Index

1 page 212

On lance deux dés et on forme un nombre de deux chiffres: $\overline{du}$ où d est lu sur le dé rouge et u est lu sur le dé bleu.

1) On peut former 36 nombres que l'on peut présenter dans un tableau

	1	2	3	4	5	6
1	11	12	13	14	15	16
2	21	22	23	24	25	26
3	31	32	33	34	35	36

4	41	42	43	44	45	46
5	51	52	53	54	55	56
6	61	62	63	64	65	66

2- A : " le nombre formé est divisible par 5 " $A = \{15; 25; 35; 45; 55; 65\}$ (Nombres écrits en magenta)

B: " le nombre formé est strictement supérieur à 20 " (Nombres surlignés en jaune)

C : " le nombre est compris entre 16 et 24 au sens large " (Nombres écrits sur fond vert)

Probabilité de A: $P(A) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$.

Probabilité de $\overline{B}$: $P(\overline{B}) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$

Probabilité de B: $P(B) = \frac{30}{36} = \frac{5}{6}$ **Important:** $P(B) + P(\overline{B}) = 1$

Probabilité de C: $P(C) = \frac{5}{36}$

$A \cap B$ (Nombres divisibles par 5 ET strictement supérieurs à 20): $A \cap B = \{25; 35; 45; 55; 65\}$

Probabilité de $A \cap B$: $P(A \cap B) = \frac{5}{36}$

$A \cup B$ (Nombres divisibles par 5 OU strictement supérieurs à 20):

$A \cup B = \{15; 21; 22; 23; 24; 25; 26; 31; 32; 33; 34; 35; 36; 41; 42; 43; 44; 45; 46; 51; 52; 53; 54; 55; 56; 61; 62; 63; 64; 65; 66\}$

Probabilité de $A \cup B$: $P(A \cup B) = \frac{31}{36}$ **Important:** $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

$B \cap C$ (Nombres compris entre 21 et 24 au sens large):

Probabilité de $B \cap C$: $P(B \cap C) = \frac{4}{36} = \frac{1}{9}$

$B \cup C$ (Nombre supérieur ou égal à 16)

Probabilité de $B \cup C$: $P(B \cup C) = \frac{31}{36}$ **Important:** $P(B \cup C) = P(B) + P(C) - P(B \cap C)$

$A \cap C = \emptyset$ (Multiples de 5 compris entre 16 et 24)

Dans ce cas, on dit que A et C sont des événements **disjoints** ou **incompatibles**.

Probabilité de $A \cap C$: $P(A \cap C) = 0$ On dit que l'événement $A \cap C$ est un événement **impossible.**

$A \cup C$

Probabilité de $A \cup C$: $P(A \cup C) = \frac{11}{36}$.

Dans ce cas (événements disjoints), on a: $P(A \cup C) = P(A) + P(C)$

2 page 212

Trois dés: Rouge, Bleu, Vert.
On écrit: $\overline{cdu}$ avec c lu sur le dé rouge, d sur le dé bleu et u sur le dé vert.
a) On peut écrire ainsi: $6\times6\times6 = 6^3 = 216$ nombres

b) A: " le chiffre des unités est égal à celui des dizaines". card(A) = $6\times6\times1 = 36$ et $P(A) = \frac{36}{216} = \frac{1}{6}$

B: "le chiffre des centaines est 4". card(B) = $1\times6\times6 = 36$ et $P(B) = \frac{36}{216} = \frac{1}{6}$

C: "le nombre est le carré d'un entier naturel" $C = \{121, 144, 225, 256, 324, 361, 441, 625\}$ et $P(C) = \frac{8}{216}$

D : "le nombre est strictement supérieur à 365"

Les éléments de D: 366, 411 à 466, 511 à 566, 611 à 666. card(D) = $1 + 3\times36 = 109$ et $P(D) = \frac{109}{216}$

---

3 page 212

On sait : P(pile) + P(face) = 1
P(pile) = 2 × P(face)
On a ***donc***: 3 × P(face) = 1
Conclusion: P(face) = $\frac{1}{3}$ et P(pile) = $\frac{2}{3}$

---

4 page 212

un dé est truqué de la façon suivante: le 6 a six fois plus de chances de sortir que les cinq autres nombres qui ont, eux, la même chance d'apparaître.

1) Soit p la probabilité de sortie d'un numéro de 1 à 5.

On a donc: $6p + 5p = 1$, d'où, $p = \mathbf{\frac{1}{11}}$

$P(1) = P(2) = P(3) = P(4) = P(5) = p = \mathbf{\frac{1}{11}}$ $\qquad P(6) = \mathbf{\frac{6}{11}}$

2) La probabilité d'obtenir un nombre pair est: $P(\text{pair}) = P(2) + P(4) + P(6) = \mathbf{\frac{8}{11}}$

---

5 page 212

1) Sur 100 personnes interrogées, 45 utilisent un produit A, 50 utilisent un produit B et 20 n'utilisent ni A, ni B.

	***A* (utilisent *A*)**	**$\overline{A}$ (n'utilisent pas *A*)**	**Total**
***B* (utilisent *B*)**	*50 – 35 = 15* $A \cap B$	*55 – 20 = 35* $\overline{A} \cap B$	**50**
$\overline{B}$ (n'utilisent pas *B*)	*50 – 20 = 30* $A \cap \overline{B}$	**20** $\overline{A} \cap \overline{B}$	*100 – 50 = 50*
Total	**45**	*100 – 45 = 55*	**100**

En gras, les données. En italique, les résultats obtenus après calculs.

2) On choisit une personne au hasard (hypothèse d'équiprobabilité)

a) E "la personne utilise les deux produits" $P(E) = P(A \text{ et } B) = P(A \cap B) = \dfrac{card(A \cap B)}{card(\Omega)} = 0{,}15$

b) F "la personne utilise au moins l'un des deux produits" $P(F) = P(A \text{ ou } B) = P(A \cup B) = 0{,}8$

On peut faire: 100 – 20 = 80 (tous moins ceux qui n'utilisent aucun produit)

ou encore: 15 + 35 + 30 = 80 (ceux qui utilisent les deux , ceux qui utilisent seulement A, ceux qui utilisent seulement B)

ou encore: 45 + 50 – 15 = 80 (ceux qui utilisent A, ceux qui utilisent B moins ceux qui utilisent les deux produits)

