Index

page 169 Testez-vous......1
Activité 1 page 170......3
Activité 2 page 171......5
Activité 3 page 171......6
1 page 186......7
2 page 186......7
12 page 187......8
21 page 187......8
22 page 187......9
23 page 187......10
24 page 187......11
28 page 188......11
32 page 188......11
33 page 188......14
35 page 188......15
41 page 189......18
46 page 190......18
47 page 190......19
48 page 190......20
49 page 190......21
50 page 190......22
51 page 190......22
60 page 190......22
61 page 191......22
62 page 191......23
63 page 191......23
64 page 191......23
65 page 191......24
66 page 191......24
68 page 191......24
69 page 191......25
70 page 191......26
71 page 191......27
83 page 193......28
84 page 193......29
88 page 193......29
89 page 194......30
92 page 194......30
93 page 194......31
100 page 195......32
Exercice B page 196......33
Exercice C page 196......35
Exercice D page 196 Amérique du Sud novembre 2005......37

page 169 Testez-vous

Aires et volumes (Réponses correctes surlignées en vert, réponses fausses en magenta))

	A	B	C	D
L'aire d'un disque de rayon R et de diamètre D est	$2\pi R$ périmètre	πR^2	$4\pi R$	$\frac{\pi D^2}{4}$

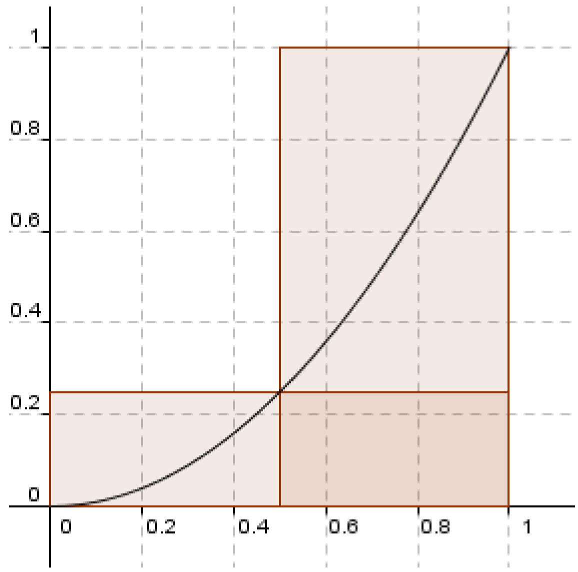
Un trapèze de bases b et B et de hauteur h. L'aire est	$b\times\frac{(B+h)}{2}$	$h\times(b+B)$	$\frac{h+b+B}{2}$	$\frac{(b+B)\times h}{2}$
Dans un repère orthonormal d'origine O, (unité 1 cm) La droite d'équation y = 4 – 2x coupe les axes en A et B L'aire de AOB est	1 cm²	2 cm²	4 cm² OA = 2; OB = 4	8 cm²
La hauteur d'un cylindre droit est h, le rayon de base R. son volume est	$2\pi R^2 h$	$\pi R^2 h$ aire de base × hauteur	$2\pi R h$ aire latérale (cylindre développé)	$\frac{\pi R^2 h}{2}$
La hauteur d'un cône de révolution est h, le rayon de base R. son volume est	$2\frac{\pi R^2 h}{3}$	$\pi R^2 h$	$\frac{\pi R^2 h}{3}$	$\frac{\pi R^2 h}{6}$

Dérivées

	A	B	C	D
$g(x) = 4e^{2x-1}$ g est de la forme $k\times e^u$	$g'(x) = 4e^{2x-1}$	$g'(x) = 4e^{2x}$	$g'(x) = 8e^{2x}$	$g'(x) = 8e^{2x-1}$ $g' = ku'e^u$
$g(x) = \frac{1}{x^2}$ g est de la forme $x \mapsto x^\alpha$	$g'(x) = \frac{1}{x}$	$g'(x) = -\frac{1}{x}$	$g'(x) = -\frac{2}{x^3}$ $g' : x \mapsto \alpha\ x^{\alpha-1}$	$g'(x) = \frac{2}{x}$
$f(x) = \ln(x^2 + 1)$ f est de la forme $\ln \circ u$	$f'(x) = \frac{1}{x^2+1}$	$f'(x) = \frac{x}{x^2+1}$	$f'(x) = \frac{2x}{x^2+1}$ la dérivée est $\frac{u'}{u}$	$f'(x) = \frac{2x}{(x^2+1)^2}$
Ces fonctions ont la même dérivée que $h(x) = \frac{2x-4}{x+2}$	$f(x) = \frac{3x-2}{x+2}$ $f(x) - h(x) = 1$	$g(x) = \frac{-8}{x+2}$ $g(x) - h(x) = -2$	$k(x) = \frac{8}{x+2}$	$l(x) = \frac{2x-4}{(x+2)^2}$
Ces fonctions ont la même dérivée que $f(x) = \ln(4x + 3)$	$h(x) = \ln(4x)$	$h(x) = \ln(8x + 6)$ $h(x) - f(x) = \ln 2$	$h(x) = \ln(x + \frac{3}{4})$ $h(x) = f(x) - \ln 4$	$h(x) = \ln(4x^2 + 3)$
Ces fonctions ont la même dérivée que $f(x) = \cos(2x)$	$g(x) = \cos^2 x$	$g(x) = \cos(-2x)$ la fonction cos est paire: $\cos(-2x) = \cos(2x)$	$g(x) = \cos(2x - 3)$	$g(x) = \sin(2x)$
Si le coefficient directeur de la tangente à la courbe d'équation $y = f(x)$ en $x = 1$ est 2 alors on peut avoir	$f(x) = x^2$ $f'(x) = 2x$, $f'(1) = 2$	$f(x) = x^3$ $f'(x) = 3x^2$ $f'(1) = 3$	$f(x) = x^2 + 1$ $f'(x) = 2x$, $f'(1) = 2$	$f(x) = x^2 + x$ $f'(x) = 2x + 1$ $f'(1) = 3$

Activité 1 page 170

1) En divisant l'intervalle [0 ; 1] en deux parties égales : (Chaque intervalle a lors une amplitude de $\frac{1}{2}$)

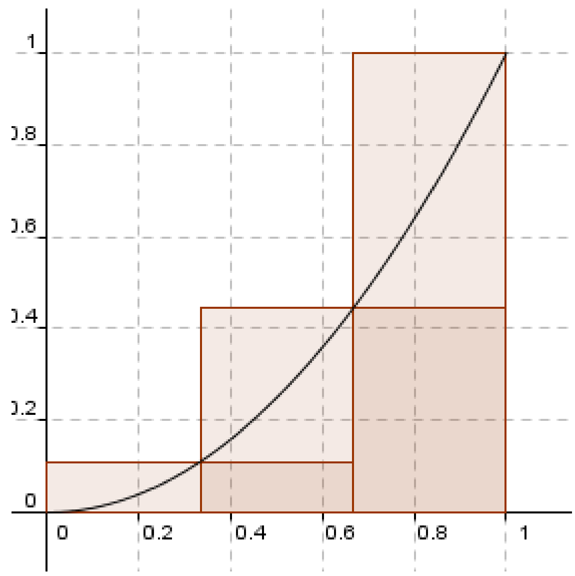


L'aire $\mathcal{S}$ est encadrée par : $0 + \frac{1}{2} \times \left(\frac{1}{2}\right)^2 \leqslant \mathcal{S} \leqslant \frac{1}{2} \times \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{2}$

En remarquant que $1 = \frac{2}{2}$, on peut écrire : $0 + \frac{1}{2} \times \left(\frac{1}{2}\right)^2 \leqslant \mathcal{S} \leqslant \frac{1}{2} \times \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{2} \times \left(\frac{2}{2}\right)^2$

$$0 + \frac{1}{2^3} \leqslant \mathcal{S} \leqslant \frac{1}{2^3} + \frac{2^2}{2^3}$$

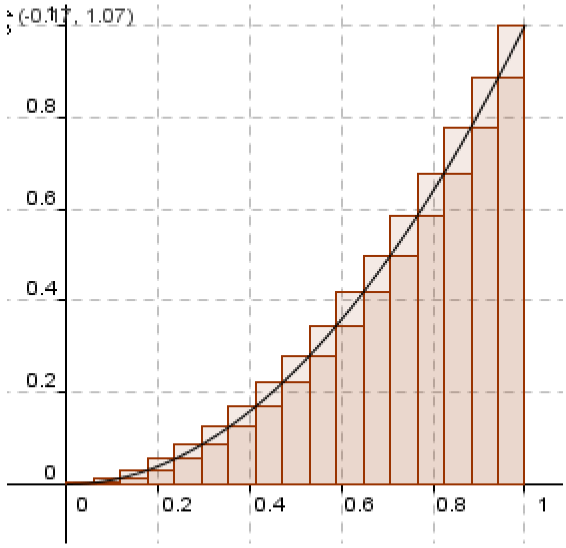
2) En divisant l'intervalle [0 ; 1] en trois parties égales : (Chaque intervalle a lors une amplitude de $\frac{1}{3}$)



L'aire $\mathcal{S}$ est encadrée par : $0 + \frac{1}{3} \times \left(\frac{1}{3}\right)^2 + \frac{1}{3} \times \left(\frac{2}{3}\right)^3 \leqslant \mathcal{S} \leqslant \frac{1}{3} \times \left(\frac{1}{3}\right)^2 + + \frac{1}{3} \times \left(\frac{2}{3}\right)^3 + \frac{1}{3}$

En remarquant que $1 = \frac{3}{3}$, on peut écrire : $\frac{1}{3^3}(0 + 1^2 + 2^2) \leqslant \mathcal{S} \leqslant \frac{1}{3^3} \times (0 + 1^2 + 2^2 + 3^2)$

3) En divisant l'intervalle [0 ; 1] en n parties égales : (Chaque intervalle a lors une amplitude de $\frac{1}{n}$)



Pour un entier k compris entre 0 et $n-1$, on obtient un intervalle de bornes $\frac{k}{n}$ et $\frac{k+1}{n}$,

a) L'aire S_k sous la courbe est telle que : $\frac{1}{n} \times \left(\frac{k}{n}\right)^2 \leqslant S_k \leqslant \frac{1}{n} \times \left(\frac{k+1}{n}\right)^2$

soit $\frac{1}{n^3} \times k^2 \leqslant S_k \leqslant \frac{1}{n^3} \times (k+1)^2$

b) En faisant la somme de toutes les aires élémentaires, on obtient après factorisation de $\frac{1}{n^3}$ l'encadrement :

$$\frac{1}{n^3}(0 + 1^2 + 2^2 + ... + (n-1)^2) \leqslant \mathcal{S} \leqslant \frac{1}{n^3}(0 + 1^2 + 2^2 + ... + n^2)$$

$$\frac{1}{n^3}\sum_{k=0}^{n-1} k^2 \leqslant \mathcal{S} \leqslant \frac{1}{n^3}\sum_{k=0}^{n-1}(k+1)^2$$ (Remarquer que $\sum_{k=0}^{n-1}(k+1)^2 = \sum_{k=1}^{n} k^2$)

4) Or, $\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

On a donc : $\sum_{k=0}^{n-1} k^2 = \frac{(n-1)(n-1+1)(2(n-1)+1)}{6} = \frac{(n-1)n(2n-1)}{6}$ et,

$$\frac{1}{n^3}\,\frac{(n-1)n(2n-1)}{6} \leqslant \mathcal{S} \leqslant \frac{1}{n^3}\,\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

Calcul : $n = 10$ $\quad \frac{9\times10\times19}{6000} \leqslant \mathcal{S} \leqslant \frac{10\times11\times21}{6000}$ soit : $0{,}285 \leqslant \mathcal{S} \leqslant 0{,}385$

$n = 20$ $\quad \frac{19\times20\times39}{48000} \leqslant \mathcal{S} \leqslant \frac{20\times21\times41}{48000}$ soit : $0{,}30875 \leqslant \mathcal{S} \leqslant 0{,}35875$

$n = 50$ $\quad \frac{49\times50\times99}{6\times125000} \leqslant \mathcal{S} \leqslant \frac{50\times51\times101}{6\times125000}$ soit : $0{,}3234 \leqslant \mathcal{S} \leqslant 0{,}3434$

La suite (u_n) de terme général $u_n = \frac{1}{n^3} \frac{(n-1)n(2n-1)}{6}$ converge vers $\frac{2}{6} = \frac{1}{3}$ (Limites de suites rationnelles ...)

La suite (v_n) de terme général $v_n = \frac{1}{n^3} \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ converge vers $\frac{2}{6} = \frac{1}{3}$ (Limites de suites rationnelles ...)

Conclusion : D'après le théorème des gendarmes $\mathcal{S} = \frac{1}{3}$.

Activité 2 page 171

1) vitesse constante: $v_1 = 70$ m.sec^{-1}, durée : $t_1 = 50$ sec

Distance parcourue: $D_1 = 70 \times 50 = 3\,500$ m.

Interprétation graphique:

On représente la fonction: $t \mapsto v_1$ pour $t \in [0; t_1]$

$OB' = 50$ (unités en abscisses), $OA = 70$ (unités en ordonnées)

L'aire du rectangle vaut: $OB' \times OA = 3\,500$ (unités d'aire)

2) vitesse constante: $v_2 = 50$ m.sec^{-1}, durée : $t_2 = 30$ sec

Distance parcourue: $D_2 = 50 \times 30 = 1\,500$ m.

Interprétation graphique:

On représente la fonction: $t \mapsto v_2$ pour $t \in [t_1; t_2]$

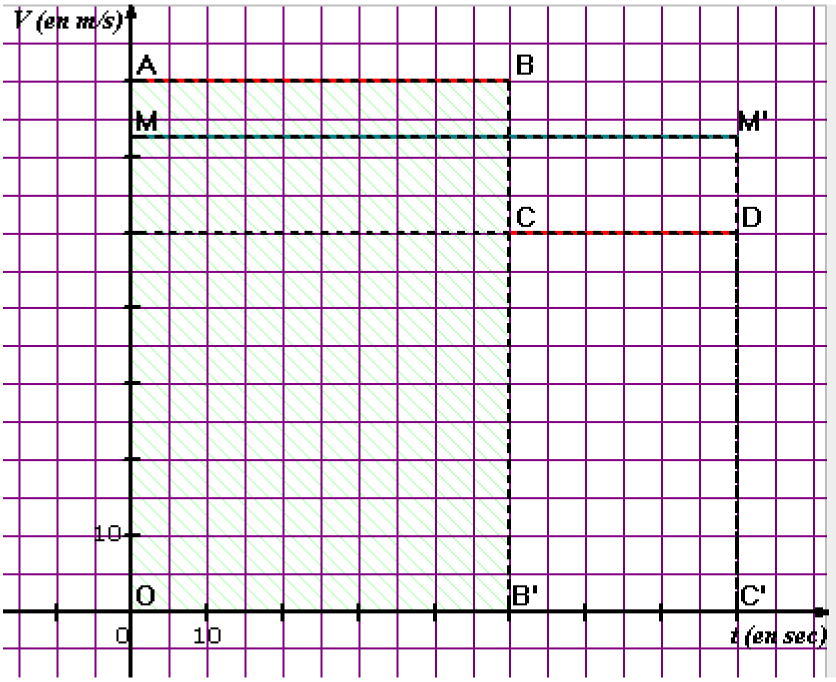
$B'D' = 30$ (unités en abscisses), $B'C = 50$ (unités en ordonnées)

L'aire du rectangle vaut: $B'D' \times B'C = 3\,500$ (unités d'aire)

3) La distance totale parcourue en 80 secondes est: 3 500 + 1 500 = 5 000 mètres.

La vitesse moyenne du parcours est: $\frac{5000}{80} = 62{,}5$ m.sec^{-1}

Le segment $(MM']$ représente la vitesse moyenne, c'est-à-dire, la vitesse d'un train qui aurait parcouru la même distance pendant la même durée.



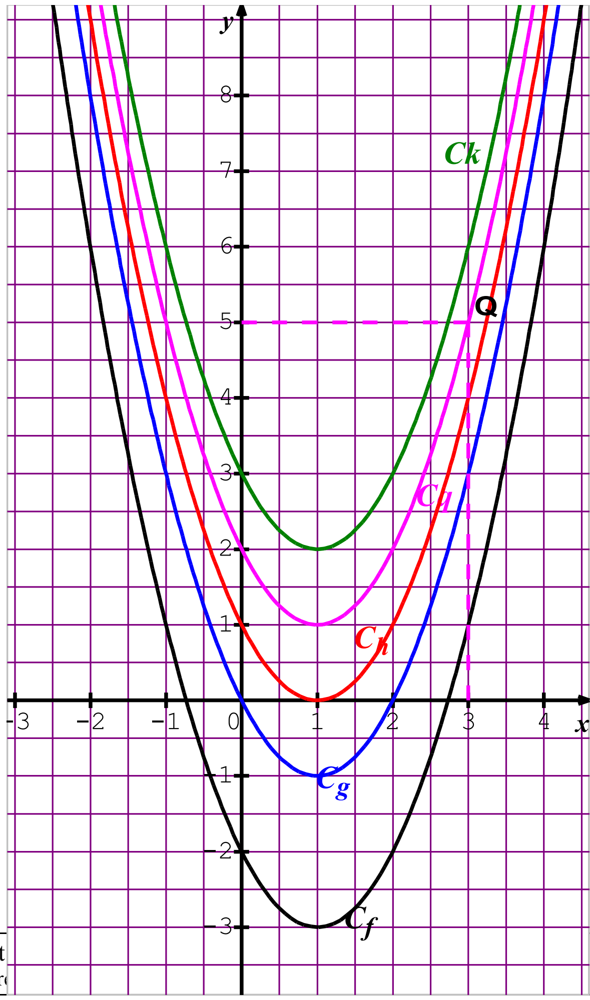
Complément: Soit $t \mapsto D(t)$ la fonction représentant la distance.

