elles sont convergentes.

4 a) $w_n = \sum_{p=0}^{p=n}(v_p-u_p)$

w_n est la somme de $n+1$ termes consécutifs d'une suite géométrique de premier terme 1 et de raison $\frac{1}{4}$,

donc, $w_n=1\times\frac{1-\left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}}{1-\left(\frac{1}{4}\right)}=\frac{4}{3}\left(1-\left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}\right)$

b) $\sum_{p=0}^{p=n-1}(u_{p+1}-u_p)$

On a vu au 3), $u_{p+1}-u_p=\frac{v_p-u_p}{2}$

On a donc: $\sum_{p=0}^{p=n-1}(u_{p+1}-u_p)=\sum_{p=0}^{p=n-1}\left(\frac{v_p-u_p}{2}\right)=\frac{1}{2}\sum_{p=0}^{p=n-1}(v_p-u_p)=\frac{1}{2}w_{n-1}$

On a aussi: $\sum_{p=0}^{p=n-1} (u_{p+1}-u_p) = (u_1-u_0)+(u_2-u_1)+...+(u_n-u_{n-1})=u_n-u_0$

On en déduit: $u_n-u_0=\frac{1}{2}w_{n-1}=\frac{2}{3}\left(1-\left(\frac{1}{4}\right)^n\right)$

$u_n=\frac{2}{3}\left(1-\left(\frac{1}{4}\right)^n\right)+1$

Comme $0<\frac{1}{4}<1$, $\left(\frac{1}{4}\right)^n$ converge vers 0 et (u_n) converge vers $\frac{2}{3}+1=\frac{5}{3}$

c) Les suites (u_n) et (v_n) étant adjacentes, (u_n) et (v_n) convergent vers la même limite $\frac{5}{3}$

Interprétation graphique:

Soit un intervalle $:I_n=[u_n;v_n]$

u_{n+1} est le milieu de cet intervalle I_n , on a donc deux intervalles $J_n=[u_n;u_{n+1}]$ et $K_n=[u_{n+1};v_n]$

v_{n+1} est le milieu de l'intervalle K_n

et on recommence:

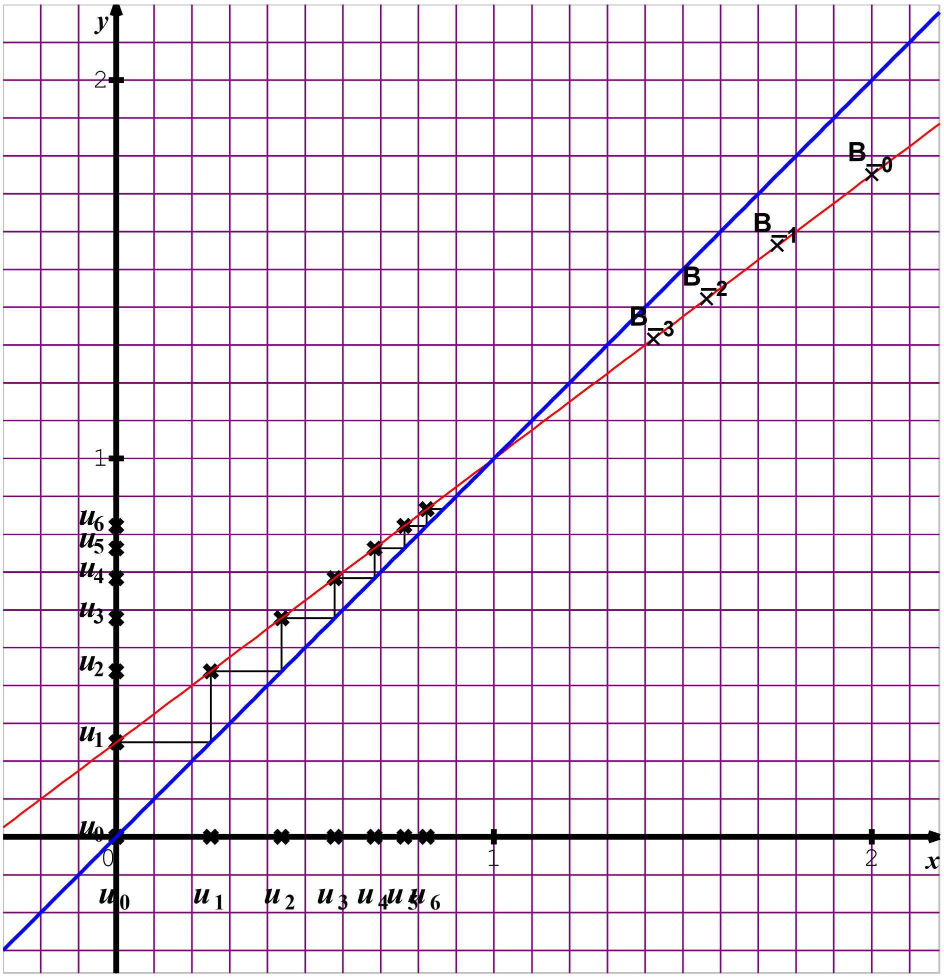
---

107 page 163

$\begin{cases} u_0=0 \\ u_{n+1}=\frac{3u_n+1}{4} \end{cases}$, $\begin{cases} v_0=2 \\ v_{n+1}=\frac{3v_n+1}{4} \end{cases}$

1) $u_1 = \frac{1}{4}$, $u_2 = \frac{7}{16}$, $u_3 = \frac{37}{64}$, $v_1 = \frac{7}{4}$, $v_2 = \frac{25}{16}$, $v_3 = \frac{91}{64}$

2)



3)

$s_n = u_n + v_n$

Initialisation: $s_0 = s_1 = ... = 2$

Hérédité:

Supposons la propriété vraie pour un entier n.

On a alors: $s_n = 2$

Or, $s_{k+1} = u_{n+1} + v_{n+1} = ... = \frac{3}{4}(u_n + v_n) + \frac{1}{2} = \frac{3}{4} s_n + \frac{1}{2} = ... = 2$

Conclusion: ....

4) $d_n = v_n - u_n$

$d_{n+1} = ... = ... = \frac{3}{4} d_n$

donc, (d_n) est la suite géométrique de premier terme $d_0 = ... = 2$ et de raison $\frac{3}{4}$,

on en déduit: $d_n = 2\times \left(\frac{3}{4}\right)^n$

5) On résout le système: $\begin{cases} u_n + v_n = 2 \\ v_n - u_n = 2\times\left(\frac{3}{4}\right)^n \end{cases}$

La somme membre-à-membre mène à : $v_n = 1 + \left(\frac{3}{4}\right)^n$

La différence membre-à-membre mène à: $u_n = 1 - \left(\frac{3}{4}\right)^n$

6) Comme $0 < \frac{3}{4} < 1$, la suite $\left(\left(\frac{3}{4}\right)^n\right)$ converge vers 0, d'où,

les suites (u_n) et (v_n) convergent vers 1.

Complément:

On a: $u_0 < u_1$

Supposons $u_k < u_{k+1}$
En multipliant par 3, puis en ajoutant 1 et en divisant par 4,
on obtient : $u_{k+1} < u_{k+2}$

Conclusion: (u_n) croissante

On a: $v_0 > v_1$

Supposons $v_k > v_{k+1}$
En multipliant par 3, puis en ajoutant 1 et en divisant par 4,
on obtient : $v_{k+1} > v_{k+2}$

Conclusion: (v_n) décroissante

Or, la suite $(v_n - u_n)$ converge vers 0

Les suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes.

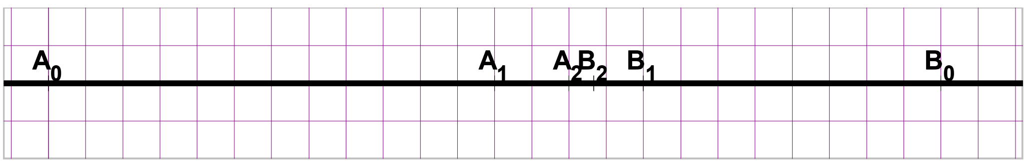
Exercice A page 164 (Nouvelle Calédonie mars 2005)