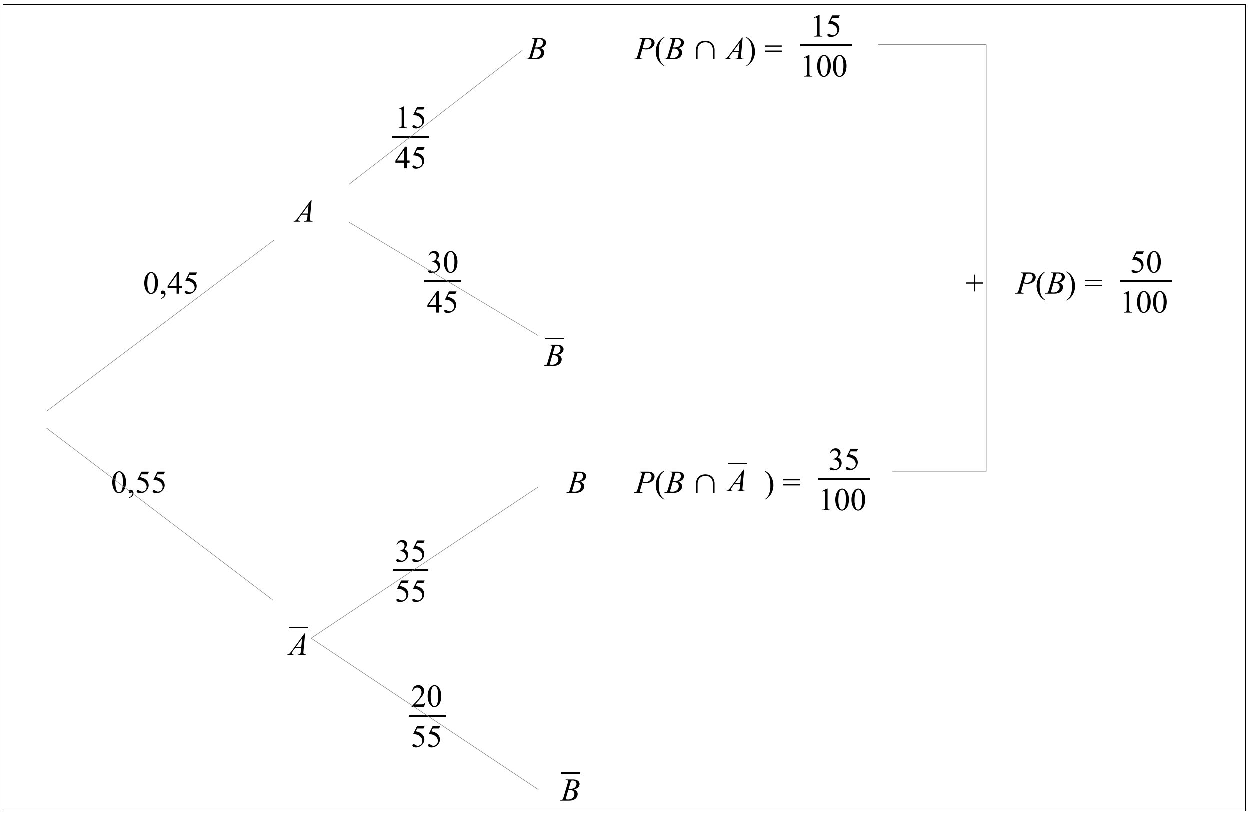
pour dénombrer ceux qui utilisent au moins un des deux produits.

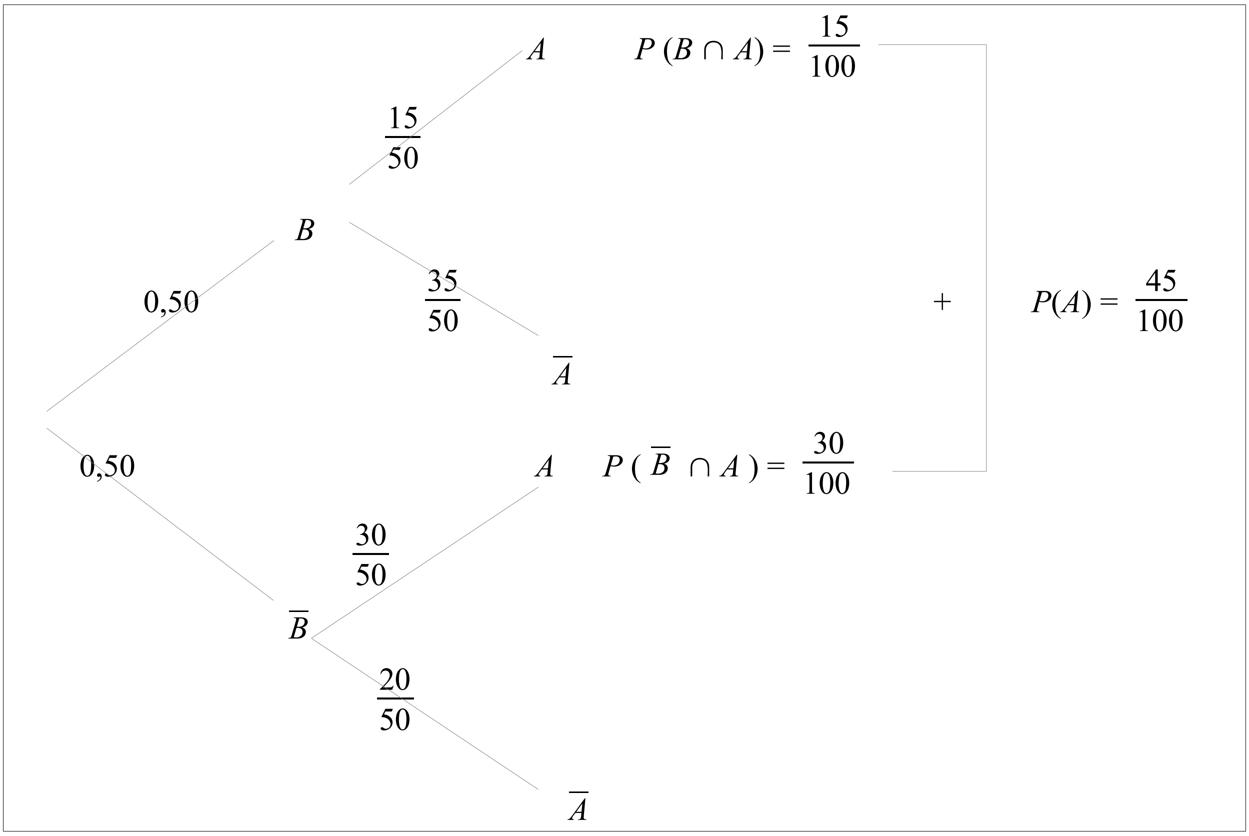
c) G "la personne utilise seulement A" $P(G) = P(A \cap \overline{B}) = 0{,}3$

d) H "la personne utilise un seul des deux produits" $P(G) = P(A \cap \overline{B}) \cup (\overline{A} \cap B) = 0{,}3 + 0{,}35$

$P(\text{un seul produit}) = 0{,}65$

Complément





6 page 212

a) 20 filles dont 12 étudient le russe et 15 garçons dont 8 étudient le russe
On choisit un élève au hasard, d'où, on a l'hypothèse d'équiprobabilité.

	B (russe)	**$\bar{B}$**	**Total**
A (Filles)	12	8	20
$\bar{A}$ (garçons)	8	7	15
Total	20	15	35

données surlignées en jaune

A: « l'élève est une fille »: $P(A) = \frac{20}{35} = \frac{4}{7}$

B: « l'élève étudie le russe »: $P(B) = \frac{20}{35} = \frac{4}{7}$

C: « l'élève est une fille étudiant le russe », on a: $C = A \cap B$ et $P(C) = \frac{12}{35}$

$P(C) = \frac{12}{35}$ et $P(A) \times P(B) = \frac{16}{49}$, donc, $P(C) \neq P(A) \times P(B)$

Les événements A et B ne sont pas indépendants

Questions complémentaires:

Sachant que l'élève est une fille, la probabilité qu'elle étudie le russe est:

$P_A(B) = \frac{12}{20} = \frac{3}{5}$ On a: $P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$

Sachant que l'élève étudie le russe, la probabilité qu'elle est une fille est:

$P_B(A) = \frac{12}{20} = \frac{3}{5}$ On a: $P_B(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$

Sachant que l'élève est un garçon, la probabilité qu'il étudie le russe est:

$P_{\bar{A}}(B) = \frac{8}{15}$

Sachant que l'élève étudie le russe, la probabilité qu'il est un garçon est:

$P_B(\bar{A}) = \frac{8}{20} = \frac{2}{5}$

	B **(russe)**	$\bar{B}$	**Total**
A **(Filles)**	12	8	20
$\bar{A}$ **(garçons)**	9	6	15
Total	21	14	35

données surlignées en jaune

b) 20 filles dont 12 étudient le russe et 15 garçons dont 9 étudient le russe
On choisit un élève au hasard, d'où, on a l'hypothèse d'équiprobabilité.