Sur chacun des intervalles $[0; t_1]$ et $[t_1; t_2]$, la dérivée de la fonction D est la vitesse.

Ou encore, une primitive de la fonction vitesse est la fonction D.

Activité 3 page 171

1) Les fonctions représentées sont des fonctions polynômes du second degré $\phi: x \mapsto x^2 + bx + c$



a) le minimum de chaque fonction est atteint en $x_0 = -\dfrac{b}{2a}$

Par lecture graphique: $x_0 = 1$, d'où, $b = -2$

On a donc: $\phi: x \mapsto x^2 - 2x + c$.

La dérivée est: $\phi': x \mapsto 2x - 2$

b) Le coefficient c est déterminée par $\phi(0)$.

Graphiquement, on lit: $f(0) = -2$, $g(0) = 0$, $h(0) = 1$, $k(0) = 3$

c) La courbe C_g se déduit de la courbe C_f par la translation de vecteur $2\vec{j}$.

d) Soit q vérifiant: $\begin{cases} q'(x) = 2x - 2 \\ q(3) = 5 \end{cases}$.

On a donc: $q(x) = x^2 - 2x + c$ et $3^2 - 2\times3 + c = 5$, d'où, $c = 2$

2) Les fonctions ayant des dérivées égales sont surlignées de la même couleur.

$f_1 : x \mapsto 2x^2 + 4x - 1$	$f_1'(x) = 4x + 4$		$f_6 : x \mapsto \dfrac{5x+2}{2x+1}$	$f_6'(x) = \dfrac{1}{(2x+1)^2}$
$f_2 : x \mapsto \ln(4x - 8)$	$f_2'(x) = \dfrac{4}{4x-8} = \dfrac{1}{x-2}$		$f_7 : x \mapsto e^{2x-5}$	$f_7'(x) = 2e^{2x-5}$
$f_3 : x \mapsto 2e^{x-5}$	$f_3'(x) = 2e^{x-5}$		$f_8 : x \mapsto \ln(x-2)$	$f_8'(x) = \dfrac{1}{x-2}$
$f_4 : x \mapsto x^2 + 2x - 10$	$f_4'(x) = 2x + 2$		$f_9 : x \mapsto 2x^2 + 4x - 3$	$f_9'(x) = 4x + 4$
$f_5 : x \mapsto 2e^{4x-1}$	$f_5'(x) = 8e^{4x-1}$		$f_{10} : x \mapsto \dfrac{x}{2x+1}$	$f_{10}'(x) = \dfrac{1}{(2x+1)^2}$

$f_1(x) - f_9(x) = ... = 2$
$f_6(x) - f_{10}(x) = ... = 2$
$f_2(x) - f_8(x) = ... = 2\ln 2$

De façon générale:
Soient f et g deux fonctions définies et dérivables sur un même intervalle I telles que $f' = g'$
On a alors: $f' - g' = 0$, d'où, $(f - g)' = 0$, soit: $f - g = k$ où $k \in \mathbb{R}$.
Réciproquement: Si $f - g = k$ où $k \in \mathbb{R}$ alors $(f - g)' = 0$, soit $f' - g' = 0$

---

1 page 186

a) Sur $[-4;8]$, f est représentée par le segment bleu et g par le segment rouge.

b) $I_1 = \int_0^4 g(x)dx = \frac{4\times4}{2} = 8$ (aire du triangle ...) $I_2 = \int_0^8 g(x)dx = 8 - \frac{4\times4}{2} = 0$

$I_3 = \int_{-4}^0 f(x)dx = \frac{(2+4)\times4}{2} = 12$ (aire du trapèze ...) $I_4 = \int_0^8 f(x)dx = \frac{(4+8)\times8}{2} = 48$

---

2 page 186

a) La fonction affine est représentée par une droite passant par les points $A(0;\ 1)$ et $B(4;4a + 1)$.

L'aire du trapèze sous le segment $[AB]$ est : $\frac{4\times(1+4a+1)}{2} = 8$. On en tire $a = \frac{1}{2}$

b) Par symétrie par rapport à l'axe des abscisses, on doit avoir un segment $[CD]$ symétrique de $[AB]$, d'où, $m = -\frac{1}{2}$

La fonction affine est représentée par une droite passant par les points $C(0;\ -1)$ et $D(4;\ 4m - 1)$ avec $4m - 1 < 0$.

L'aire du trapèze au-dessus du segment $[CD]$ est : $\frac{4\times(1+|4m-1|)}{2} = 8$.

On obtient: $4\frac{(1-4m+1)}{2} = 8$. On en tire $m = -\frac{1}{2}$

c) Pour obtenir l'intégrale nulle, la droite doit couper l'axe des abscisses et les deux triangles formés doivent avoir la même aire. Si on cherche deux triangles isométriques, la droite coupe l'axe des abscisses en (2;0) et la pente est 1.

La droite d'équation $y=x-2$ convient. Une fonction possible est donc: $x\mapsto x-2$

Plus généralement: soit $x\mapsto ax+b$, si $c\in[0;4]$, on doit avoir: $\begin{cases} ac+b=0 \\ \frac{bc}{2}=\frac{(4-c)(-4a-b)}{2} & si\ b>0 \end{cases}$ ou $\begin{cases} ac+b=0 \\ \frac{-bc}{2}=\frac{(4-c)(4a+b)}{2} & si\ b<0 \end{cases}$. Ces deux systèmes sont équivalents et ont une infinité de solutions. On peut fixer le réel *a* et calculer *b* et *c* en fonction de *a*. On trouve: $c=2$ et $b=-2a$

---

12 page 187

f est définie sur ℝ par *f* (*x*) = 2(cos(2*x* + 3) + *x*)
La fonction *F* définie et dérivable sur ℝ par *F*(*x*) = sin(2*x* + 3) + *x*² + 50 a pour dérivée :
F ' (*x*) = 2×cos(2*x* + 3) + 2*x* = 2(cos(2*x* + 3) + *x*) = *f* (*x*)
F est donc une primitive d E_f .
Toute autre primitive *G* de *f* peut s'écrire : *G*(*x*) = sin(2*x* + 3) + *x*² + *C* où *C* ∈ ℝ.

---

21 page 187

$\int_2^3 x^3-3x^2+3x-1\,dx = \left[\frac{1}{4}x^4-x^3+\frac{3}{2}x^2-x\right]_2^3 = \frac{81}{4} - 27 + \frac{27}{2} - 3 - (4-8+6-2) = ... = \frac{15}{4}$

$\int_2^3 (-2x^5+5x^4)\,dx = \left[-\frac{x^6}{3}+x^5\right]_2^3 = -243 + 243 - (-\frac{64}{3} + 32) = -\frac{32}{3}$

$\int_2^3 \frac{(x+1)^3}{x^2}\,dx = \int_2^3 \frac{x^3+3x^2+3x+1}{x^2}\,dx = \int_2^3 \left(x+3+\frac{3}{x}+\frac{1}{x^2}\right)dx = \left[\frac{x^2}{2}+3x+3\ln x-\frac{1}{x}\right]_2^3$

$= \frac{27}{2} + 3\ln 3 - \frac{1}{3} - (8 + 3\ln 2 - \frac{1}{2}) = \frac{17}{3} + 3\ln\frac{3}{2}$

$\int_2^3 \frac{(x+1)^3}{x}\,dx = \int_2^3 \frac{x^3+3x^2+3x+1}{x}\,dx = \int_2^3 \left(x^2+3x+3+\frac{1}{x}\right)dx = \left[\frac{x^3}{3}+\frac{3x^2}{2}+3x+\ln x\right]_2^3 = ...$

$= \frac{101}{6} + \ln\frac{3}{2}$

$\int_2^3 \frac{x^3+1}{(x^4+4x+1)^2}\,dx = \left[\frac{1}{4}\times\frac{-1}{x^4+4x+1}\right]_2^3 = ... = \frac{69}{9400}$.

Commentaire: On pose *u* (*x*) = x^4 + 4*x* + 1, d'où, *u'* (*x*) = 4 x^3 + 4 = 4(x^3 + 1).

La fonction est donc de la forme $\frac{1}{4}$ $\frac{u'}{u^2}$ qui est la dérivée de $\frac{1}{4}$ × $\frac{-1}{u}$

$\int_2^3 (\sqrt{x}+5x\sqrt{x})\,dx = \left[\frac{2}{3}\times x^{3/2}+2x^{5/2}\right]_2^3 = ... = 20\sqrt{3} - \frac{28}{3}\sqrt{2}$.

Commentaire: On sait qu'une primitive de la fonction *x* ↦ x^α où α ≠ –1 est *x* ↦ $\frac{1}{\alpha+1}$ $x^{\alpha+1}$

Ici, on a: $x \mapsto \sqrt{x} = x^{1/2}$ qui a pour primitive $x \mapsto \dfrac{1}{\frac{1}{2}+1} x^{1/2+1} = \dfrac{2}{3} x^{3/2}$

et $x \mapsto x\sqrt{x} = x^{3/2}$ qui a pour primitive x $\mapsto \dfrac{1}{\frac{3}{2}+1} x^{3/2+1} = \dfrac{2}{5} x^{5/2}$

D'autre part: $3^{3/2} = 3\sqrt{3}$ et $3^{5/2} = 9\sqrt{3}$; $2^{3/2} = 2\sqrt{2}$ et $2^{5/2} = 4\sqrt{2}$.

$$\int_2^3 \left(\frac{1}{\sqrt{x-1}}+\frac{1}{\sqrt{x+1}}\right)\mathrm{d}\,x = \left[2\times\sqrt{x-1}+2\times\sqrt{x+1}\right]_2^3 = ... = 2 + 2\sqrt{2} - 2\sqrt{3}$$

Commentaire: On sait qu'une primitive de la fonction $x \mapsto x^{\alpha}$ où $\alpha \neq -1$ est $x \mapsto \dfrac{1}{\alpha+1} x^{\alpha+1}$

et qu'une primitive de $u' u^{\alpha}$ est $\dfrac{1}{\alpha+1} u^{\alpha+1}$

Ici: $\alpha = -\dfrac{1}{2}$ et $u(x) = x - 1$ d'où $u'(x) = 1$ pour étudier $\dfrac{1}{\sqrt{x-1}}$

De même avec $\alpha = -\dfrac{1}{2}$ et $u(x) = x + 1$ d'où $u'(x) = 1$ pour étudier $\dfrac{1}{\sqrt{x+1}}$

---

22 page 187

$$A = \int_0^4 (2x^2+5x-8)\,\mathrm{d}\,x = \left[\frac{2}{3}x^3+\frac{5}{2}x^2-8x\right]_0^4 = ... = \frac{152}{3}$$

$B = \displaystyle\int_0^4 (2t^2+5t-8)\,\mathrm{d}\,t = A$ (le changement de nom de la variable d'intégration ne modifie pas le résultat)

$$C = \int_1^4 \frac{2x^3+x^2-5x+1}{x}\mathrm{d}\,x = \int_1^4 \left(2x^2+x-5+\frac{1}{x}\right)\mathrm{d}\,x = \left[\frac{2}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2-5x+\ln x\right]_1^4 = ... = \frac{69}{2} + 2\ln 2$$

$D = \displaystyle\int_3^4 \frac{2x-2}{x^2-2x}\mathrm{d}\,x =$ On pose $u(x) = x^2 - 2x$ d'où $u'(x) = 2x - 2$

On sait: $u(x) > 0$ sur [3; 4]

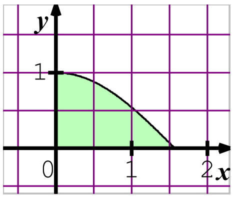
Une primitive de $\dfrac{u'}{u}$ avec $u > 0$ est $\ln \circ u$.

$$D = \int_3^4 \frac{2x-2}{x^2-2x}\mathrm{d}\,x = \left[\ln(x^2-2x)\right]_3^4 = ... = \ln \frac{8}{3} .$$

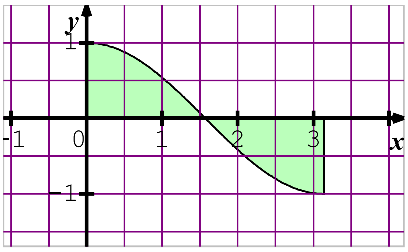
---

23 page 187

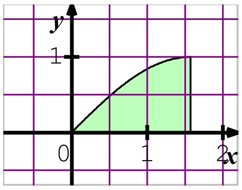
$E = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x\,\mathrm{d}\,x = \left[\sin x\right]_0^{\pi/2} = \sin \frac{\pi}{2} - \sin 0 = 1$ (Graphiquement: l'aire sous la sinusoïde vaut 1)



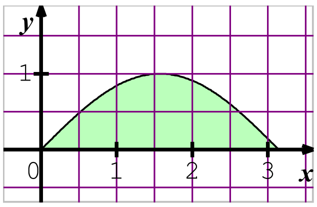
$F = \int_0^{\pi} \cos x \, \mathrm{d}x = [\sin x]_0^{\pi} = \sin \pi - \sin 0 = 0$ (Graphiquement: remarquer la symétrie)



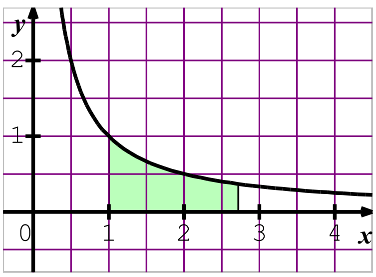
$G = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \, \mathrm{d}x = [-\cos x]_0^{\pi/2} = -\cos \frac{\pi}{2} - (-\cos 0) = 1$ (Graphiquement: l'aire sous la sinusoïde vaut 1)



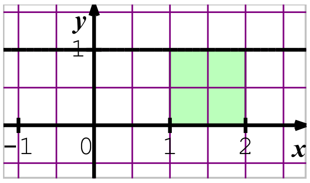
$H = \int_0^{\pi} \sin x \, \mathrm{d}x = [-\cos x]_0^{\pi} = -\cos \pi - (-\cos 0) = 2$ (Graphiquement: l'aire sous la sinusoïde vaut 1)



$M = \int_1^{\mathrm{e}} \frac{1}{x} \mathrm{d}x = [\ln x]_1^{e} = \ln \mathrm{e} - \ln 1 = 1$ (Graphiquement: l'aire sous l'hyperbole vaut 1)



$N = \int_1^{2} \mathrm{d}x = [x]_1^{2} = 2 - 1$ Graphiquement: l'aire du rectangle vaut 1



24 page 187

$$I=\int_0^{\pi}(\cos 2t+\sin t)\,dt=\left[\frac{1}{2}\sin 2t-\cos t\right]_0^{\pi}=0-(-1)-(0-1)=2$$

$$J=\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}(\sin 4t-5\cos t)\,dt=\left[\frac{1}{4}(-\cos 4t)-5\sin t\right]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}=\left(-\frac{1}{4}-0\right)-\left(-\frac{1}{4}-5\right)=5$$

$$K=\int_{\frac{-\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(\sin x\cdot\cos^3 x)\,dx=\left[\frac{-1}{4}(\cos^4 x)\right]_{\frac{-\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}=0-0=0$$

$$L=\int_0^2 e^{3t+1}\,dt=\left[\frac{1}{3}e^{3t+1}\right]_0^2=\frac{1}{3}(e^7-e)$$

28 page 188

La valeur moyenne m d'une fonction f continue sur $[a;b]$ est $m=\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$

$f:x\mapsto 2x^2+5x-8$ $\quad m_f=\frac{1}{5-2}\int_2^5(2x^2+5x-8)\,dx=\frac{1}{3}\left[\frac{2}{3}x^3+\frac{5}{2}x^2-8x\right]_2^5=\frac{71}{2}$

$g:x\mapsto -4e^{3x+2}$

$$m_g=\frac{1}{5-2}\int_2^5(-4\cdot e^{3x+2})\,dx=\frac{1}{3}\left[\frac{-4}{3}\cdot e^{3x+2}\right]_2^5=\frac{-4}{9}(e^{17}-e^8)=\frac{-4e^8}{9}(e^9-1)=\frac{-4e^8}{9}(e^3-1)(e^3+1)$$

$h:x\mapsto\frac{1}{x+2}$ $\quad m_h=\frac{1}{5-2}\int_2^5\left(\frac{1}{x+2}\right)dx=\frac{1}{3}\left[\ln(x+2)\right]_2^5=\frac{1}{3}(\ln 7-\ln 4)=\frac{1}{3}\ln\frac{7}{4}$

32 page 188

Dans la suite de l'exercice C est un réel.
Les primitives existent **sur les intervalles où la fonction est continue.**