Partie A

A_0 et B_0 sont deux points distincts. A_1 est le milieu de $[A_0B_0]$ et B_1 le barycentre de $\{(A_0, 1);(B_0, 2)\}$

Pour tout entier naturel n, A_{n+1} est le milieu de $[A_nB_n]$ et B_{n+1} le barycentre de $\{(A_n,1);(B_n,2)\}$

1)



Lorsque n devient très grand A_n et B_n tendent vers un même point L

2) La droite (A_0B_0) étant mini du repère $(A_0, \vec{i})$ avec $\vec{i} = \frac{1}{12}\overrightarrow{A_0B_0}$, on note u_n et v_n les abscisses respectives des points A_n et B_n .

Comme A_{n+1} est le milieu de $[A_n B_n]$, on a: $u_{n+1}=\dfrac{u_n+v_n}{2}$

Comme B_{n+1} est le barycentre de $\{(A_n,1);(B_n,2)\}$, on a: $\overrightarrow{A_0A_n}+2\overrightarrow{A_0B_n}=(1+2)\overrightarrow{A_0B_{n+1}}$

On en déduit: $v_{n+1}=\dfrac{u_n+2\mathrm{v}_n}{3}$

Partie B

On a donc les suites (u_n) et (v_n) définies par $u_0=0$, $v_0=12$, $u_{n+1}=\dfrac{u_n+v_n}{2}$ et $v_{n+1}=\dfrac{u_n+2\mathrm{v}_n}{3}$

1) La suite (w_n) définie par $w_n=v_n-u_n$ est une suite géométrique de raison $\dfrac{1}{6}$ et de premier terme $w_0=12$, car, $w_{n+1}=v_{n+1}-u_{n+1}=\dfrac{2\mathrm{u}_n+4\mathrm{v}_n-3\mathrm{u}_n-3\mathrm{v}_n}{6}=\dfrac{w_n}{6}$

Comme $0<\dfrac{1}{6}<1$, la suite (w_n) est convergente vers 0, et, w_0 étant strictement positif, (w_n) est une suite ayant tous ses termes strictement positifs.

On a: $w_n=12\cdot\left(\dfrac{1}{6}\right)^n$ pour tout entier naturel *n*.

2) $u_{n+1}-u_n=\dfrac{u_n+v_n}{2}-u_n=\dfrac{v_n-u_n}{2}=\dfrac{w_n}{2}$. Comme $w_n>0$, la suite (u_n) est strictement croissante.

$v_{n+1}-v_n=\dfrac{u_n+2\mathrm{v}_n}{3}-v_n=\dfrac{u_n-v_n}{3}=-\dfrac{w_n}{3}$. Comme $w_n>0$, la suite (v_n) est strictement décroissante.

3) (u_n) étant croissante, (v_n) étant décroissante et (v_n-u_n) convergeant vers 0, les suites (u_n) e t (v_n) sont adjacentes.

Elles convergent par conséquent vers un même réel *l*.

4) Soit (t_n) définie par $t_n=2\mathrm{u}_n+3\mathrm{v}_n$

Pour tout entier naturel *n*, $t_{n+1}=2\mathrm{u}_{n+1}+3\mathrm{v}_{n+1}=u_n+v_n+u_n+2\mathrm{v}_n=2\mathrm{u}_n+3\mathrm{v}_n=t_n$

La suite (t_n) est donc une suite constante (ou stationnaire). Comme $t_0=36$, pour tout entier naturel *n*, $t_n=36$

Partie C.

Puisque (u_n) et (v_n) convergent vers la même limite *l*, on a:

$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = l$, $\lim\limits_{n\to+\infty} 2u_n = 2l$,

$\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = l$, $\lim\limits_{n\to+\infty} 3v_n = 3l$, d'où, par somme $\lim\limits_{n\to+\infty} (2u_n + 3v_n) = 5l$,

or, $\lim\limits_{n\to+\infty} t_n = 36$

on en déduit: $l=\dfrac{36}{5}=7{,}2$.

Les points A_n et B_n tendent vers le point *L* d'abscisse 7,2 sur l'axe $(A_{0,}\vec{i})$