A: « l'élève est une fille »: $P(A) = \frac{20}{35} = \frac{4}{7}$

B: « l'élève étudie le russe »: $P(B) = \frac{21}{35} = \frac{3}{5}$

C: « l'élève est une fille étudiant le russe », on a: $C = A \cap B$ et $P(C) = \frac{12}{35}$

$P(C) = \frac{12}{35}$ et $P(A) \times P(B) = \frac{12}{35}$, donc, $P(C) = P(A) \times P(B)$

Les événements *A* et *B* sont indépendants

Questions complémentaires:

Sachant que l'élève est une fille, la probabilité qu'elle étudie le russe est:

$P_A(B) = \frac{12}{20} = \frac{3}{5}$ On a: $P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$

Sachant que l'élève étudie le russe, la probabilité qu'elle est une fille est:

$P_B(A) = \frac{12}{21} = \frac{4}{7}$ On a: $P_B(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$

Sachant que l'élève est un garçon, la probabilité qu'il étudie le russe est:

$P_{\bar{A}}(B) = \frac{9}{15} = \frac{3}{5}$

Sachant que l'élève étudie le russe, la probabilité qu'il est un garçon est:

$P_B(\bar{A}) = \frac{9}{21} = \frac{3}{7}$

---

8 page 212

A et *B* sont deux événements tels que P(*A*) = 0,7 ; P(*B*) = 0,4 et P(*A* ∩ *B*) = 0,3

	A	$\bar{A}$	**Total**
B	0,3 = P(*A* ∩ B)	0,1 = P($\bar{A}$ ∩ *B*)	0,4
$\bar{B}$	0,4 = P(*A* ∩ $\bar{B}$)	0,2 = P($\bar{A}$ ∩ $\bar{B}$)	0,6
Total	0,7	0,3	1

données surlignées en jaune

La somme des probabilités vaut 1

P($\bar{A}$) = 1 – 0,7 = 0,3 P($\bar{B}$) = 1 – 0,4 = 0,6 P(*A* ∪ *B*) = 0,7 + 0,4 – 0,3 = 0,8

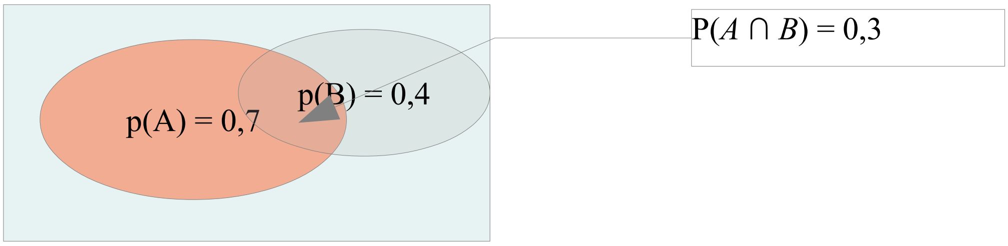
P($\bar{A}$ ∪ *B*) = 0,3 + 0,4 – 0,1 = 0,6 ou 0,3 + 0,1 + 0,2 = 0,6

P($\bar{A}$ ∩ B) = 0,1

P($\bar{A}$ ∪ $\bar{B}$) = 0,2 +0,4 +0,1 = 0,7 ou

Comme $\overline{\bar{A} \cup \bar{B}} = \bar{\bar{A}} \cap \bar{\bar{B}}$ = *A* ∩ *B*, P($\bar{A}$ ∪ $\bar{B}$) = 1 – 0,3 = 0,7 ou

$P(\overline{A} \cup \overline{B}) = P(\overline{A}) + P(\overline{B}) - P(\overline{A} \cap \overline{B}) = 0{,}3 + 0{,}6 - 0{,}2 = 0{,}7$



---

10 page 212

éléments pour le code: 1, 2, 3, 4, 5, 6, A, B, C, D.

Le code est formé de deux chiffres distincts suivis de deux lettres distinctes ou non.

a) La personne ignore le code.

L'univers est le nombre total de codes possibles.

Choix du premier chiffre: 6 possibilités.

Ce chiffre étant choisi, choix du second chiffre: 5 possibilités.

Choix d'une lettre: 4 possibilités

Choix d'une deuxième lettre: 4 possibilités.

Nombre de codes (cardinal de l'univers): $6 \times 5 \times 4 \times 4 = 480$

Un seul code ouvre la porte:

P(ouvrir la porte du premier coup) = $\frac{1}{480}$.

b) La personne se souvient que les deux chiffres sont pairs.

L'univers est le nombre de codes commençant par deux chiffres pairs.

Choix du premier chiffre pair: 3 possibilités.

Ce chiffre étant choisi, choix du second chiffre pair: 2 possibilités.

Choix d'une lettre: 4 possibilités

Choix d'une deuxième lettre: 4 possibilités.

Nombre de codes commençant par deux chiffres pairs (cardinal de l'univers): $3 \times 2 \times 4 \times 4 = 96$

Un seul code ouvre la porte:

P(ouvrir la porte du premier coup) = $\frac{1}{96}$.

c) La personne se souvient que les deux lettres sont identiques

L'univers est le nombre de codes finissant par deux lettres identiques.

Choix du premier chiffre: 6 possibilités.

Ce chiffre étant choisi, choix du second chiffre: 5 possibilités.

Choix d'une lettre: 4 possibilités

La deuxième lettre est déjà choisie: choix d'une deuxième lettre: 1.

Nombre de codes commençant par deux chiffres pairs (cardinal de l'univers): $6\times 5\times 4\times 1 = 120$

Un seul code ouvre la porte:

P(ouvrir la porte du premier coup) = $\frac{1}{120}$.

---

11 page 212

X	–2	–1	1	2	3
P	0,1	0,2	0,3	0,2	?

$P(X = 3) = 1 - (0,1 + 0,2 + 0,3 + 0,2) = 0,2$

X	–2	–1	1	2	3
P	0,1	0,2	0,3	0,2	0,2
$p_i \times x_i$	–0,2	–0,2	0,3	0,4	0,6
$p_i \times x_i^2$	0,4	0,2	0,3	0,8	1,8

$E(X) = -0,2 - 0,2 + 0,3 + 0,4 + 0,6 = 0,9$

$E(X^2) = 0,4 + 0,2 + 0,3 + 0,8 + 1,8 = 3,5$

$V(X) = E(X^2) - [E(X)]^2 = 3,5 - 0,81 = 2,69$

$\sigma(X) = \sqrt{2,69}$

---

12 page 213

Y	–10	**–6**	**1**	**2**	**3**	**Total**
P	0,05	0,15	0,3	a	?	1

La somme des probabilités vaut 1, d'où, $P(Y=3) = 1 - 0,5 - a = 0,5 - a$.

Y	–10	**–6**	**1**	**2**	**3**	**Total**
P	0,05	0,15	0,3	a	$0,5 - a$	1
$P(Y = y_i)\times y_i$	–0,5	–0,9	0,3	$2a$	$1,5 - 3a$	$E(Y) = 0$