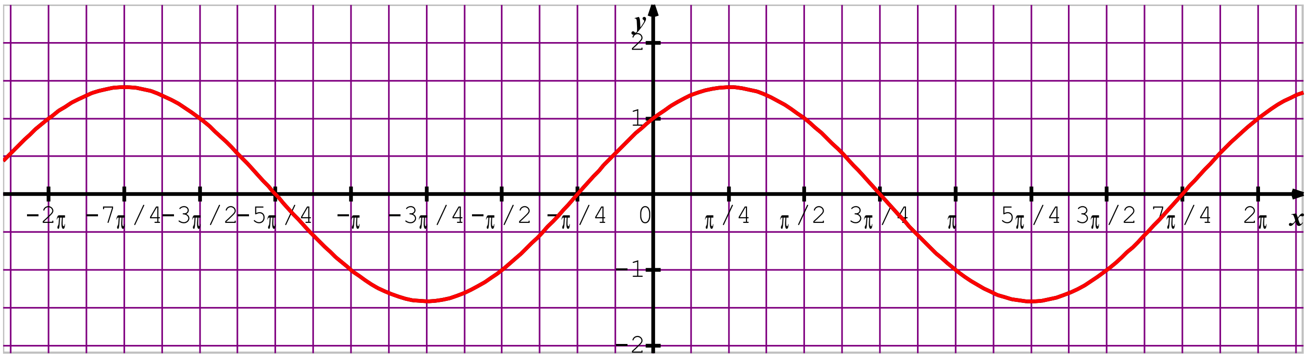
Cas où $f=\frac{u'}{u}$, une primitive $F=\ln\circ|u|$ (En pratique, il est nécessaire de déterminer les intervalles où u garde un signe constant sans s'annuler)

F) $f(x)=\frac{\sin x-\cos x}{\cos x+\sin x}$ $\quad u(x)=\cos x+\sin x$, $u'(x)=-\sin x+\cos x$, d'où, $f=-\frac{u'}{u}$ et

$F(x)=-\ln|\cos x+\sin x|+C$

Comme $\cos x+\sin x=\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$, les intervalles où $u>0$ sont $\left]-\frac{\pi}{4}+2k\pi\,,\ \frac{3\pi}{4}+2k\pi\right[$;$k\in\mathbb{Z}$

les intervalles où $u<0$ sont $\left]\frac{3\pi}{4}+2k\pi\,,\ \frac{7\pi}{4}+2k\pi\right[$;$k\in\mathbb{Z}$



G) $f(x) = \tan(2x-1) = \dfrac{\sin(2x-1)}{\cos(2x-1)}$ $u(x) = \cos(2x-1)$, $u'(x) = -2\sin(2x-1)$, d'où, $f = -\dfrac{1}{2}\dfrac{u'}{u}$ et

$F(x) = -\dfrac{1}{2}\ln|\cos(2x-1)| + C$

Les intervalles où $u > 0$ sont définis par $-\dfrac{\pi}{2} + k\pi < 2x - 1 < \dfrac{\pi}{2} + k\pi$; $k \in \mathbb{Z}$

$x \in \left]\dfrac{-\pi+2}{4} + k\dfrac{\pi}{2} ; \dfrac{\pi+2}{4} + k\dfrac{\pi}{2}\right[$; $k \in \mathbb{Z}$

Les intervalles où $u < 0$ sont définis par $\dfrac{\pi}{2} + k\pi < 2x - 1 < \dfrac{3\pi}{2} + k\pi$; $k \in \mathbb{Z}$

$x \in \left]\dfrac{\pi+2}{4} + k\dfrac{\pi}{2} ; \dfrac{3\pi+2}{4} + k\dfrac{\pi}{2}\right[$; $k \in \mathbb{Z}$

I) $f(x) = \dfrac{1}{\tan x} = \dfrac{\cos x}{\sin x}$ $u(x) = \sin x$, $u'(x) = \cos x$ d'où, $f = \dfrac{u'}{u}$ et $F(x) = \ln|\sin x| + C$

Les intervalles où $u > 0$ sont $]2k\pi ; \pi + 2k\pi[$; $k \in \mathbb{Z}$.

Les intervalles où $u < 0$ sont $]\pi + 2k\pi ; 2\pi + 2k\pi[$; $k \in \mathbb{Z}$.

P) $f(x) = \dfrac{2x}{1-x^2}$ $u(x) = 1 - x^2$ $u'(x) = -2x$ d'où $f = -\dfrac{u'}{u}$ et $F(x) = -\ln|1-x^2| + C$

$u > 0$ sur $]-1 ; 1[$ et $u < 0$ sur $]-\infty ; -1[\cup]1 ; +\infty[$

T) $f(x) = \dfrac{e^x}{1-e^x}$ $u(x) = 1 - e^x$ $u'(x) = -e^x$ d'où $f = -\dfrac{u'}{u}$ et $F(x) = -\ln|1-e^x| + C$

$= \ln\left|\dfrac{1}{1-e^x}\right| + C.$

$u > 0$ sur $]-\infty ; 0[$ et $u < 0$ sur $]0 ; +\infty[$

Cas où $f = u' u^n$ une primitive est $F = \dfrac{1}{n+1}u^{n+1}$ avec $n \neq -1$

A) $f(x) = \sin x \cos^4 x$ $u(x) = \cos x$, $u'(x) = -\sin x$, d'où, $f = -u' u^4$ et $F(x) = -\dfrac{1}{5}\cos^5 x + C.$ (sur $\mathbb{R}$)

B) $f(x) = \dfrac{\ln x}{x}$ définie et continue sur $]0 ; +\infty[$

$u(x) = \ln x$, $u'(x) = \dfrac{1}{x}$ d'où, $f = -u' u$ et $F(x) = \dfrac{1}{2}(\ln x)^2 + C$

E) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{4x+5}} = (4x+5)^{-\frac{1}{2}}$ définie et continue sur $\left]-\dfrac{5}{4} ; +\infty\right[$

$u(x) = 4x + 5$, $u'(x) = 4$ d'où, $f = \dfrac{1}{4}u' u^{-1/2}$ et $F(x) = \dfrac{1}{4}\times 2\times(4x+5)^{1/2} + C = \dfrac{1}{2}\sqrt{4x+5} + C.$

M) $f(x) = 4\sin(3x)\cos(3x)$ $u(x) = \sin(3x)$, $u'(x) = 3\cos(3x)$, d'où, $f = \dfrac{4}{3}u'u$ et

$F(x) = \frac{4}{3} \times \frac{1}{2} \sin^2(3x) + C = \frac{4}{6} \sin^2(3x) + C$

N) $f(x) = \cos x \times \sin^2 x$ $\quad u(x) = \sin x$, $u'(x) = \cos x$ $\quad$ d'où, $f = u' u^2$ et $F(x) = \frac{1}{3}\sin^3 x + C$.

R) $f(x) = (x^2 - 4)\sqrt{x^3 - 12x} = (x^3 - 12x)^{1/2}$ $\quad$ définie et continue sur $[-2\sqrt{3}\ ;\ 0]$ et sur $[2\sqrt{3}\ ;\ +\infty[$

$u(x) = x^3 - 12x$, $u'(x) = 3x^2 - 12 = 3(x^2 - 4)$ $\quad$, d'où, $f = \frac{1}{3} u' u^{1/2}$

et $F(x) = \frac{1}{3} \times \frac{2}{3} \times (x^3 - 12x)^{2/3} + C = \frac{2}{9}(x^3 - 12x)\sqrt{x^3 - 12x} + C$.

U) $f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+4}} = x(x^2 + 4)^{-1/2}$ définie et continue sur $\mathbb{R}$. $\quad u(x) = x^2 + 4$, $u'(x) = 2x$, d'où, $f = \frac{1}{2} u' u^{-1/2}$

et $F(x) = \frac{1}{2} \times 2 \times (x^2 + 4)^{1/2} + C = \sqrt{x^2+4} + C$

Cas où $f = u' e^u$ une primitive est $F = e^u$

C) $f(x) = e^{-2x+6}$ définie et continue sur $\mathbb{R}$.

$u(x) = -2x + 6$, $u'(x) = -2$, d'où, $f = -\frac{1}{2} u' e^u$ et $F(x) = -\frac{1}{2} e^{-2x+6} + C$.

K) $f(x) = \frac{1}{x^2} e^{\frac{1}{x}}$ définie et continue sur $]-\infty\ ;\ 0[$ et sur $]0\ ;\ +\infty[$

$u(x) = \frac{1}{x}$, $u'(x) = -\frac{1}{x^2}$, d'où, $f = -u' e^u$ et $F(x) = -e^{\frac{1}{x}} + C$.

L) $f(x) = 2x\, e^{x^2}$ $\quad u(x) = x^2$, $u'(x) = 2x$, $\quad$ d'où $f = u' e^u$ et $F(x) = e^{x^2} + C$.

Par intégration par parties sur un intervalle où u, v sont dérivables et u' , v' continues.
a et x étant des réels sur le "bon" intervalle, on sait:

la primitive qui s'annule en a de f est $F:\ x \mapsto \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$

Si $f = uv'$, on a alors $\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t = [u(t)v(t)]_a^x - \int_a^x u'(t)v(t)\,\mathrm{d}t$

D) $f(x) = x^2 \cos x$ (deux intégrations par parties)

$\begin{cases} u(t) = t^2 \\ v'(t) = \cos t \end{cases}$, d'où, $\begin{cases} u'(t) = 2t \\ v(t) = \sin t \end{cases}$, $f(x) = [t^2 \times \sin t]_0^x - \int_0^x 2t \times \sin t\,\mathrm{d}t = x^2.\sin x - 2\int_0^x t \times \sin t\,\mathrm{d}t$

Calcul de $\int_0^x t \times \sin t\,\mathrm{d}t$ par Ipp

$\begin{cases} u(t) = t \\ v'(t) = \sin t \end{cases}$, d'où, $\begin{cases} u'(t) = 1 \\ v(t) = -\cos t \end{cases}$

$\int_0^x t \times \sin t\,\mathrm{d}t = [t(-\cos t)]_0^x - \int_0^x (-\cos t)\,\mathrm{d}t = -x\cos x + \int_0^x \cos t\,\mathrm{d}t$

calcul de $\int_0^x \cos t\,\mathrm{d}t = [\sin t]_0^x = \sin x$

Finalement:
la primitive de f qui s'annule en 0 est: $F(x) = x^2.\sin x - 2(-x\cos x + \sin x) = x^2.\sin x + 2x\cos x - 2\sin x$

H) $f(x)=(x+1)\cdot\sin 3x$ On pose: $u(x) = x + 1$ et $v'(x) = \sin 3x$

$F(x)=(x+1)\times\frac{1}{3}(-\cos 3x)+\frac{1}{9}\sin 3x+C=\frac{\sin 3\cdot x}{9}-\frac{(x+1)\cdot\cos 3x}{3}+C$

Après transformation d'écriture

J) $f(x)=\frac{2x-1}{4x}=\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\times\frac{1}{x}$ $F(x)=\frac{1}{2}x-\frac{1}{4}\ln|x|+C$

Q) sur tout intervalle ne contenant pas -1, on a: $f(x)=\frac{x+1}{x^2-1}=\frac{1}{x-1}$ d'où, $f(x)=\ln|x-1|+C$

S) $f(x) = \cos^2 x$

On sait: $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ et $\cos^2 x - \sin^2 x = \cos(2x)$

On en déduit: $\cos^2 x = \frac{1+\cos(2x)}{2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos(2x)$

d'où, $F(x) = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2} \times \frac{1}{2}\sin(2x) + C = \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\sin(2x) + C$.

---

33 page 188

L'aire du carré est 1 unité d'aire (u.a.)

L'aire du carré en cm² est 2×2 = 4 cm²

Important:

x $\mapsto x^2$ et $x \mapsto \sqrt{x}$ sont continues sur [0; 1]

$x^2 \geqslant 0$ et $\sqrt{x} \geqslant 0$ sur [0; 1].

Ce qui permet de dire que l'intégrale de 0 à 1 de la fonction ..... est en u.a; la mesure de l'aire du domaine délimité par l'axe des ordonnées ($x = 0$), la droite d'équation $x = 1$, l'axe des abscisses ($y = 0$) et la courbe représentative de la fonction ...

a) L'aire, en u.a., sous l'arc de parabole d'équation $y = x^2$ est $A = \int_0^1 x^2\,dx = \left[\frac{1}{3}x^3\right]_0^1 = \frac{1}{3}$

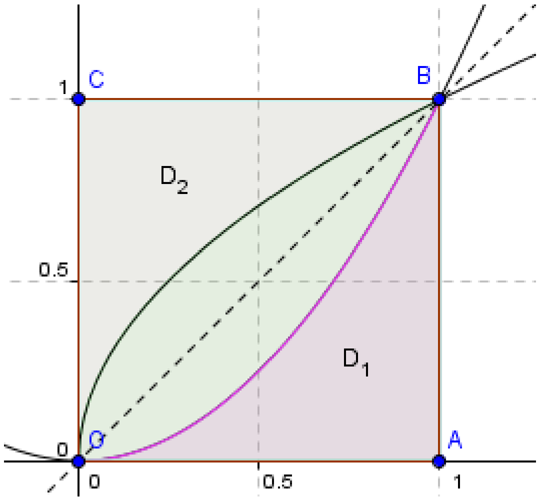
(en cm²: $\mathcal{A}_1 = A \times 4$ cm² = $\frac{4}{3}$ cm²)

b) L'aire, en u.a., sous l'arc de parabole d'équation $y = \sqrt{x}$ est $B = \int_0^1 \sqrt{x}\,dx = \left[\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\right]_0^1 = \frac{2}{3}$

(en cm²: $\mathcal{A}_2 = B \times 4$ cm² = $\frac{8}{3}$ cm²)

pour $x \in [0; 1]$, $x^2 \leqslant \sqrt{x}$, d'où, l'aire entre les deux courbes est $B-A=\frac{1}{3}$ u.a.

Ou encore



Les fonctions f: $x \mapsto x^2$ et g: $x \mapsto \sqrt{x}$ définies sur [0; +∞[sont réciproques.

Leurs représentations graphiques C_f et C_g sont symétriques dans un repère orthonormal par rapport à la droite Δ d'équation $y = x$

Preuve: Un point $M(x; y) \in C_f \Leftrightarrow \begin{cases} x \geqslant 0 \\ y = x^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y \geqslant 0 \\ x = \sqrt{y} \end{cases} \Leftrightarrow N(y; x) \in C_g$.

Dans un repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j})$, le milieu I de $[MN]$ vérifie: $x_I = y_I = \dfrac{x+y}{2}$, d'où, $I \in \Delta$

$\overrightarrow{MN} \begin{pmatrix} y-x \\ x-y \end{pmatrix} = (y-x)\ \vec{i} - \vec{j}$, d'où, $\overrightarrow{MN}$ et $\vec{i} + \vec{j}$ sont orthogonaux.

Soit s_Δ la symétrie orthogonale d'axe Δ.
L'image de l'axe des abscisses ($x = 0$) est l'axe des ordonnées.
L'image de la droite d'équation $x = 1$ est la droite d'équation $y = 1$.
Une symétrie est une isométrie.
Par la symétrie s_Δ, l'aire du domaine $D_1 = \{M(x; y) / 0 \leqslant x \leqslant 1$ et $0 \leqslant y \leqslant x^2\}$ est égale à l'aire du domaine $D_2 = \{M(x; y) / 0 \leqslant x \leqslant 1; \sqrt{x} \leqslant y \leqslant 1\}$

d'où, $\mathscr{A}(D_2) = \mathscr{A}(D_1) = \dfrac{1}{3}$ et l'aire entre les deux courbes vaut $1 - 2\times \dfrac{1}{3} = \dfrac{1}{3}$ (en u.a;)

---

35 page 188

f définie sur [–1 ; 1] par $f(x) = e^x + e^{-x}$

1) f est la somme de deux fonctions définies et dérivables sur [–1; 1]

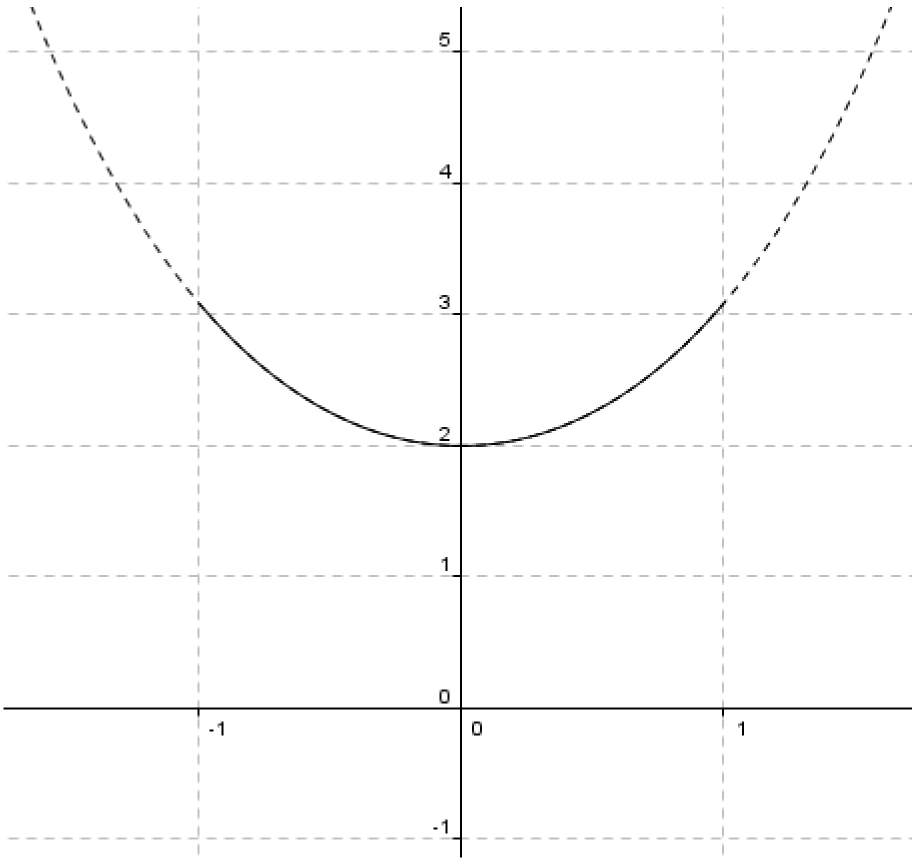
$u : x \mapsto e^x$ et v: $x \mapsto -x \mapsto e^{-x}$, d'où,

$f'(x) = e^x - e^{-x}$

$f'(x) \geqslant 0 \Leftrightarrow \begin{cases} -1 \leqslant x \leqslant 1 \\ e^x \geqslant e^{-x} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -1 \leqslant x \leqslant 1 \\ x \geqslant -x \end{cases} \Leftrightarrow 0 \leqslant x \leqslant 1$

x	–1		0		1
$f'(x)$		–	0	+	
$f(x)$	e+1/e	↘	2	↗	e+1/e

Tracé



2) Calcul d'aire:

$\mathscr{D} = \{M(x; y) \ / \ -1 \leqslant x \leqslant 1 \text{ et } 0 \leqslant y \leqslant f(x)\}$

On sait que f est continue et positive sur $[-1; 1]$, d'où, $\mathscr{A}(\mathscr{D}) = \int_{-1}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x$ *u.a.*

Une primitive de f est la fonction $F: x \mapsto \mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}$

$$\int_{-1}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x = \left[F(x)\right]_{-1}^{1} = \left(\mathrm{e} - \frac{1}{\mathrm{e}}\right) - \left(\frac{1}{\mathrm{e}} - \mathrm{e}\right) = 2\mathrm{e} - \frac{2}{\mathrm{e}}$$

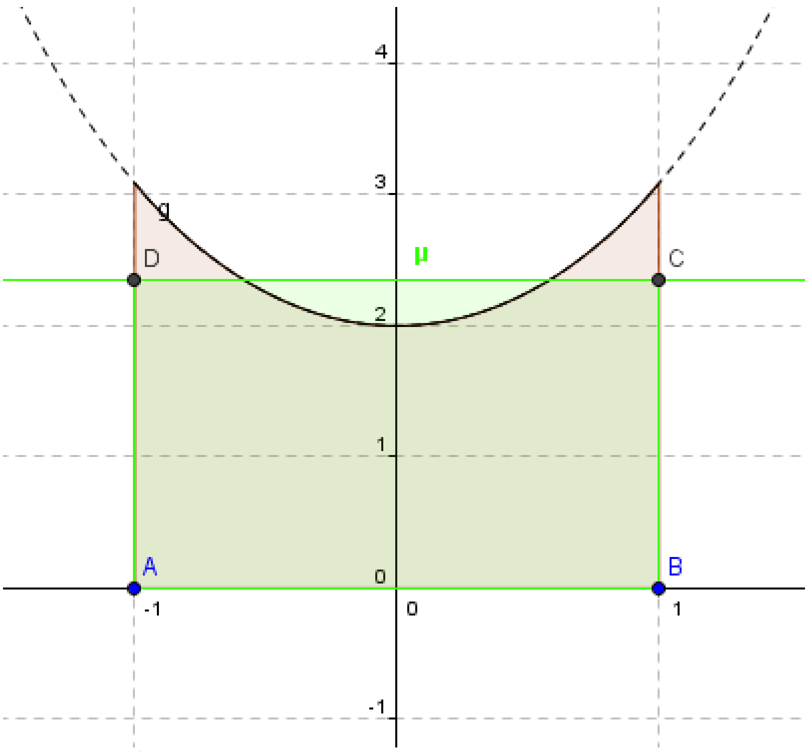
Comme $u.a = 2\times1$ cm², on obtient: $\mathscr{A}(\mathscr{D}) = \left(2\mathrm{e} - \frac{2}{\mathrm{e}}\right)\times 2$ cm²

3) Soit un rectangle de longueur 2 et de largeur l de même aire que le domaine $\mathscr{D}$.

Remarque:ambiguïté de l'énoncé. Étant donné l'interprétation demandée, la longueur 2 est en unité graphique (soit 4 cm))

$\mathscr{A}(\text{rectangle}) = 2l$ *u.a.* $= 2\mathrm{e} - \frac{2}{\mathrm{e}}$

Par conséquent, $l = \mathrm{e} - \frac{1}{\mathrm{e}}$



Ce nombre l est égale à $\frac{1}{1-(-1)}\int_{-1}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x = \mu$ valeur moyenne de la fonction f sur [–1; 1].

Complément:

la fonction $f = 2\cosh(x)$ (cosinus hyperbolique)

la dérivée de cosh est sinh (sinus hyperbolique)

Le cosinus hyperbolique est la courbe obtenue par un fil uniforme attaché aux deux extrémités soumis à son poids seul. (Voir chaînette) Voir par exemple: http://serge.mehl.free.fr/anx/catena.html

41 page 189

$v(t)=4t^2-5t+1$ (t en secondes et v en $m\cdot s^{-1}$)

Signe de $v(t): v(t)=(4t-1)(t-1)$ (second degré: racines ...)

$v(t)\geqslant 0$ sur $\left[0;\frac{1}{4}\right]$ et sur $[1;10]$, $v(t)\leqslant 0$ sur $\left[\frac{1}{4};1\right]$ d'où,

$$d=\int_0^{\frac{1}{4}}(4t^2-5t+1)dt-\int_{1/4}^{1}(4t^2-5t+1)dt+\int_1^{10}(4t^2-5t+1)dt$$

$$\left[\frac{4}{3}t^3-\frac{5}{2}t^2+t\right]_0^{\frac{1}{4}}-\left[\frac{4}{3}t^3-\frac{5}{2}t^2+t\right]_1^{\frac{1}{4}}+\left[\frac{4}{3}t^3-\frac{5}{2}t^2+t\right]_1^{10}=\frac{4}{96}+\frac{9}{32}+\frac{2187}{2}=\frac{52507}{48}$$

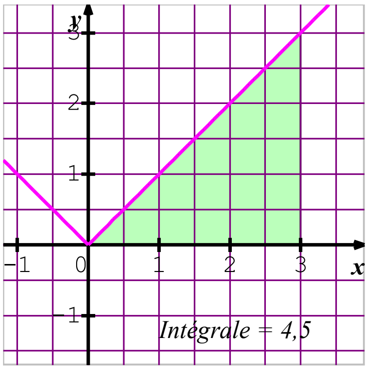
46 page 190

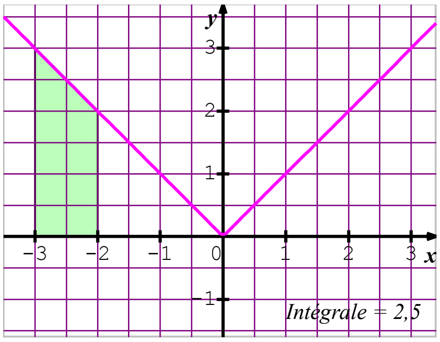
La fonction g définie par $g(x) = |x|$ est représentée par deux demi-droites d'origine O d'équations respectives

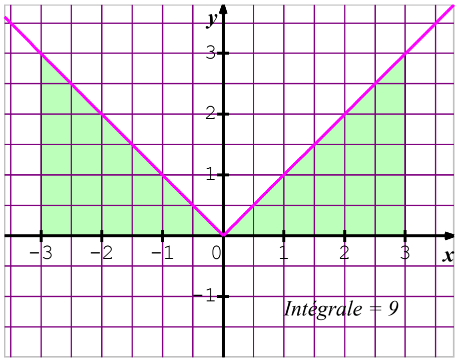
$y = x$ avec $x \geqslant 0$ et $y = -x$ avec $x \leqslant 0$.

Rappel : $g(x) = |x| = \begin{cases} x & \text{si} \quad x\geqslant 0 \\ -x & \text{si} \quad x\leq 0 \end{cases}$

Important : Comme $g(x) \geqslant 0$, les intégrales sont les mesures des aires en unités d'aires des domaines délimités par $x = a$, $x = b$ (avec $a \leqslant b$) , $y = 0$ et $y = g(x)$.



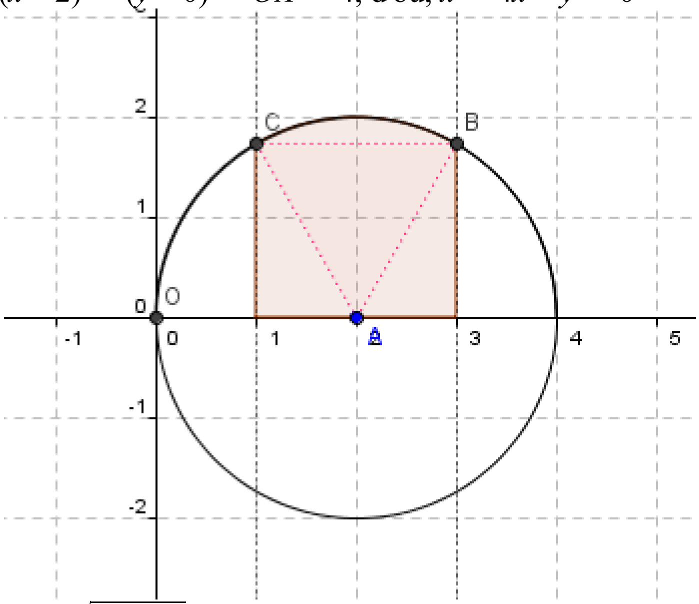




$\int_0^3 g(x)\,\mathrm{d}x = \dfrac{3\times 3}{2} = 4{,}5$ $\int_{-3}^{-2} g(x)\,\mathrm{d}x = \dfrac{(3+2)\times 1}{2} = 2{,}5$ $\int_{-3}^{3} g(x)\,\mathrm{d}x = 9$ (On peut utiliser la symétrie)

47 page 190

a) Le cercle a pour équation $(x-2)^2 + (y-0)^2 = OA^2 = 4$, d'où, $x^2 - 4x + y^2 = 0$



On en tire $y = \sqrt{4x - x^2}$ ou $y = -\sqrt{4x - x^2}$

b) Comme les ordonnées sont positives, on a: $B(3;\sqrt{3})$ et $C(1;\sqrt{3})$

$AB = AC = 2$ (rayon du cercle), $BC = 2$ car $\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix}$

donc ABC est équilatéral et $\widehat{BAC} = \dfrac{\pi}{3}$

c) La fonction $x \mapsto \sqrt{4x - x^2}$ est représentée par le demi-cercle d'ordonnée positive

$I = \int_0^4 \sqrt{4x - x^2}\,dx = 2\pi$ (aire du demi-disque de rayon 2)

Soit B' et C' les projetés orthogonaux de B et C sur $[Ox)$. Les triangles ACC' et ABB' sont deux demi-triangles équilatéraux de même aire $\dfrac{1\times\sqrt{3}}{2}$. L'aire du secteur angulaire BAC est $\dfrac{2\pi}{3}$ (L'aire d'un secteur d'angle

$\propto$ est $\frac{1}{2}\alpha r^2$ (proportionnalité)). Par conséquent $J=\int_1^3 \sqrt{4x-x^2}\,dx=\sqrt{3}+\frac{2\pi}{3}$

48 page 190

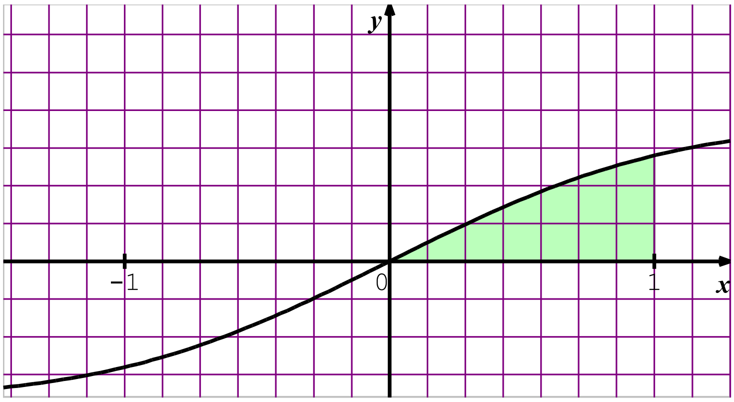
1) $f(x) = \frac{2x}{x^2+4}$ est de la forme $\frac{u'}{u}$ avec $u(x) = x^2 + 4$ et $u > 0$.

Les primitives de f sont les fonctions F définies sur ℝ par $F(x) = \ln(x^2 + 4) + C$ où $C \in$ ℝ.

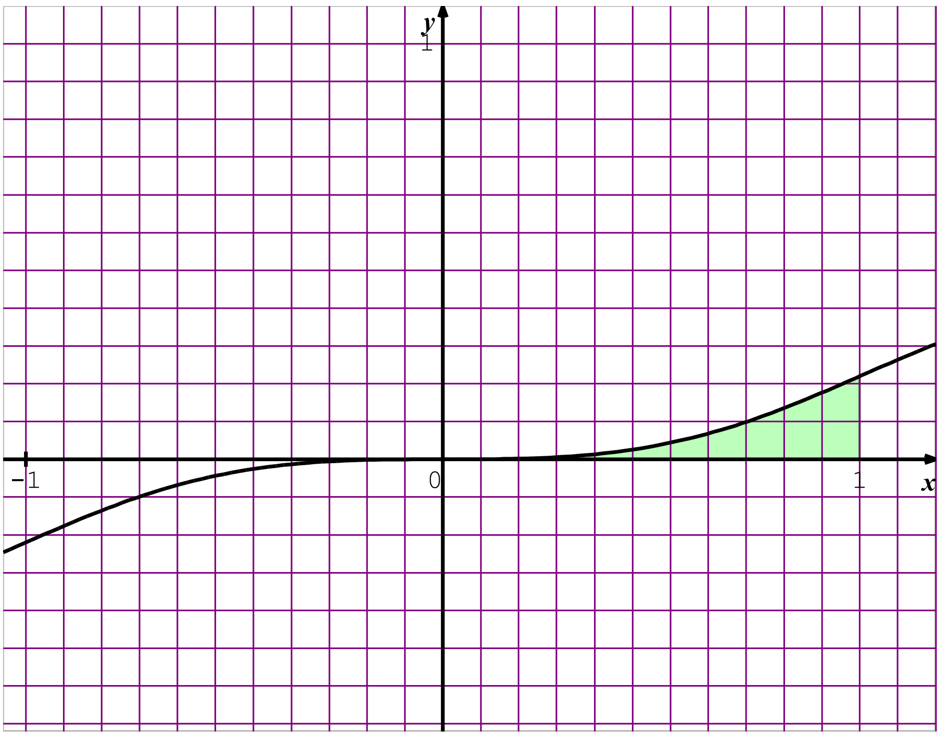
$g(x) = \frac{x^3}{x^4+4}$ est de la forme $\frac{1}{4}\frac{u'}{u}$ avec $u(x) = x^4 + 4$ et $u > 0$.

Les primitives de g sont les fonctions G définies sur ℝ par $G(x) = \frac{1}{4}\ln(x^4 + 4) + C$ où $C \in$ ℝ.

2) $I = \int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t = \left[\ln(x^2+4)\right]_0^1 = \ln 5 - \ln 4 = \ln \frac{5}{4}$



$J = \int_0^1 g(t)\,\mathrm{d}t = \left[\frac{1}{4}\ln(x^4+4)\right]_0^1 = \frac{1}{4}(\ln 5 - \ln 4) = \frac{1}{4}\ln\frac{5}{4}$



3) Les fonctions *f* et *g* étant impaires, les courbes admettent le centre du repère comme centre de symétrie.