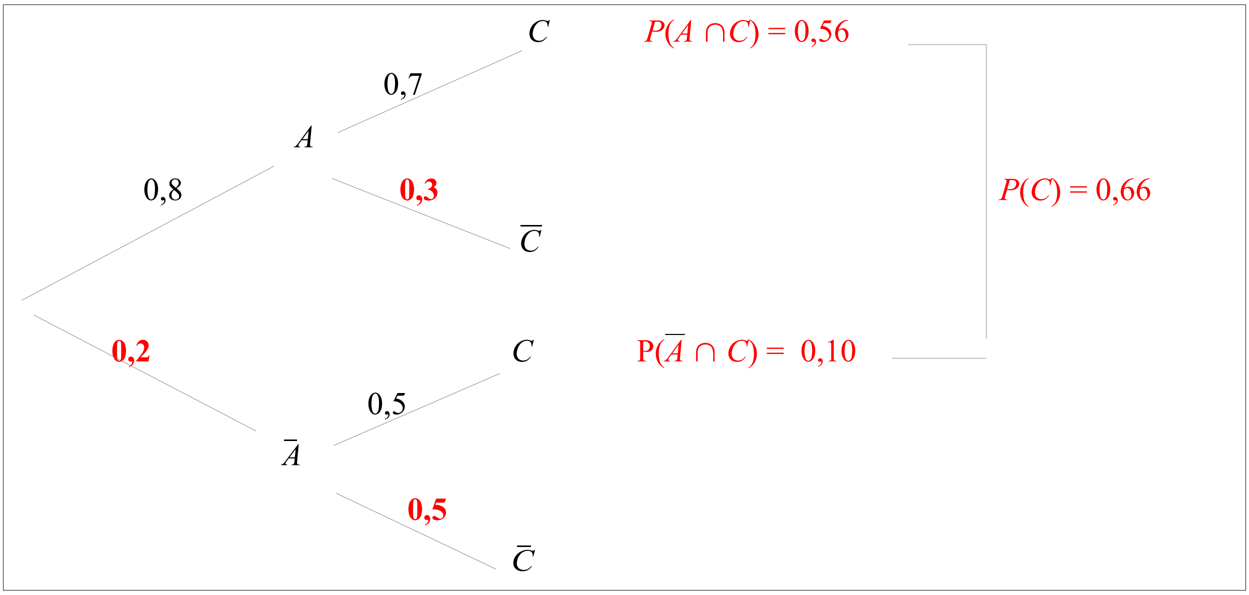
$E(Y) = -a + 0,4$.

$E(Y) = 0$ lorsque $a = 0,4$

Y	–10	–6	1	2	3	Total
P	0,05	0,15	0,3	0,4	0,1	1
$P(Y = y_i)\times y_i$	–0,5	–0,9	0,3	0,8	0,3	$E(Y) = 0$
$P(Y = y_i)\times y_i^2$	5	5,4	0,3	1,6	0,9	$E(Y^2)$

$E(Y^2) = 5 + 5{,}4 + 0{,}3 + 1{,}6 + 0{,}9 = 13{,}2$
$V(Y) = E(Y^2) - (E(Y))^2 = 13{,}2$
$\sigma(Y) = \sqrt{13{,}2}$

15 page 213



1) $0{,}8 = P(A)$, $0{,}7 = P_A(C)$ et $0{,}5 = P_{\bar{A}}(C)$

2) $P(A \cap C) = P(A)\times P_A(C) = 0{,}8\times0{,}7 = 0{,}56$
$P(\bar{A} \cap C) = P(\bar{A})\times P_A(C) = (1 - 0{,}8)\times0{,}5 = 0{,}10$
$P(C) = P(A \cap C) + P(\bar{A} \cap C) = 0{,}56 + 0{,}10 = 0{,}66$

3) $P(A \cap \bar{C}) = P(A)\times P_A(\bar{C}) = 0{,}8\times(1 - 0{,}7) = 0{,}24$
$P(\bar{A} \cap \bar{C}) = P(\bar{A})\times P_{\bar{A}}(\bar{C}) = (1 - 0{,}8)\times(1 - 0{,}5) = 0{,}10$
$P(\bar{C}) = 1 - P(C) = 1 - 0{,}66 = 0{,}34$
ou $P(\bar{C}) = P(A \cap \bar{C}) + P(\bar{A} \cap \bar{C}) = 0{,}24 + 0{,}10 = 0{,}34$

4) $P_C(A) = \dfrac{P(A\cap C)}{P(C)} = \dfrac{0{,}56}{0{,}66} = \dfrac{28}{33}$

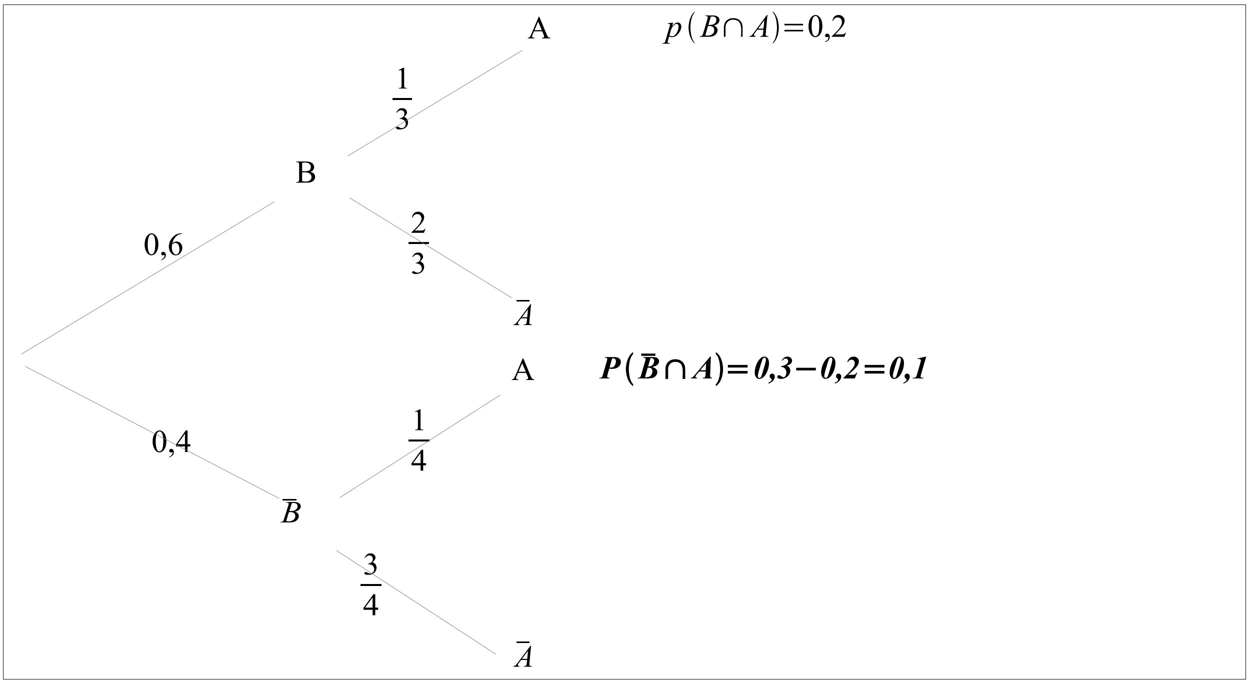
16 page 213

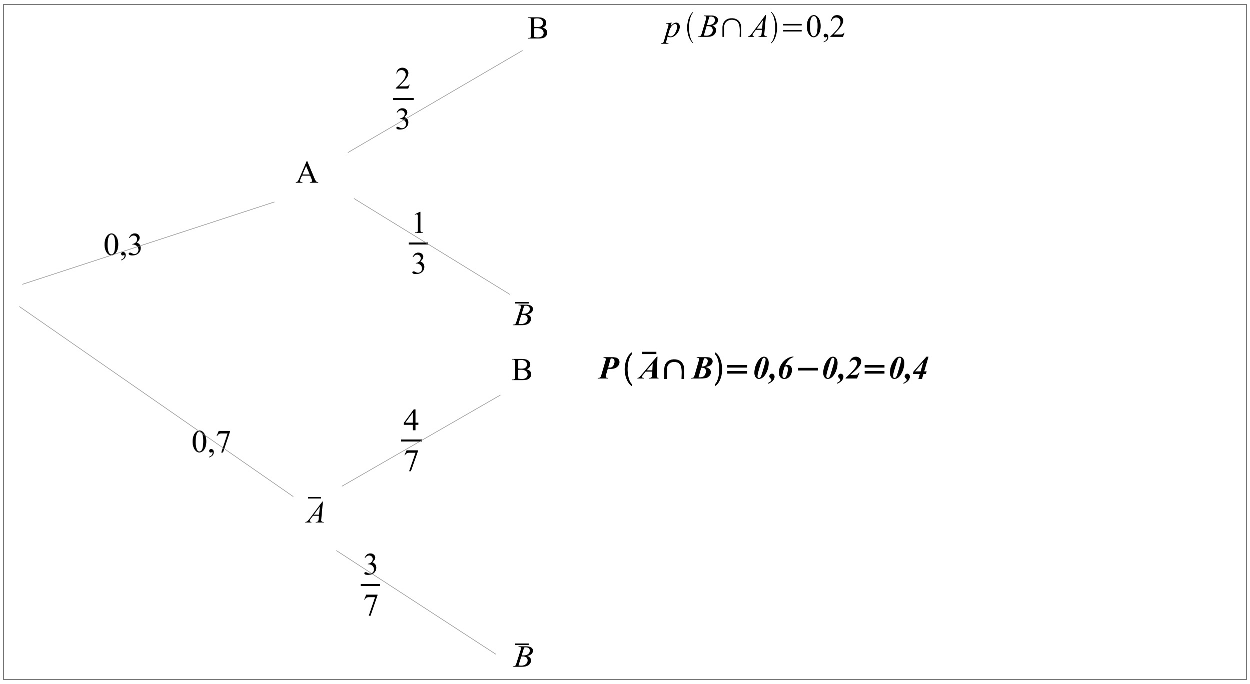
$P(A)=0{,}3$, $P(B)=0{,}6$ et $P(A\cap B)=0{,}2$

a) $P_A(B)=\dfrac{P(A\cap B)}{p(A)}=\dfrac{0{,}2}{0{,}3}=\dfrac{2}{3}$ $\quad P_A(\bar{B})=1-\dfrac{2}{3}=\dfrac{1}{3}$ $\quad P_B(A)=\dfrac{P(A\cap B)}{P(B)}=\dfrac{0{,}2}{0{,}6}=\dfrac{1}{3}$

$P_B(\bar{A})=1-\frac{1}{3}=\frac{2}{3}$ $\quad P_{\bar{A}}(B)=\frac{P(\bar{A}\cap B)}{P(\bar{A})}=\frac{P_B(\bar{A})\times P(B)}{P(\bar{A})}=\frac{\frac{2}{3}\times 0{,}6}{1-0{,}3}=\frac{4}{7}$ $\quad P_{\bar{A}}(\bar{B})=1-\frac{4}{7}=\frac{3}{7}$

b)





17 page 213

$P(C) = 0{,}3$; $P_C(D) = 0{,}2$ et $P(C \cup D) = 0{,}8$

Calculs de

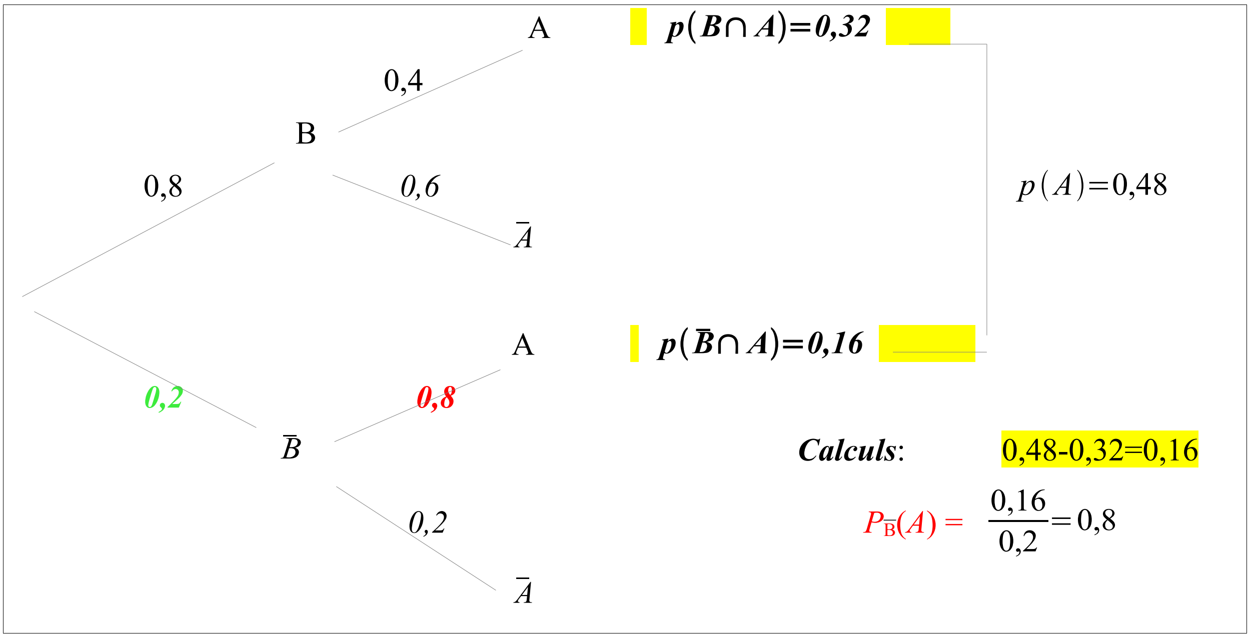
$P(C \cap D) = P_C(D) \times P(C) = 0{,}2 \times 0{,}3 = 0{,}06$

et $P(D) = P(C \cup D) - P(C) + P(C \cap D) = 0{,}8 - 0{,}3 + 0{,}06 = 0{,}56$

$P_D(C) = \dfrac{P(C \cap D)}{P(D)} = \dfrac{0{,}06}{0{,}56} = \dfrac{3}{28}$

---

18 page 213



$P(A) = 0{,}48$; $P(B) = 0{,}8$ et $P_B(A) = 0{,}4$

Calcul de $P_{\overline{B}}(A)$

On a besoin de déterminer $P(\overline{B})$ et $P(A \cap \overline{B})$

$P(\overline{B}) = 1 - P(B) = 1 - 0{,}8 = 0{,}2$

On connaît: $P(B) = 0{,}8$ et $P_B(A) = 0{,}4$, d'où, $P(A \cap B) = P(B) \times P_B(A) = 0{,}32$

On connaît $P(A)$, donc, $P(A \cap \overline{B}) = P(A) - P(A \cap B) = 0{,}48 - 0{,}32 = 0{,}16$

$P_{\overline{B}}(A) = P(A \cap \overline{B})/P(\overline{B}) = \dfrac{0{,}16}{0{,}2} = 0{,}8$

---

19 page 213

Notation:

G_i (respectivement F_i) "La i[ème] naissance est celle d'un garçon (respectivement d'une fille)
D'après les données, la probabilité est la même pour les deux sexes et ne dépend pas du rang de la naissance.
D'où, la construction de l'arbre de probabilité.
A: "la famille a deux garçons"

$P(A) = P(G_1 \cap G_2) = P(G_1) \times P_{G_1}(G_2) = 0{,}25$

B: "l'aîné est un garçon"
B est la réunion disjointe: $(G_1 \cap G_2) \cup (G_1 \cap F_2)$

On a donc: P(B)=0,25+0,25=0,5

C: "la famille a au moins un garçon"

Première méthode

$\bar{C}$ "la famille n'a aucun garçon"