On en déduit par symétrie centrale: $K=\int_{-1}^{0} f(t)\,\mathrm{d}t=-\int_{0}^{1} f(t)\,\mathrm{d}t=-\ln\frac{5}{4}=\ln\frac{4}{5}$ et,

$$L=\int_{-1}^{0} g(t)\,\mathrm{d}t=-\int_{0}^{1} g(t)\,\mathrm{d}t=-\frac{1}{4}\ln\frac{5}{4}=\frac{1}{4}\ln\frac{4}{5}$$

---

49 page 190

Dans les trois cas, reconnaître $\frac{u'}{u}$ (A et B) et $\frac{u'}{u^2}$ au C

$$A=\int_{-1}^{1}\frac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x+1}dx=\left[\ln(\mathrm{e}^x+1)\right]_{-1}^{1}=\ln(\mathrm{e}+1)-\ln\left(\frac{1}{\mathrm{e}}+1\right)=\ln\frac{\mathrm{e}+1}{\mathrm{e}+1}\mathrm{e}=1$$

$$B=\int_{-1}^{1}\frac{\mathrm{e}^x+1}{\mathrm{e}^x+x}dx=\left[\ln(\mathrm{e}^x+x)\right]_{-1}^{1}=\ln(\mathrm{e}+1)-\ln\left(\frac{1}{\mathrm{e}}-1\right)=\ln\left(\frac{\mathrm{e}+1}{1-\mathrm{e}}\times\mathrm{e}\right)=\ln\left(\frac{\mathrm{e}-1}{\mathrm{e}+1}\right)+1$$

$$C=\int_{-1}^{1}\frac{\mathrm{e}^x-2}{(\mathrm{e}^x-2x)^2}dx=\left[\frac{-1}{\mathrm{e}^x-2x}\right]_{-1}^{1}=\frac{-1}{\mathrm{e}-2}+\frac{1}{\frac{1}{\mathrm{e}}+2}=\frac{\mathrm{e}^2-4\mathrm{e}-1}{(\mathrm{e}-2)(1+2\mathrm{e})}$$

---

50 page 190

$$I=\int_{0}^{\frac{\pi}{6}}\frac{\sin 2x}{\cos^2 2x}dx=\left[\frac{1}{2}\times\frac{1}{\cos 2x}\right]_{0}^{\frac{\pi}{6}}=\frac{1}{2}\times 2-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$$

Pour J, remarquer $\tan x=\frac{\sin x}{\cos x}$ $J=\int_{0}^{\frac{\pi}{6}}\frac{\tan x}{\cos^2 x}dx=\int_{0}^{\frac{\pi}{6}}\frac{\sin x}{\cos^3 x}dx=\left[\frac{1}{2}\times\frac{1}{\cos^2 x}\right]_{0}^{\frac{\pi}{6}}=\frac{1}{2}\times\frac{4}{3}-\frac{1}{2}=\frac{1}{6}$

$$K=\int_{0}^{\pi}(\sin 2x+\cos 4x)dx=\left[-\frac{1}{2}\cos 2x+\frac{1}{4}\sin 4x\right]_{0}^{\pi}=-\frac{1}{2}-0-\left(-\frac{1}{2}\right)-0=0$$

---

51 page 190

$\tan x=\frac{\sin x}{\cos x}$ d'où, $\tan=\frac{-u'}{u}$ avec $u=\cos$ (attention au signe de $\cos x$) et $\tan'(x)=1+\tan^2 x$

a) $A=\int_{0}^{\frac{\pi}{4}}\tan x\,dx=\int_{0}^{\frac{\pi}{4}}\frac{\sin x}{\cos x}dx=\left[-\ln(\cos x)\right]_{0}^{\frac{\pi}{4}}=\left[\ln\left(\frac{1}{\cos x}\right)\right]_{0}^{\frac{\pi}{4}}=\ln\sqrt{2}=\frac{\ln 2}{2}$

$$B=\int_{0}^{\frac{\pi}{4}}\tan^2 x\,dx=\int_{0}^{\frac{\pi}{4}}(\tan^2 x+1-1)\,dx=\left[\tan x-x\right]_{0}^{\frac{\pi}{4}}=1-\frac{\pi}{4}=\frac{4-\pi}{4}$$

$$C=\int_{0}^{\frac{\pi}{4}}(\tan x+\tan^3 x)\,dx=\int_{0}^{\frac{\pi}{4}}\tan x(\tan^2 x+1)\,dx=\left[\frac{1}{2}\tan^2 x\right]_{0}^{\frac{\pi}{4}}=\frac{1}{2}$$

$$D=\int_{0}^{\frac{\pi}{4}}\tan^3 x\,dx\qquad D=C-A=\frac{1-\ln 2}{2}$$

60 page 190

h est définie si et seulement si $1-x^2\geqslant 0$. $\mathbb{D}_h=[-1;1]$

Si $x\in\mathbb{D}_h$ alors $-x\in\mathbb{D}_h$ et $h(-x)=-h(x)$. *h* est impaire et C_h est symétrique par rapport à l'origine du repère.

En posant $u(x)=1-x^2$, on a *h* est de la forme $\frac{-1}{2}u'u^{\frac{1}{2}}$ et une primitive de *h* est

$H:x\mapsto\frac{-1}{2}\times\frac{2}{3}(1-x^2)^{\frac{3}{2}}$ $\int_0^1 h(x)\,dx=H(1)-H(0)=\frac{1}{3}$

Comme *h* est impaire, $\int_{-1}^1 h(x)dx=0$

61 page 191

$u(x)=\sqrt{1+\cos^2 x}$

Pour tout *x* réel, $0\leqslant\cos^2 x\leqslant 1$, d'où, $1\leqslant u(x)\leqslant\sqrt{2}$ et $\frac{1}{\sqrt{2}}\leqslant\frac{1}{u(t)}\leqslant 1$

$\int_0^\pi\frac{1}{\sqrt{2}}dt\leqslant\int_0^\pi\frac{1}{u(t)}dt\leqslant\int_0^\pi 1\,dt$ $\frac{1}{\sqrt{2}}\pi\leqslant\int_0^\pi\frac{1}{u(t)}dt\leqslant\pi$

62 page 191

(erreur dans le livre au 2), $x\geqslant 1$)

1) $t\geqslant 1$ implique $t^2\geqslant 1$, d'où, en ajoutant t^2 à chaque membre $2t^2\geqslant 1+t^2$. D'autre part $t^2+1\geqslant t^2$

On a donc l'encadrement : $t^2\leqslant t^2+1\leqslant 2t^2$ et comme $\sqrt{\ }$ est strictement croissante sur $[0;+\infty[$, on a:

$\sqrt{t^2}\leqslant\sqrt{t^2+1}\leqslant t\sqrt{2}$

2) Sur $[1;+\infty[$, on a: $\frac{1}{t\sqrt{2}}\leqslant\frac{1}{\sqrt{t^2+1}}\leqslant\frac{1}{t}$. D'où $\int_x^{2x}\frac{1}{\sqrt{2}}\times\frac{1}{t}dt\leqslant\int_x^{2x}\frac{1}{\sqrt{t^2+1}}dt\leqslant\int_x^{2x}\frac{1}{t}dt$

Remarquer: $\ln(2x)-\ln x=\ln\frac{2x}{x}=\ln 2$ $\frac{\ln 2}{\sqrt{2}}\leqslant\int_x^{2x}\frac{1}{\sqrt{t^2+1}}dt\leqslant\ln 2\quad(x\geqslant 1)$

63 page 191

Conditions pour I.p.p. : u, v dérivables sur [a;b] et u', v' continues sur [a;b])

a) $I_a=\int_0^1 x\cdot\mathrm{e}^{-x}dx=\left[x(-\mathrm{e}^{-x})\right]_0^1-\int_0^1-\mathrm{e}^{-x}dx=-\mathrm{e}^{-1}-\left[\mathrm{e}^{-1}\right]_0^1=-\mathrm{e}^{-1}-\mathrm{e}^{-1}+1=1-\frac{2}{\mathrm{e}}=\frac{2-\mathrm{e}}{\mathrm{e}}$

b) $I_b=\int_0^1(x-3)\cdot\mathrm{e}^{\frac{-x}{2}}dx=\left[(x-3)(-2\,\mathrm{e}^{\frac{-x}{2}})\right]_0^1-\int_0^1-2\,\mathrm{e}^{\frac{-x}{2}}dx=$

$4\,\mathrm{e}^{\frac{-1}{2}}-6+2\left[2\,\mathrm{e}^{\frac{-x}{2}}\right]_0^1=4\,\mathrm{e}^{\frac{-1}{2}}-6-4\,\mathrm{e}^{\frac{-1}{2}}+4=-2$

c) $I_c=\int_0^1(2\mathrm{x}+1)\cdot\mathrm{e}^{\mathrm{x}}dx=\left[(2\mathrm{x}+1)(\mathrm{e}^{\mathrm{x}})\right]_0^1-\int_0^1 2\,\mathrm{e}^{\mathrm{x}}dx=3e-1-2[\mathrm{e}^x]_0^1=3e-1-2e+2=\mathrm{e}+1$

d) $I_d=\int_0^1(2\mathrm{x}^2-x+1)\cdot\mathrm{e}^{\mathrm{x}}dx=\left[(2\mathrm{x}^2-x+1)(\mathrm{e}^{\mathrm{x}})\right]_0^1-\int_0^1(4\mathrm{x}-1)\mathrm{e}^{\mathrm{x}}dx=$

$2\,\mathrm{e}-1-J$ avec $J=\int_0^1(4\mathrm{x}-1)\mathrm{e}^{\mathrm{x}}dx$

$J = \int_0^1 (4x-1)\cdot e^x\,dx = \left[(4x-1)(e^x)\right]_0^1 - \int_0^1 4e^x\,dx = 3e+1-4[e^x]_0^1 = 3e+1-4e+4$

$I_d = 2e-1-(-e+5) = 3e-6$

---

64 page 191

$A = \int_0^{\pi} e^{-t}\sin 2t\,dt = [\sin 2t(-e^{-t})]_0^{\pi} - \int_0^{\pi} -e^{-t}2\cos 2t\,dt = 2B$

$B = \int_0^{\pi} e^{-t}\cos 2t\,dt = \left[\cos 2t(-e^{-t})\right]_0^{\pi} - \int_0^{\pi} -e^{-t}(-2\sin 2t)dt = -e^{-\pi}+1-2A$

On en tire: $5B = 1-e^{-\pi}$. $B = \dfrac{1-e^{-\pi}}{5}$ et $A = \dfrac{2(1-e^{-\pi})}{5}$

---

65 page 191

$I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} (2x+1)\cos^2 x\,\mathrm{d}x$ et $J = \int_0^{\frac{\pi}{4}} (2x+1)\sin^2 x\,\mathrm{d}x$

$I+J = \int_0^{\frac{\pi}{4}} (2x+1)(\cos^2 x+\sin^2 x)\,\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\pi}{4}} (2x+1)\,\mathrm{d}x$ (d'après linéarité de l'intégrale et $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$)

$I-J = \int_0^{\frac{\pi}{4}} (2x+1)(\cos^2 x-\sin^2 x)\,\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\pi}{4}} (2x+1)\cos 2x\,\mathrm{d}x$ (d'après linéarité de l'intégrale et $\cos^2 x - \sin^2 x = \cos 2x$)

$I+J = \left[x^2+x\right]_0^{\frac{\pi}{4}} = \dfrac{\pi^2}{16} + \dfrac{\pi}{4}$

$I-J = \left[(2x+1)\dfrac{1}{2}\sin 2x\right]_0^{\frac{\pi}{4}} - \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin 2x\,\mathrm{d}x$ (par Ipp)

$I-J = \dfrac{\pi}{4} + \dfrac{1}{2} + \left[\dfrac{1}{2}\cos 2x\right]_0^{\frac{\pi}{4}} = \dfrac{\pi}{4}$

On a en faisant la somme des précédentes: $2I = \dfrac{\pi^2}{16} + \dfrac{\pi}{2}$ d'où $I = \dfrac{\pi^2}{32} + \dfrac{\pi}{4}$

et en faisant leur différence: $2J = \dfrac{\pi^2}{16}$ d'où $J = \dfrac{\pi^2}{32}$

---

66 page 191

Dérivée de $v: x \mapsto \ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)$ est $v': x \mapsto \dfrac{\dfrac{-1}{x^2}}{1+\dfrac{1}{x}} = \dfrac{-1}{x(x+1)}$

Il est intéressant de choisir comme primitive de $u': x \mapsto 1$, la fonction $u: x \mapsto x+1$ afin d'obtenir rapidement une simplification de uv' dans l'I.p.p.

$$\int_1^e \ln(1+\frac{1}{x})\,dx = \left[(x+1)\ln(1+\frac{1}{x})\right]_1^e - \int_1^e (x+1)\times\frac{-1}{x(x+1)}\,dx = (e+1)\ln\left(1+\frac{1}{e}\right)-2\ln 2+\int_1^e \frac{1}{x}\,dx$$

$$= (e+1)\ln\left(\frac{e+1}{e}\right)-2\ln 2+\ln e-\ln 1=(e+1)\ln(e+1)-(e+1)-2\ln 2+1=(e+1)\ln(1+e)-e-2\ln 2$$

---

68 page 191

$I = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\cos^2 x}\,\mathrm{d}x$ $\qquad J = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\cos^4 x}\,\mathrm{d}x$

1a) La dérivée de la fonction tangente est $x \mapsto \dfrac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$ sur $\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$

b) On en déduit $I = [\tan x]_0^{pi/4} = 1$

2 a) $f : x \mapsto \dfrac{\sin x}{\cos^3 x}$ sur $\left[0;\frac{\pi}{4}\right]$.

f est de la forme $\dfrac{u}{v}$ avec u et v dérivables sur $\left[0;\frac{\pi}{4}\right]$ et v ne s'annule pas sur $\left[0;\frac{\pi}{4}\right]$

$f'(x) = \dfrac{\cos x\times\cos^3 x - 3\times(-\sin x)\times\cos^2 x\times\sin x}{(\cos^3 x)^2} = \dfrac{\cos^2 x+3\times\sin^2 x}{\cos^4 x}$

Or, $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$, d'où, $f'(x) = \dfrac{-2\cos^2 x+3}{\cos^4 x} = \dfrac{-2}{\cos^2 x} + \dfrac{3}{\cos^4 x}$

b) $3J - 2I = 3\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\cos^4 x}\,\mathrm{d}x - 2\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\cos^2 x}\,\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{3}{\cos^4 x}-\frac{2}{\cos^2 x}\,\mathrm{d}x$ (Linéarité de l'intégrale)

$3J - 2I = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} f'(x)\,\mathrm{d}x = [f(x)]_0^{pi/4} = f(\frac{\pi}{4}) - f(0)$

$f(\frac{\pi}{4}) = 2$ et $f(0) = 0$

Finalement: $3J - 2I = 2$ et comme $I = 1$, $J = \dfrac{4}{3}$

---

69 page 191

g est définie sur $]1 ; +\infty[$ par $g(x) = \dfrac{x^3}{(x-1)^2}$

1) $x + 2 + \dfrac{3}{x-1} + \dfrac{1}{(x-1)^2} = \dfrac{(x+2)(x-1)^2+3(x-1)+1}{(x-1)^2} = ... = \dfrac{x^3}{(x-1)^2}$

Comme $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{3}{x-1} = 0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{(x-1)^2} = 0$, $\lim\limits_{x\to+\infty} (g(x) - (x+2)) = 0$

La droite d'équation $y = x + 2$ est asymptote à C_g dans un repère $(O;\vec{i},\vec{j})$.

Comme $\lim\limits_{\substack{x\to1\\x>1}} (x-1)^2 = 0$ avec $(x-1)^2 > 0$, et, $\lim\limits_{\substack{x\to1\\x>1}} x^3 = 1$, $\lim\limits_{\substack{x\to1\\x>1}} \dfrac{x^3}{(x-1)^2} = +\infty$.

La droite d'équation $x = 1$ est asymptote à C_g dans un repère $(O;\vec{i},\vec{j})$.

2) Comme $x > 1$, on a : $\dfrac{3}{x-1} > 0$ et $\dfrac{1}{(x-1)^2} > 0$.

L'aire de la surface limitée par la courbe e g, les droites d'équations $y = x + 2$, $x = 4$, $x = a$ ($a > 4$) est égale à :

$$\mathcal{A}(a) = \int_4^a (g(x)-(x+2))\,\mathrm{d}x = \int_4^a \frac{3}{x-1}+\frac{1}{(x-1)^2}\,\mathrm{d}x$$

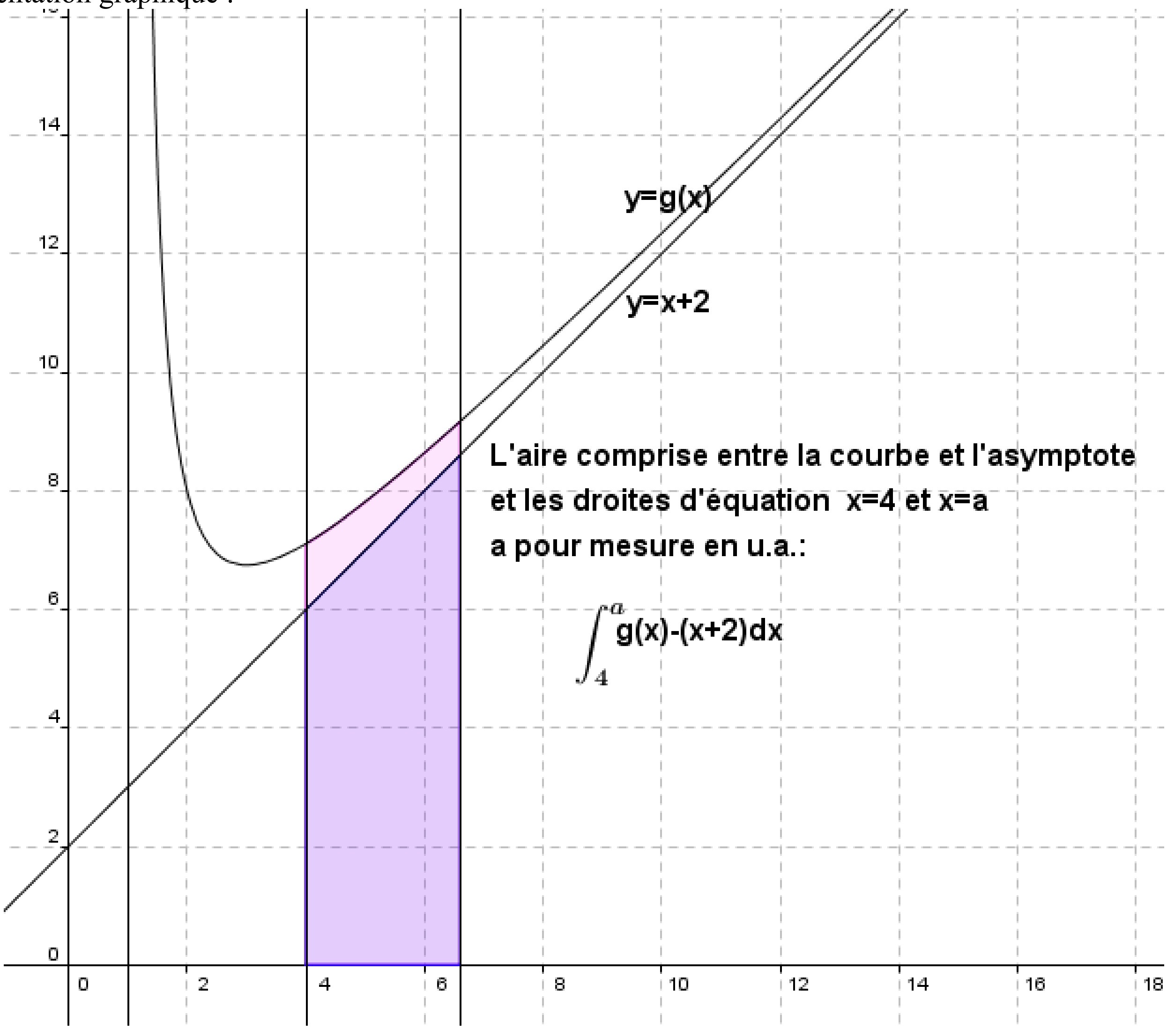
$$= \left[3\times\ln(x-1)-\frac{1}{x-1}\right]_4^a = 3\ln(a-1) - \frac{1}{a-1} - 3\ln 3 + \frac{1}{3} \text{ en } u.a.$$

3) $\lim\limits_{a\to+\infty} a-1 = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln x = +\infty$, d'où, $\lim\limits_{a\to+\infty} 3\ln(a-1) = +\infty$.

$\lim\limits_{a\to+\infty} \dfrac{1}{a-1} = 0$

Conclusion : $\lim\limits_{a\to+\infty} \mathcal{A}(a) = +\infty$.

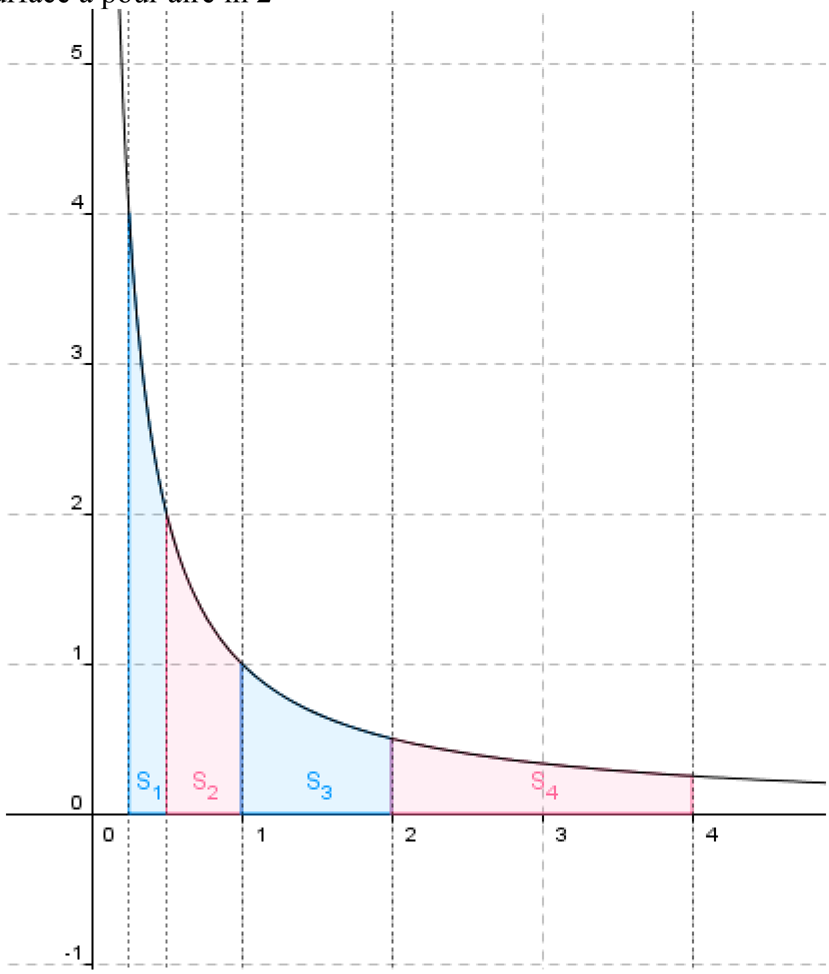
Représentation graphique :



70 page 191

1) $n \in \mathbb{N}^*$ $\displaystyle\int_{2^n}^{2^{n+1}} \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t = [\ln t]_{2^n}^{2^{n+1}} = \ln(2^{n+1}) - \ln(2^n) = (n+1)\ln 2 - n\ln 2 = \ln 2$ (ou encore $\ln \dfrac{2^{n+1}}{2^n} = \ln 2$)

2) D'après 1), chaque surface a pour aire ln 2



D'après 1)

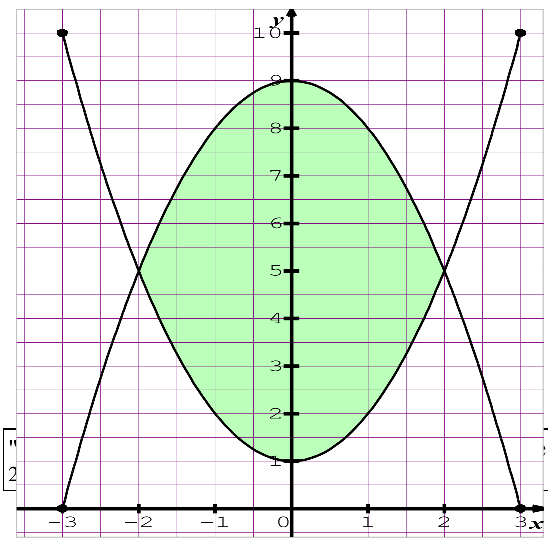
$S_3 = \int_{2^0}^{2^1} \frac{1}{t}\,\mathrm{d}\,t = S_4 = \int_{2^1}^{2^2} \frac{1}{t}\,\mathrm{d}\,t$ = ln 2 d'après ce qui précède.

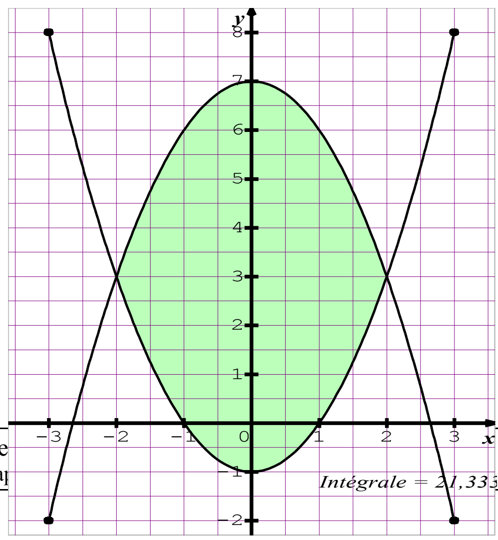
$S_1 = \int_{\frac{1}{4}}^{\frac{1}{2}} \frac{1}{t}\,\mathrm{d}\,t = \ln(1/2) - \ln(1/4) = -\ln 2 + \ln 4 = S_4$

$S_2 = \int_{\frac{1}{2}}^{1} \frac{1}{t}\,\mathrm{d}\,t = \ln 1 - \ln 1/2 = \ln 2$

---

71 page 191





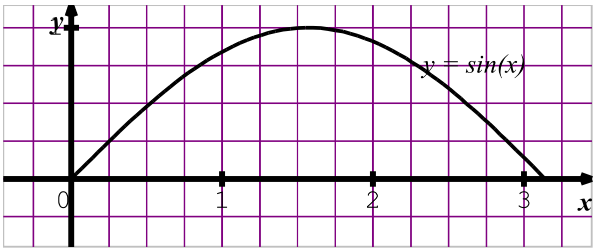
$y=x^2+1$ et $y=9-x^2$ $y=x^2-1$ et $y=7-x^2$

1) a) $f: x \mapsto x^2+1$ est strictement décroissante sur $[-3;0]$ et strictement croissante sur $[0;3]$
$g: x \mapsto 9-x^2$ est strictement croissante sur $[-3;0]$ et strictement décroissante sur $[0;3]$
b) Sur $[-2;2]$, $9-x^2-(x^2+1)=8-2x^2=2(2-x)(2+x)$ est positif, d'où, l'aire du domaine S défini par $S=\{M(x;y)\ /\ -2 \leqslant x \leqslant 2 \text{ et } x^2+1 \leqslant y \leqslant 9-x^2\}$ est
$$\int_{-2}^{2}((9-x^2)-(x^2+1))dx = \int_{-2}^{2}(8-2x^2)dx = \left[8x-\frac{2}{3}x^3\right]_{-2}^{2} = \frac{64}{3} \text{ u.a.}$$
2) Conservation des aires après translation.

83 page 193

Dans un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$, on fait tourner l'arc de sinusoïde définie par $\begin{cases} 0 \leqslant x \leqslant \pi \\ y=\sin(x) \end{cases}$ autour de l'axe des abscisses ($x'x$). On obtient ainsi un solide de révolution.

Soit $0 \leqslant x \leqslant \pi$.



Un plan perpendiculaire à l'axe des abscisses (ou encore parallèle au plan (yOz)) coupe la sinusoïde suivant un cercle de rayon $|f(x)|$ d'aire $S(x) = \pi\,(f(x))^2 = \pi\,(\sin(x))^2$

D'où, $V = \int_0^{\pi} \pi(\sin(x))^2 \mathrm{d}x \quad \pi \int_0^{\pi}(\sin(x))^2 \mathrm{d}x$ *u.v.*

Or; $\begin{cases} \sin^2 x+\cos^2 x=1 \\ \cos^2 x-\sin^2 x=\cos(2x) \end{cases}$, d'où, $\sin^2 x = \frac{1}{2}(1-\cos(2x))$

Finalement: $V = \frac{\pi}{2}\left[x-\frac{1}{2}\sin(2x)\right]_0^{\pi} = \frac{\pi^2}{2}$ *u.v.*

Autre méthode pour le calcul de $I = \int_0^{\pi}(\sin(x))^2 \mathrm{d}x$

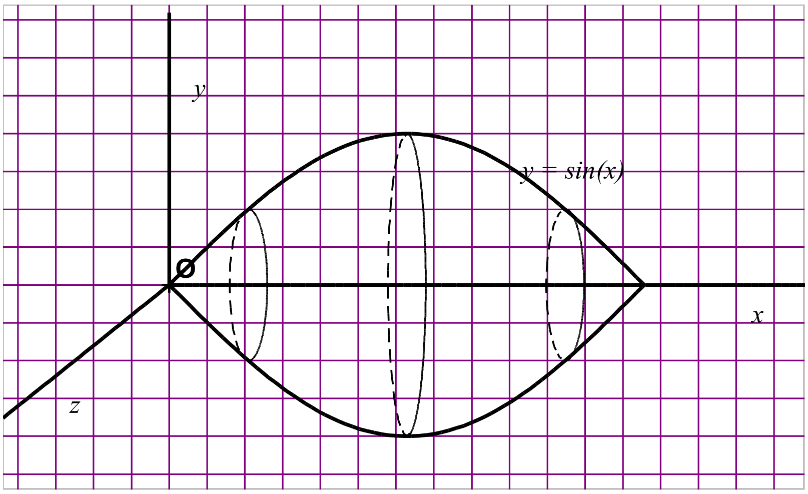
On pose : $\begin{cases} u(x)=\sin x \\ v'(x)=\sin x \end{cases}$, d'où, $\begin{cases} u'(x)=\cos x \\ v(x)=-\cos x \end{cases}$.

Par intégration par parties :

$$I = \int_0^{\pi}(\sin(x))^2 \mathrm{d}x = [\sin x \times (-\cos x)]_0^{\pi} - \int_0^{\pi}\cos x \times (-\cos x)\,\mathrm{d}x$$

$I = 0 + \int_0^{\pi} \cos^2 x \, \mathrm{d}x = \int_0^{\pi} (1 - \sin^2 x) \, \mathrm{d}x = \int_0^{\pi} 1 \, \mathrm{d}x - \int_0^{\pi} \sin^2 x \, \mathrm{d}x$ (linéarité de l'intégrale)

$I = \pi - I$, d'où, $I = \frac{\pi}{2}$.



---

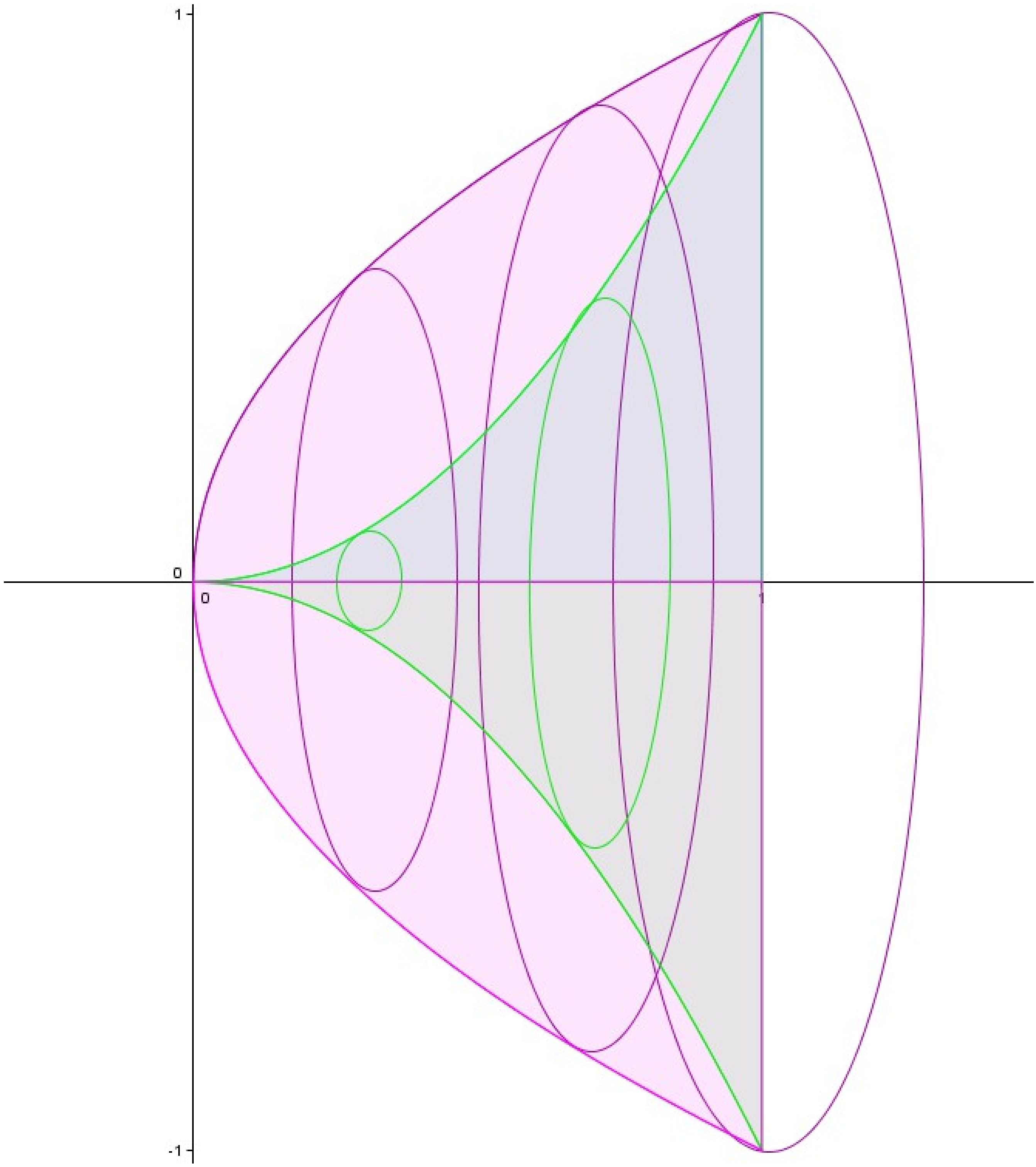
84 page 193

Sur [0; 1], on sait que $x^2 \leqslant \sqrt{x}$

Le volume $\mathcal{V}$ du solide engendré **par la rotation de la surface comprise entre les deux courbes** est obtenu par la différence des volumes de deux solides, celui $\mathcal{V}_1$ engendré par la courbe d'équation $y = \sqrt{x}$ et celui $\mathcal{V}_2$ engendré par la courbe d'équation $y = x^2$.

Un plan perpendiculaire à l'axe $(x'x)$ d'équation $x = a$ avec $0 \leqslant a \leqslant 1$ coupe chacun des solides selon des disques de rayons respectifs $(\sqrt{a})^2 = a$ et $(a^2)^2 = a^4$, d'où,

$$\mathcal{V} = \mathcal{V}_1 - \mathcal{V}_2 = \int_0^1 \pi\, x \,\mathrm{d}\,x - \int_0^1 \pi\, x^4 \mathrm{d}\,x = \pi \left(\left[\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{5}x^5 \right]_0^1 \right) = \pi(\frac{1}{2} - \frac{1}{5}) = \frac{3\pi}{10} \; u.v.$$



88 page 193

$u_n = \int_1^2 \mathrm{e}^{-nt^2} \mathrm{d}\,t \qquad n \in \mathbb{N}^*$

a) $t \geqslant 1$ implique $t^2 \geqslant t$, puis, $-t^2 \leqslant -t$.