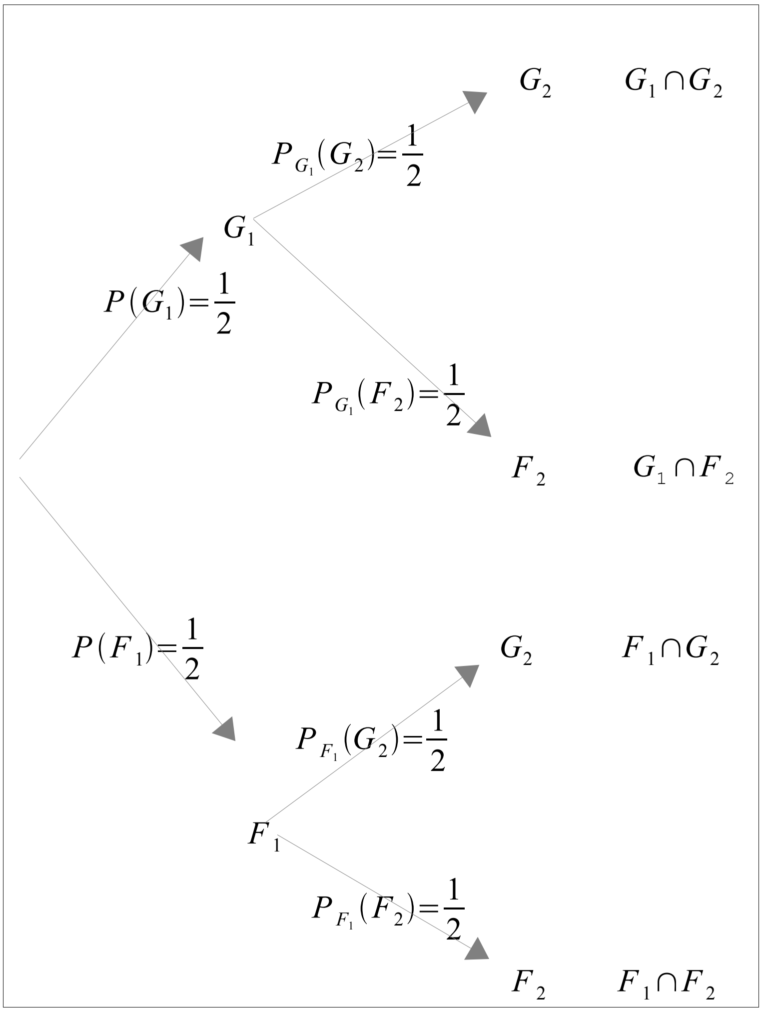
$P(\bar{C})=P(F_1\cap F_2)=0{,}25$

et $P(C)=1-P(\bar{C})=0{,}75$

Deuxième méthode:

$C=(G_1\cap G_2)\cup(G_1\cap F_2)\cup(F_1\cap G_2)$ (réunion disjointe)

$P(C)=0{,}25+0{,}25+0{,}25=0{,}75$



D: "le plus jeune enfant est une fille"

$D=(F_1\cap F_2)\cup(F_1\cap G_2)$ (réunion disjointe)

P(D)=0,25+0,25=0,5

$P_B(A)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}=\frac{0{,}25}{0{,}5}=\frac{1}{2}$ car, A∩B=A

(Sachant que l'aîné est un garçon, la famille a deux garçons: il y a deux possibilités équiprobables pour le deuxième enfant)

$P_C(A)=\frac{P(A\cap C)}{P(C)}=\frac{0{,}25}{0{,}75}=\frac{1}{3}$ car, A∩C=A

(Sachant que la famille a au moins un garçon, la famille a deux garçons: il y a trois possibilités équiprobables pour le deuxième enfant: le premier est un garçon et le deuxième est un garçon, le premier est un garçon et le deuxième est une fille, le premier est une fille et le deuxième est un garçon)

$P_D(A)=0$ car A∩D=∅

(Interprétation évidente: la famille ayant au moins une fille, on ne peut avoir deux garçons)

$P_A(C)=\frac{P(A\cap C)}{P(A)}=1$ car, A∩C=A

(Interprétation évidente: la famille ayant deux garçons, il est certain d'avoir au moins un garçon)

---

23 page 214

On peut résumer l'énoncé avec un arbre pondéré.

Puisque pour l'un et l'autre des dés on admet l'équiprobabilité d'apparition de chaque face, on a:

P(1 sur le dé 1) = $\frac{1}{6}$, P(2 sur le dé 1) = $\frac{1}{3}$ et P(3 sur le dé 1) = $\frac{1}{2}$

P(1 sur le dé 2) = P(2 sur le dé 2) = P(3 sur le dé 2) = $\frac{1}{3}$

$P(X = 0) = \frac{1}{6} \times \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} = \frac{6}{18} = \frac{3}{9}$

$P(X = 1) = \frac{1}{6} \times \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} = \frac{8}{18} = \frac{4}{9}$

$P(X = 2) = \frac{1}{6} \times \frac{1}{3} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} = \frac{4}{18} = \frac{2}{9}$

$E(X) = \frac{3}{9} \times 0 + \frac{4}{9} \times 1 + \frac{2}{9} \times 2 = \frac{8}{9}$

$E(X^2) = \frac{3}{9} \times 0^2 + \frac{4}{9} \times 1^2 + \frac{2}{9} \times 2^2 = \frac{12}{9}$.

$V(X) = E(X^2) - [E(X)]^2 = \frac{12}{9} - \left(\frac{8}{9}\right)^2 = \frac{44}{81}$

$\sigma(X) = \frac{2\sqrt{11}}{9}$

---

25 page 214

Jules perd 10 jetons lorsque Jim tire deux cartes rouges ($R_1 \cap R_2$) ou deux cartes noires ($N_1 \cap N_2$).

$P(R_1 \cap R_2) = P((R_1) \times P_{R_1}(R_2) = \frac{16}{32} \times \frac{15}{31} = \frac{1}{2} \times \frac{15}{31}$ et $P(N_1 \cap N_2) = P((N_1) \times P_{N_1}(N_2) = \frac{1}{2} \times \frac{15}{31}$

$P(X = -10) = 2 \times \frac{1}{2} \times \frac{15}{31} = \frac{15}{31}$.

Jules gagne 10 jetons lorsque Jim tire deux cartes de couleurs différentes ($R_1 \cap N_2$) ou deux cartes noires ($N_1 \cap R_2$).

$P(R_1 \cap N_2) = P((R_1) \times P_{R_1}(N_2) = \frac{1}{2} \times \frac{16}{31}$ et $P(N_1 \cap R_2) = P((N_1) \times P_{N_1}(R_2) = \frac{1}{2} \times \frac{16}{31}$

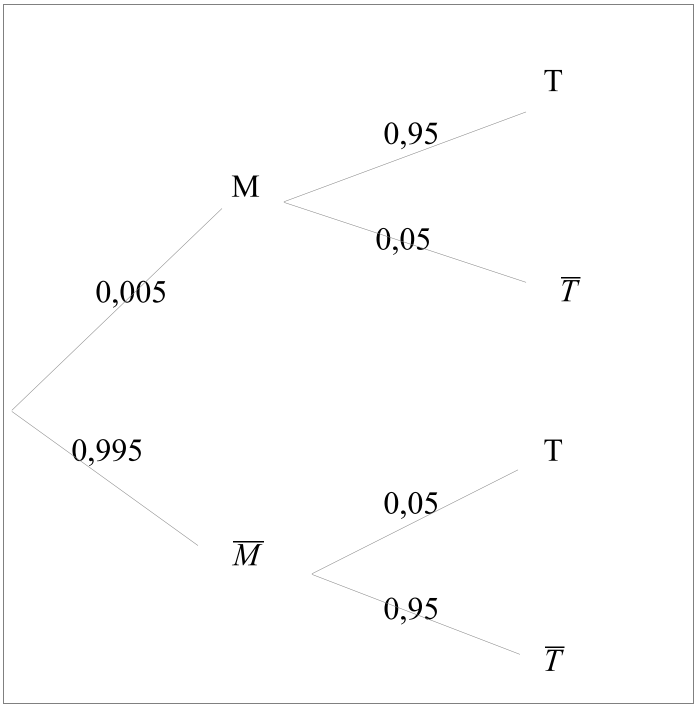
$P(X = +10) = 2 \times \frac{1}{2} \times \frac{16}{31} = \frac{16}{31}$.