Comme n est un entier strictement positif, on en déduit: $-nt^2 \leqslant -nt$
Comme la fonction exp est strictement croissante sur ℝ, on a: $e^{-nt^2} \leqslant e^{-nt}$
Or pour tout x réel, $e^x > 0$
Finalement: si $t \geqslant 1$, $0 \leqslant e^{-nt^2} \leqslant e^{-nt}$
b)

Rappel de la propriété utile:
Si sur $[a;b]$, $f(x) \leqslant g(x)$ alors $\int_a^b f(x)\,dx \leqslant \int_a^b g(x)\,dx$

On a donc: $\int_1^2 0\,dt \leqslant \int_1^2 e^{-nt^2}\,dt \leqslant \int_1^2 e^{-nt}\,dt$, soit, en remarquant qu'une primitive de la fonction $t \mapsto e^{-nt}$ est $t \mapsto -\frac{1}{n}\times e^{-nt}$

$$0 \leqslant u_n \leqslant \left[-\frac{1}{n}\times e^{-nt}\right]_1^2$$

Conclusion: $0 \leqslant u_n \leqslant \frac{-e^{-2n}-(-e^{-n})}{n}$

$$0 \leqslant u_n \leqslant \frac{e^{-n}-e^{-2n}}{n}$$

c) Lorsque n tend vers $+\infty$, $-n$ tend vers $-\infty$ et (e^{-n}) tend vers 0.
De même, (e^{-2n}) tend vers 0 en $+\infty$ ainsi que $\left(\frac{1}{n}\right)$
D'après le théorème des gendarmes, la suite (u_n) converge vers 0.

---

89 page 194

La (v_n) est définie pour $n \in \mathbb{N}$ par $\int_0^n x^2.e^{-x}\,dx$

1) $v_{n+1} - v_n = \int_0^{n+1} x^2.e^{-x}\,dx - \int_0^n x^2.e^{-x}\,dx = \int_n^{n+1} x^2.e^{-x}\,dx$ (Relation de Chasles)

Or, $x^2.e^{-x} > 0$, donc, $v_{n+1} - v_n > 0$ (Positivité de l'intégrale)
La suite (v_n) est donc strictement croissante.

2) On pose $\begin{cases} u(x) = x^2 \\ v'(x) = e^{-x} \end{cases}$, d'où, $\begin{cases} u'(x) = 2x \\ v(x) = -e^{-x} \end{cases}$

Les conditions pour une Ipp sont vérifiées (fonctions dérivables), d'où,

$$v_n = \left[x^2.(-e^{-x})\right]_0^n - \int_0^n 2x.(-e^{-x})\,dx = -n^2.e^{-n} + 2\int_0^n x.e^{-x}\,dx$$

Posons $u_n = \int_0^n x.e^{-x}\,dx$

Une nouvelle Ipp mène à:

$$u_n = \left[x.(-e^{-x})\right]_0^n - \int_0^n 1.(-e^{-x})\,dx = -n.e^{-n} + \left[-e^{-x}\right]_0^n = -n.e^{-n} - e^{-n} + 1$$

Finalement: $v_n = -n^2.e^{-n} - 2n.e^{-n} - 2e^{-n} + 2$

3) (v_n) converge vers 2 (croissances comparées, on a: $\lim_{n\to+\infty} \frac{e^n}{n^\alpha} = +\infty$, d'où, l'inverse converge vers 0)

---

92 page 194

$I_n = \dfrac{1}{2^{n+1}} \displaystyle\int_{\pi}^{4n\pi} x\cos\frac{x}{2}\,\mathrm{d}x$

1) $I_0 = \dfrac{1}{2} \displaystyle\int_{\pi}^{0} x\cos\frac{x}{2}\,\mathrm{d}x$

On pose $u(x) = x$, $v'(x) = \cos \dfrac{x}{2}$, d'où, $u'(x) = 1$, $v(x) = 2 \sin \dfrac{x}{2}$

Les fonctions u, v sont dérivables et leurs dérivées u' et v' sont continues sur $\mathbb{R}$, d'où, par intégration par parties,

$$\int_{\pi}^{0} x\cos\frac{x}{2}\,\mathrm{d}x = \left[x\times2\times\sin\frac{x}{2}\right]_{\pi}^{0} - \int_{\pi}^{0} 1\times2\times\sin\frac{x}{2}\,\mathrm{d}x = 0 - 2\pi - 2\left[-2\cos\frac{x}{2}\right]_{\pi}^{0} = -2\pi + 4$$

Conclusion: $I_0 = \dfrac{1}{2} \displaystyle\int_{\pi}^{0} x\cos\frac{x}{2}\,\mathrm{d}x = \dfrac{1}{2}(4 - 2\pi) = 2 - \pi$

2) $I_{n+1} = \dfrac{1}{2^{n+2}} \displaystyle\int_{\pi}^{4(n+1)\pi} x\cos\frac{x}{2}\,\mathrm{d}x$

$$\frac{1}{2^{n+2}} = \frac{1}{2}\times\frac{1}{2^{n+1}} \text{ et } \int_{\pi}^{4(n+1)\pi} x\cos\frac{x}{2}\,\mathrm{d}x = \int_{\pi}^{4n\pi} x\cos\frac{x}{2}\,\mathrm{d}x + \int_{4n\pi}^{4(n+1)\pi} x\cos\frac{x}{2}\,\mathrm{d}x \qquad \text{(Relation de Chasles).}$$

$$I_{n+1} = \frac{1}{2^{n+2}} \int_{\pi}^{4(n+1)\pi} x\cos\frac{x}{2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\left(I_n + \frac{1}{2^{n+1}} \int_{4n\pi}^{4(n+1)\pi} x\cos\frac{x}{2}\,\mathrm{d}x\right)$$

Par intégration par parties comme pour I_0), on a:

$$\int_{4n\pi}^{4(n+1)\pi} x\cos\frac{x}{2}\,\mathrm{d}x = \left[x\times2\times\sin\frac{x}{2}\right]_{4n\pi}^{4(n+1)\pi} + 4\left[\cos\frac{x}{2}\right]_{4n\pi}^{4(n+1)\pi}$$

Or, $\sin(2(n+1)\pi) = 0$, $\sin 2n\pi = 0$, $\cos(2(n+1)\pi) = 1$, $\cos 2n\pi = 1$

$$\int_{4n\pi}^{4(n+1)\pi} x\cos\frac{x}{2}\,\mathrm{d}x = 0 - 0 + 4(1 - 1) = 0$$

Conclusion: $I_{n+1} = \dfrac{1}{2} I_n$

Ce qui prouve que la suite (I_n) est une suite géométrique de raison $\dfrac{1}{2}$.

3) $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{k=n} I_k$ est la somme de $(n + 1)$ termes d'une suite géométrique de raison $\dfrac{1}{2}$, d'où,

$$S_n = I_0 \times \frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{1-\frac{1}{2}} = 2(2 - \pi)\left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right)$$

Comme $0 < \dfrac{1}{2} < 1$, la suite $\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n+1}$ converge vers 0.

Conclusion: La suite (S_n) converge vers $4 - 2\pi$.

93 page 194

$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x^n.\sin(x)\,\mathrm{d}x$ $\qquad J_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x^n.\cos(x)\,\mathrm{d}x$ $\quad n\in\mathbb{N}$ et $n>0$

a) $I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x.\sin(x)\,\mathrm{d}x = [x\times(-\cos(x))]_0^{\pi/2} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} (-\cos(x))\,\mathrm{d}x = 0 + [\sin(x)]_0^{\pi/2} = 1$

$J_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x.\cos(x)\,\mathrm{d}x = [x\times\sin(x)]_0^{\pi/2} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(x)\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2} - 0 - [-\cos(x)]_0^{\pi/2} = \frac{\pi}{2} - 1$

$I_2 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2.\sin(x)\,\mathrm{d}x = [x^2\times(-\cos(x))]_0^{\pi/2} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2x\times(-\cos(x))\,\mathrm{d}x = 0 + 2\ J_1 = \pi - 2$

$J_2 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2.\cos(x)\,\mathrm{d}x = [x^2\times\sin(x)]_0^{\pi/2} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2x\times\sin(x)\,\mathrm{d}x = \left(\frac{\pi}{2}\right)^2 - 0 - 2\ I_1 = \frac{\pi^2}{4} - 2$

b)

$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x^n.\sin(x)\,\mathrm{d}x = [x^n\times(-\cos(x))]_0^{\pi/2} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} nx^{n-1}\times(-\cos(x))\,\mathrm{d}x = n\ J_{n-1}$

$J_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x^n.\cos(x)\,\mathrm{d}x = [x^n\times\sin(x)]_0^{\pi/2} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} nx^{n-1}\times\sin(x)\,\mathrm{d}x = \left(\frac{\pi}{2}\right)^n - n\ I_{n-1}$

c) $I_n = n\ J_{n-1} = n\left[\left(\frac{\pi}{2}\right)^{n-1} - (n-1)I_{n-2}\right] = n\left(\frac{\pi}{2}\right)^{n-1} - n(n-1)I_{n-2}$

$J_n = \left(\frac{\pi}{2}\right)^n - n\ I_{n-1} = \left(\frac{\pi}{2}\right)^n - n(n-1)\ J_{n-2}$

100 page 195

1 a) Pour tout x réel, on a: $1-\frac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x+1}-\frac{\mathrm{e}^x}{(\mathrm{e}^x+1)^2}=\frac{(\mathrm{e}^x+1)^2-\mathrm{e}^x(e^x+1)-\mathrm{e}^x}{(\mathrm{e}^x+1)^2}=\ldots=\frac{1}{(\mathrm{e}^x+1)^2}$

Remarquer: Pour tout x réel, $1+\mathrm{e}^x>0$.

En posant pour u la fonction $u: \mapsto 1+\mathrm{e}^x$, on voit apparaître les formes $\frac{u'}{u}$ avec $u>0$ et $\frac{-u'}{u^2}$.

b) On en déduit alors les primitives de la fonction f: $x \mapsto \frac{1}{(\mathrm{e}^x+1)^2}$.

$x \mapsto x-\ln(1+\mathrm{e}^x)+\frac{1}{1+\mathrm{e}^x}+C$ où $C\in\mathbb{R}$ sont les primitives de f.

$I=\int_0^1 \frac{1}{(\mathrm{e}^x+1)^2}\,\mathrm{d}x=\left[x-\ln(1+\mathrm{e}^x)+\frac{1}{1+\mathrm{e}^x}\right]_0^1$

$I=1-\ln(1+\mathrm{e})+\frac{1}{1+\mathrm{e}}-\left(0-\ln(2)+\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}+\ln\frac{2}{1+\mathrm{e}}+\frac{1}{1+\mathrm{e}}$

2a) $x \mapsto \dfrac{e^x}{(e^x+1)^3}$ est de la forme $u' u^{\alpha}$ avec α = –3;

Une primitive est donc de la forme $x \mapsto \dfrac{1}{\alpha+1} u^{\alpha+1}$

$x \mapsto \dfrac{-1}{2} \times \dfrac{1}{(e^x+1)^2}$ est donc une primitive de $x \mapsto \dfrac{e^x}{(e^x+1)^3}$

b) $J = \displaystyle\int_0^1 \frac{xe^x}{(e^x+1)^3}\,dx$

Posons $u'(x) = \dfrac{e^x}{(e^x+1)^3}$ et $v(x) = x$

On a alors: $u(x) = \dfrac{-1}{2(e^x+1)^2}$ d'après 2a) et, $v'(x) = 1$

Les fonctions u et v sont dérivables sur [0;1] et leurs dérivées u' et v' sont continues, d'où, par intégration par parties, on a:

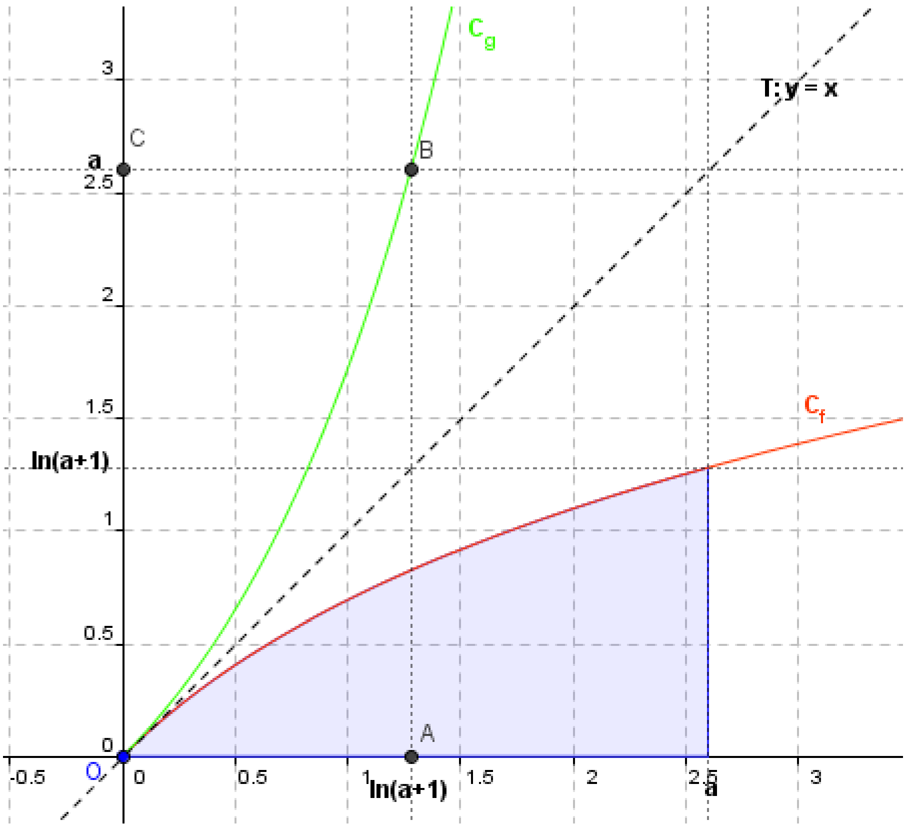
$$J = \left[x \times -\frac{1}{2} \times \frac{1}{(e^x+1)^2} \right]_0^1 - \int_0^1 1 \times -\frac{1}{2} \times \frac{1}{(e^x+1)^2}\,dx \;=\; \frac{-1}{2(e+1)^2} + \frac{1}{2} I$$

$$J = \frac{1}{4} + \frac{1}{2} \times \ln\left(\frac{2}{1+e}\right) + \frac{1}{2(1+e)} - \frac{1}{2(e+1)^2}$$

Exercice B page 196

f et *g* sont définies sur [0; +∞[par $f(x) = \ln(x+1)$ et $g(x) = e^x - 1$

C_f et C_g sont leurs représentations graphiques dans un repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j})$.



1) Le coefficient directeur de T_1 tangente à C_f en $O(0;\, 0)$ est $f'(0)$

$f'(x) = \dfrac{1}{x+1}$, d'où, $f'(0) = 1$

Le coefficient directeur de T_2 tangente à C_g en $O(0;\, 0)$ est $g'(0)$

$g'(x) = \mathrm{e}^x$, d'où, $g'(0) = 1$

Les deux droites ont le m^me coefficient directeur, elles sont donc parallèles.
Elles ont un point commun le point de contact O.
Elles sont donc confondues.

Rappel:

Une équation de la tangente T_1 à C_f au point d'abscisse 0 est $y = f'(0)(x-0) + f(0)$

$f'(x) = \dfrac{1}{x+1}$, d'où, $f'(0) = 1$, $f(0) = 0$.

Une équation de T_1 est $y = x$.

Une équation de la tangente T_2 à C_g au point d'abscisse 0 est $y = g'(0)(x-0) + g(0)$

$g'(x) = \mathrm{e}^x$, d'où, $g'(0) = 1$; $g(0) = 0$

Une équation de T_2 est $y = x$.

Position de la courbe C_f par rapport à cette tangente

On cherche le signe de la différence $d(x) = f(x) - x$ pour $x \geqslant 0$

$d'(x) = \dfrac{1}{x+1} - 1 = \dfrac{-x}{x+1}$

$d'(x) \leqslant 0$ sur $[0;\, +\infty[$.

On a alors:

x	0 $\qquad\qquad\qquad$ $+\infty$
$d'(x)$	$-$
$d(x)$	0 $\searrow$

Comme $d(0) = 0$ et d décroissante sur $[0; +\infty[$, on obtient: pour tout $x \geqslant 0$, $d(x) \leqslant 0$.
Conclusion: Pour $x \geqslant 0$, $f(x) \leqslant x$.
La courbe C_f est au-dessous de la tangente T.

2) Soit $M(x; y) \in C_f$

$M(x; y) \in C_f \Leftrightarrow y = \ln(x + 1)$ et $x \geqslant 0$ $\qquad$ y est nécessairement positif, puisque $x + 1 \geqslant 1$, donc, $\ln(x + 1) \geqslant 0$

$M(x; y) \in C_f \Leftrightarrow e^y = x + 1$ et $y \geqslant 0$ $\qquad$ x est nécessairement positif, puisque $y \geqslant 0$ implique $e^y \geqslant 1$

$M(x; y) \in C_f \Leftrightarrow x = e^y - 1$ et $y \geqslant 0$

$M(x; y) \in C_f \Leftrightarrow x = g(y)$ et $y \geqslant 0$

$M(x; y) \in C_f \Leftrightarrow N(y; x) \in C_g$.

Les points $M(x; y)$ et $N(y; x)$ sont symétriques par rapport à la droite d'équation $y = x$ dans un repère orthonormal (Voir exercice 33)

3) a) $a > 0$

$I(a) = \int_0^a \ln(x+1)\,\mathrm{d}x$

a) Pour tout $x \geqslant 0$, $\ln(x + 1) \geqslant 0$.
$I(a)$ est donc en unité d'aire la mesure du domaine $D_1 = \{M(x; y) / 0 \leqslant x \leqslant a \text{ et } 0 \leqslant y \leqslant \ln(x + 1)\}$ (partie colorée sur le graphique)
Par symétrie d'axe T d'équation $y = x$, le domaine D_1 a la même aire que le domaine D_2 situé au-dessus de la courbe de g et limité par les droites d'équations respectives $y = a$ (symétrique de la droite d'équation $x = a$), $x = 0$ (symétrique de la droite d'équation $y = 0$), $x = \ln(a + 1)$ (symétrique de la droite d'équation y = $\ln(a + 1)$;
On nomme les points .... $A(\ln(a + 1); 0)$, $B(\ln(a + 1); a)$, $C(0; a)$.
$\mathscr{A}(D_2)$ = aire du rectangle $OABC$ – aire du domaine sous C_g limité par l'axe des ordonnées et la droite d'équation $x = \ln(a + 1)$.

$I(a) = \mathscr{A}(D_1) = \mathscr{A}(D_2) = OC \times OA - \int_0^{\ln(a+1)} g(x)\,\mathrm{d}x$

b) $\int_0^{\ln(a+1)} g(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^{\ln(a+1)} (e^x - 1)\,\mathrm{d}x = \left[e^x - x\right]_0^{\ln(a+1)} = (a + 1) - \ln(a + 1) - (e^0 - 0) = a - \ln(a + 1)$

Finalement:
$I(a) = a \times \ln(a + 1) - (a - \ln(a + 1)) = a \times \ln(a + 1) - a + \ln(a + 1) = (a + 1)\ln(a + 1) - a$

c) Une intégration par parties:

$I(a) = \int_0^a \ln(x+1)\,\mathrm{d}x$

On pose $u(x) = \ln(x + 1)$ et $v'(x) = 1$

On a donc: $u'(x) = \dfrac{1}{x+1}$ et $v(x) = x + 1$

u, v sont des fonctions dérivables à dérivées continues sur $[0; a]$.
On peut donc faire une i.p.p.

$I(a) = \left[(x+1)\ln(x+1)\right]_0^a - \int_0^a \frac{x+1}{x+1}\,\mathrm{d}\,x = (a + 1)\ln(a + 1) - 1\times\ln 1 - \int_0^a 1\,\mathrm{d}\,x$

Or, ln 1 = 0 et $\int_0^a 1\,\mathrm{d}\,x = a$, d'où,

$I(a) = (a + 1)\ln(a + 1) - a$

On retrouve le résultat du 3b)

Exercice C page 196

1 a) La fonction f définie sur [1; +∞[par $f(t) = \frac{\mathrm{e}^t}{t}$ est continue sur [1; +∞[, car, f est le produit de deux fonctions continues : $t \mapsto \mathrm{e}^t$ et $t \mapsto \frac{1}{t}$ sur [1; +∞[($t \neq 0$).

b) f est le produit de fonctions dérivables sur [1; +∞[,

$f'(t) = \frac{\mathrm{e}^t\times t - 1\times \mathrm{e}^t}{t^2} = \frac{\mathrm{e}^t}{t^2}(t-1)$

Si $t \geqslant 1$ alors $t - 1 \geqslant 0$,

d'où, $f'(t) \geqslant 0$ et, f est croissante sur [1; +∞[.

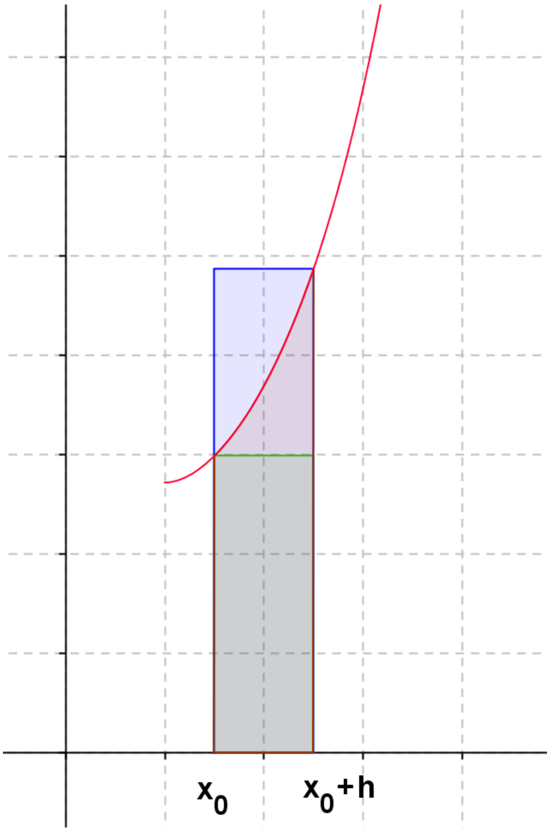
2) R.O.C.

a) $A(1) = 0$ puisque la surface a une dimension nulle ...

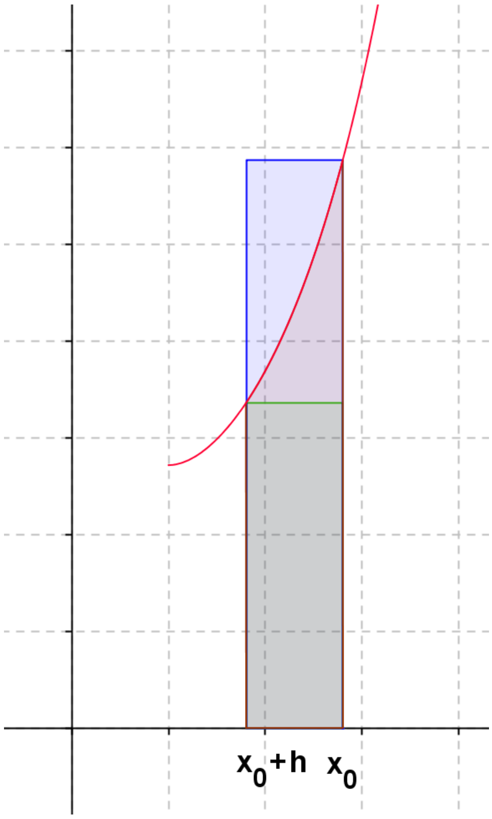
b) On a de façon évidente: f positive sur [1; +∞[.

Comme f est croissante sur [1; +∞[, et $h > 0$, on a:

$1 \leqslant x_0 < x_0 + h$ implique $f(x_0) \leqslant f(x_0+h)$



Cas $h > 0$



Cas $h < 0$

Le rectangle de hauteur $f(x_0)$ est au-dessous du domaine sous la courbe et au-dessous du rectangle de hauteur $f(x_0+h)$
L'aire sous la courbe est $A(x_0+h)-A(x_0)$
L'aire du rectangle de hauteur $f(x_0)$ et de largeur h est $h\times f(x_0)$
L'aire du rectangle de hauteur $f(x_0+h)$ et de largeur h est $h\times f(x_0+h)$.
On a donc: $h\times f(x_0) \leqslant A(x_0+h)-A(x_0) \leqslant h\times f(x_0+h)$.
Comme $h > 0$, il vient en divisant par h: $f(x_0) \leqslant \dfrac{A(x_0+h)-A(x_0)}{h} \leqslant f(x_0+h)$.

c) Si $h < 0$, on a: $1 \leqslant x_0+h < x_0$
Ne pas oublier que la largeur du rectangle est $-h$.
On a donc: $-h\times f(x_0+h) \leqslant A(x_0)-A(x_0+h) \leqslant -h\times f(x_0)$.
Comme $-h > 0$, il vient en divisant par $-h$: $f(x_0+h) \leqslant \dfrac{A(x_0+h)-A(x_0)}{h} \leqslant f(x_0)$.
d) Comme f est continue en x_0, on a: $\lim\limits_{h\to 0} f(x_0+h) = f(x_0)$.
Les inégalités du b) et du c) donnent par passage à la limite et d'après le théorème des gendarmes:
$\lim\limits_{\substack{h\to 0\\ h>0}} \dfrac{A(x_0+h)-A(x_0)}{h} = f(x_0)$ et $\lim\limits_{\substack{h\to 0\\ h<0}} \dfrac{A(x_0+h)-A(x_0)}{h} = f(x_0)$.
La fonction A est donc dérivable en x_0 et $A'(x_0) = f(x_0)$
e) La fonction A est par conséquent une primitive de f sur $[1; +\infty[$

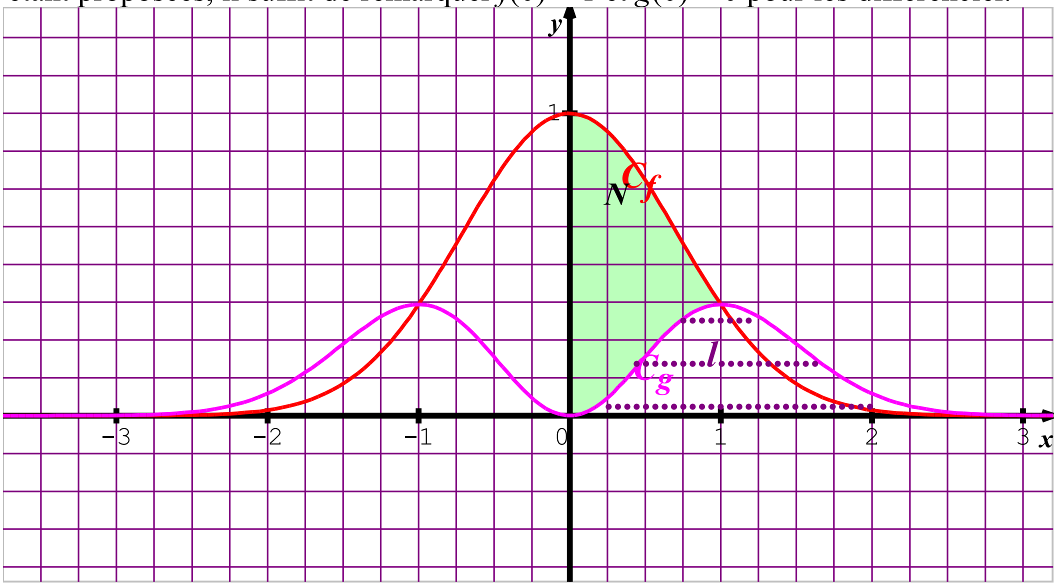
Exercice D page 196 ***Amérique du Sud novembre 2005***

Partie A

C_f et C_g sont les représentations graphiques dans un repère orthogonal des fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}$ par:

$f(x) = e^{-x^2}$ et $g(x) = x^2 e^{-x^2}$

1) Les courbes étant proposées, il suffit de remarquer $f(0) = 1$ et $g(0) = 0$ pour les différencier.



2) Il est évident que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $-x \in \mathbb{R}$ et $f(-x) = f(x)$, et, $g(-x) = g(x)$.
Les fonctions f et g sont paires.

3) f est la composée de deux fonctions définies et dérivables sur $\mathbb{R}$, d'où, f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout x réel
$f'(x) = -2x\ e^{-x^2} = -2x.f(x)$ qui est du signe contraire de x, ($e^X > 0$ pour tout X)
d'autre part, comme $\lim_{x\to+\infty} -x^2 = -\infty$ et $\lim_{x\to-\infty} e^x = 0$, on a: $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$
d'où, le tableau de variations suivant: *(la parité permet de n'étudier que sur [0; +∞[)*

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	↗	1	↘	0

La fonction g est le produit de la fonction carré par la fonction f, d'où,
$g'(x) = 2x.f(x) + x^2.f'(x) = 2x.f(x)(1 - x^2) = 2x(1 - x)(1 + x)f(x)$
D'autre part, on sait: $\lim_{t\to-\infty} t\,e^t = 0$, d'où, en posant $t = -x^2$, on montre $\lim_{x\to+\infty} g(x) = 0$,

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	
$g(x)$	0	↗	$1/e$	↘	0	↗	$1/e$	↘	0

4) La position relative de C_f et C_g est donnée par le signe de $f(x) - g(x) = (1 - x^2)\ e^{-x^2}$

Conclusion: C_f et C_g se coupent aux points de coordonnées $(-1; \frac{1}{e})$ et $(1; \frac{1}{e})$

Sur $]-\infty; -1[$ et sur $]1; +\infty[$, C_f est strictement au-dessus de C_g.

Sur $]-1; 1[$, C_f est strictement au-dessous de C_g.

Partie B

1) G définie sur $\mathbb{R}$ par $G(x) = \int_0^x t^2\, e^{-t^2}\, \mathrm{d}t = \int_0^x g(t)\, \mathrm{d}t$

Comme g est une fonction continue sur $\mathbb{R}$, G est la primitive de g qui s'annule en 0.

2) Pour $x > 0$, comme $g(x) \geqslant 0$, $G(x)$ est la mesure de l'aire du domaine délimité par l'axe des ordonnées d'équation $X = 0$, la droite d'équation $X = x$, l'axe des abscisses et la courbe C_g. (1 $u.a.$ = $\|\vec{i}\| \times \|\vec{j}\|$)

3) On a d'après 1), $G'(x) = g(x)$ et comme $g(x) > 0$, G est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

4) On pose $F(x) = \int_0^x \mathrm{e}^{-t^2}\, \mathrm{d}t$ (F est la primitive de f qui s'annule en 0)

Une méthode: *Cette méthode n'est possible que parce qu'on nous donne le résultat* $G(x) = \frac{1}{2}\,[F(x) - x\, \mathrm{e}^{-x^2}]$)

On sait que $G'(x) = g(x)$, déterminons la dérivée de la fonction Ψ: $x \mapsto \frac{1}{2}\,[F(x) - x\, \mathrm{e}^{-x^2}]$

$\Psi'(x) = \frac{1}{2}\,(f(x) - \mathrm{e}^{-x^2} - x(-2x)\, \mathrm{e}^{-x^2}) = \ldots = g(x)$.

Ψ est donc une primitive de g et comme $\Psi(0) = \ldots = 0$, Ψ est la primitive définie sur $\mathbb{R}$ de g qui s'annule en 0.
Conclusion: $G = \Psi$.

Une autre méthode: (Intégration par parties)

$G(x) = \int_0^x t^2\, e^{-t^2}\, \mathrm{d}t = \int_0^x t \times t\, e^{-t^2}\, \mathrm{d}t$

On pose $\begin{cases} u(t) = t \\ v'(t) = t\, e^{-t^2} \end{cases}$, d'où, $\begin{cases} u'(t) = 1 \\ v(t) = -\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-t^2} \end{cases}$. Les fonctions u et v sont dérivables à dérivées continues sur $\mathbb{R}$,

d'où, $G(x) = \left[t \times \left(-\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-t^2}\right)\right]_0^x - \int_0^x \left(-\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-t^2}\right) \mathrm{d}t = -\frac{1}{2}\, x.\, \mathrm{e}^{-x^2} + \frac{1}{2}\, F(x) = \frac{1}{2}\,[F(x) - x\, \mathrm{e}^{-x^2}]$

5) a) On admet que $\lim_{x \to +\infty} F(x) = l$ ($l \in \mathbb{R}^+$) *(pour la culture: cette limite vaut* $\frac{\sqrt{\pi}}{2}$ *)*

D'après 4), on a: $\lim_{x \to +\infty} G(x) = \frac{l}{2}$ (puisque la limite en $+\infty$ de $\frac{x}{\mathrm{e}^{x^2}}$ est 0 croissance comparée)

b) $N = \int_0^1 (1 - t^2)\, e^{-t^2}\, \mathrm{d}t = \int_0^1 [f(t) - g(t)]\, \mathrm{d}t$

Comme sur [0; 1], $f(t) - g(t) \geqslant 0$, N est la mesure de l'aire comprise entre les droites d'équations $x = 0$, $x = 1$ et les courbes C_f et C_g.

c) N est l'aire du domaine coloré en vert sur le graphique.

l est l'aire sur [0; +∞[sous la courbe C_f et $\frac{l}{2}$ sous la courbe C_g (en magenta).

Par lecture graphique, on voit que l'aire en vert est supérieure à la moitié de l'aire sous C_f.

D'où, $N > \frac{l}{2}$

Complément:

En notant $\int_0^{+\infty} g(x)\,\mathrm{d}x$ la limite en +∞ de G et même notation pour les autres limites d'intégrales, on a: (écriture valable car les limites sont finies)

$$\int_0^{+\infty}(f-g)(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^1 (f-g)(x)\,\mathrm{d}x + \int_1^{+\infty}(f-g)(x)\,\mathrm{d}x = N + \int_1^{+\infty}(f-g)(x)\,\mathrm{d}x$$