$E(X) = -10 \times \frac{15}{31} + 10 \times \frac{16}{31} = \frac{10}{31}$

Le jeu n'est pas équitable ($E(X) \neq 0$)

---

27 page 214



1) T "le test est positif"
M "l'individu est atteint de la maladie"
$P_M(T) = 0{,}95$ Sachant qu'un individu est malade, le test est positif dans 95 % des cas.
$P_{\overline{M}}(\overline{T}) = 0{,}95$ Sachant qu'un individu est sain, le test est négatif dans 95 % des cas.
2) $P(M) = \dfrac{0{,}5}{100} = \dfrac{5}{1000} = 0{,}005$
On cherche $P_T(M)$. La personne est malade sachant que le test est positif.
Or, $P_T(M) = \dfrac{P(T \cap M)}{P(T)}$
$P(T \cap M) = P(M) \times P_M(T) = 0{,}005 \times 0{,}95$
et, M et $\overline{M}$ forment une partition de l'univers, d'où, d'après la loi de probabilités totales:
$P(T) = P(T \cap M) + P(T \cap \overline{M}) = 0{,}005 \times 0{,}95 + (1 - 0{,}005) \times (1 - 0{,}95)$
$P_T(M) = \dfrac{0{,}005 \times 0{,}95}{0{,}005 \times 0{,}95 + 0{,}995 \times 0{,}05} = \ldots \approx 0{,}0871\ldots$

Complément de l'arbre du N° 27 page 214

	T	$\overline{T}$	*Total*
M	*475*	*25*	*500*
$\overline{M}$	*4975*	*94525*	*99500*
Total	*5450*	*94550*	*100000*

Sur 100 000 personnes, 500 sont malades (0,5%)

Sur ces 500 malades, $0{,}95 \times 500 = 475$ réagissent au test (95%)

Il y a donc 99 500 personnes saines

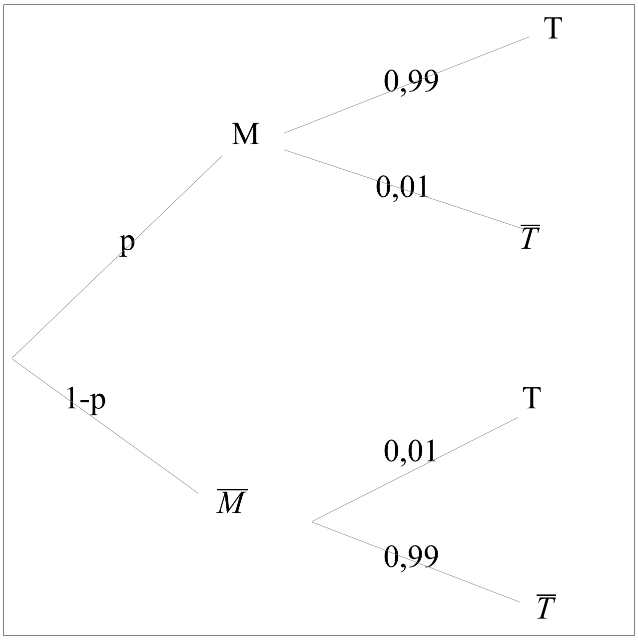
et parmi ces 99 500 personnes, $0{,}95 \times 99500 = 94\,525$ ne réagissent pas au test (95%)

On obtient: 99 500 – 94 525 = 4 975 personnes saines qui réagissent au test.

Le nombre de personnes réagissant au test est 475 + 4 975 = 5450

La proportion de personnes saines parmi les tests positifs est: $\frac{4975}{5450} = 91{,}3\%$ $\quad P_T(\overline{M})$

La proportion de personnes malades parmi les tests positifs est: $\frac{475}{5450} = 8{,}7\%$ $\quad P_T(M)$



Commentaires: un test de ce type ne "teste" pas grand chose.
Plus généralement: soit p la probabilité d'être atteint d'une maladie $P(M)=p$. Supposons $P_M(T)=0{,}99$ et $P_{\overline{M}}(\overline{T})=0{,}99$ (meilleur que dans l'exercice)
Le test est intéressant lorsqu'il détecte les malades, c'est-à-dire lorsque , sachant que le test est positif, la personne est malade avec une probabilité "forte".

On calcule donc, $P_T(M)$
Or, $P(T \cap M)=0{,}99\,p$ et $P(T)=0{,}99\,p+0{,}01(1-p)=0{,}98\,p+0{,}01$

$$P_T(M)=\frac{0{,}99\,p}{0{,}98\,p+0{,}001} = \frac{99\,p}{98\,p+1}$$

En faisant un tableau avec la variable *p*, le test est à plus de 90 % lorsque $p \geqslant 0{,}1$
Si la maladie est trop rare, le test ne prouve rien.

---

28 page 214

Trois machines *A, B*, *C* produisent respectivement 60 %, 30 % et 10 % du nombre de boulons et le pourcentage de boulons défectueux est respectivement 2 %, 3 %, 4%.

	A	**B**	**C**	**Total**
D	$0{,}02 \times 60 = 1{,}2$	$0{,}03 \times 30 = 0{,}9$	$0{,}04 \times 10 = 0{,}4$	2,5
$\overline{D}$				
Total	60	30	10	100

Le tirage est au hasard (hypothèse d'équiprobabilité).

1) Soit D l'événement: " Un boulon est défectueux "

$$P(D) = P(D \cap A) + P(D \cap B) + P(D \cap C) = \frac{2}{100} \times \frac{60}{100} + \frac{3}{100} \times \frac{30}{100} + \frac{4}{100} \times \frac{10}{100} = \frac{2{,}5}{100} = \frac{25}{1000}$$

2) Sachant que le boulon est défectueux, la probabilité qu'il ait été produit par la machine C est:

$$P_D(C) = \frac{P(D \cap C)}{P(D)} = \frac{4}{25} = \frac{16}{100}.$$

---

29 page 214

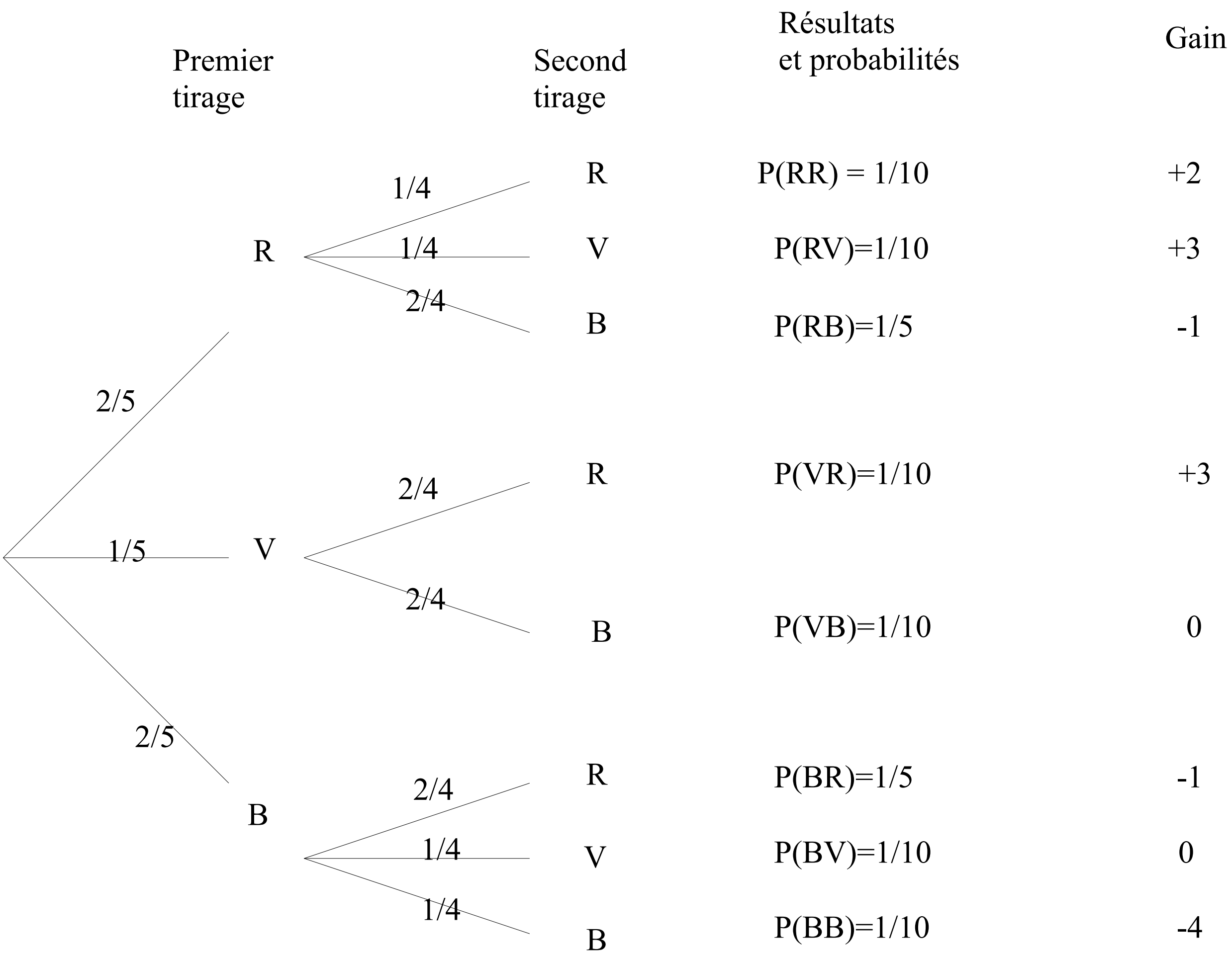
L'urne contient deux boules rouges R_1 et R_2, une boule verte notée V et deux boules bleues notées B_1 et B_2.
On tire sans remise entre les deux tirages deux boules.
Un résultat est donc un **couple**.
Tous les résultats sont équiprobables.
1) Voir arbre

Résultats $P(RR) = \frac{2}{5} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{10}$, $P(RV) = \frac{2}{5} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{10}$, $P(RB) = \frac{2}{5} \times \frac{2}{4} = \frac{1}{5}$

$P(VR) = \frac{1}{5} \times \frac{2}{4} = \frac{1}{10}$, $P(VB) = \frac{1}{5} \times \frac{2}{4} = \frac{1}{10}$

$P(BR) == \frac{2}{5} \times \frac{2}{4} = \frac{1}{5}$, $P(BV) = \frac{2}{5} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{10}$, $P(BB) = \frac{2}{5} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{10}$

2) Une boule rouge tirée rapporte 1 €, une boule verte 2 €, une boule bleue – 2 €.



X est la variable aléatoire donne le gain (algébrique)
a) L'univers image est:
–4 (BB), –1 (BR) ou (RB), 0 (BV) ou (VB), +2 (RR), +3 (RV) ou (VR)

b)

X	–4	–1	0	2	3	Total
P	$\frac{1}{10}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{5}$	1
$P_i \times x_i$	$-\frac{2}{5}$	$-\frac{2}{5}$	0	$\frac{1}{5}$	$\frac{3}{5}$	E(X) = 0

30 page 215

A est l'événement " obtenir PILE la première fois "

B est l'événement " obtenir PILE la seconde fois "

C est l'événement " obtenir le même résultat les deux fois "

L'univers est constitué des couples {(pile, pile), (pile, face), (face, pile), (face, face)}

A = {(pile, pile), (pile, face)}

B = {(pile, pile), (face, pile)}

$A \cap B$ = {(pile, pile)}

Si la pièce est bien équilibrée: $P(A) = \frac{1}{2}$ (deux issues favorables à A pour 4 issues)

$P(B) = \frac{1}{2}$ (deux issues favorables à B pour 4 issues)

$A \cap B$ est l'événement " obtenir le couple (pile, pile) ". $P(A \cap B) = \frac{1}{4}$

Puisque $P(A)\times P(B) = P(A \cap B)$, les événements A et B sont indépendants.

C = {(pile, pile), (face, face)}

$A \cap C$ = {(pile, pile)}

$P(C) = \frac{1}{2}$ (deux issues favorables à C pour 4 issues)

$A \cap C = \frac{1}{4}$

Puisque $P(A)\times P(C) = P(A \cap C)$, les événements A et C sont indépendants.

$D = B \cap C$ = {(pile, pile)}

$A \cap (B \cap C)$ = {(pile, pile)}

$P(B \cap C) = \frac{1}{4}$

$P(A) \times P(B \cap C) = \frac{1}{8}$ et $P(A \cap (B \cap C)) = \frac{1}{4}$

les événements A et $B \cap C$ ne sont pas indépendants.

$E = B \cup C$ = {(pile, pile), (face, pile); (face, face)}

$P(B \cup C) = \frac{3}{4}$

$A \cap (B \cup C)$ = {(pile, pile)}

$P(A) \times P(B \cup C) = \frac{3}{8}$ et $P(A \cap (B \cup C)) = \frac{1}{4}$

les événements A et $B \cup C$ ne sont pas indépendants.

---

33 page 215

$P(A) = \frac{1}{4}$; $P(A \cup B) = \frac{1}{3}$; $P(B) = a$.

1) Si A et B sont **incompatibles** alors $P(A \cap B) = 0$

$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$ mène à $a = \frac{1}{12}$

$P_A(B) = P_B(A) = 0$

2) Si A et B sont **indépendants** alors $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$

$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$ mène à $a = \frac{1}{9}$

$P_A(B) = P(B) = \frac{1}{9}$ et $P_B(A) = P(A) = \frac{1}{4}$.

3) Si A est une partie de B alors $A \cup B = B$

$P(B) = P(A \cup B) = \frac{1}{3}$.

$P_A(B) = 1$ (car, $P(A \cap B) = P(A)$)

$$P_B(A) = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{1}{3}} = \frac{3}{4}$$

---

35 page 214

Répartition des 30 élèves

Sur 100 personnes interrogées, 45 utilisent un produit A, 50 utilisent un produit B et 20 n'utilisent ni A, ni B.

	P (Photo)	$\overline{P}$	**Total**
T (Théâtre)	2	4	6
$\overline{T}$	8	16	24
Total	10	20	30

1) P(P) = $\frac{10}{30} = \frac{1}{3}$ et P(T) = $\frac{6}{30} = \frac{1}{5}$.

P(P ∩ T) = $\frac{2}{30} = \frac{1}{15}$

Comme P(P ∩ T) = P(P)×P(T) les événements P et T sont indépendants.

2) L'univers est réduit aux élèves du club photo (10 éléments).

T_1 : « le premier élève appartient au club théâtre » P(T_1) = $\frac{2}{10} = \frac{1}{5}$

b) T_2 : « le deuxième élève appartient au club théâtre »

P_{T_1} (T_2) = $\frac{1}{9}$ car, sachant que le premier élève tiré appartient au club théâtre, il reste un élève sur les 9 qui appartient au club théâtre.

$P_{\overline{T_1}}$(T_2) = $\frac{2}{9}$ car, sachant que le premier élève tiré n'appartient pas au club théâtre, il reste deux élèves sur les 9 qui appartiennent au club théâtre.

P($T_2 \cap T_1$) = P(T_1)× P_{T_1} (T_2) = $\frac{1}{5} \times \frac{1}{9} = \frac{1}{45}$

P($T_2 \cap \overline{T_1}$) = P($\overline{T_1}$)× $P_{\overline{T_1}}$ (T_2) = $(1 - \frac{1}{5}) \times \frac{2}{9} = \frac{8}{45}$

c) P(T_2) = P($T_2 \cap T_1$) + P($T_2 \cap \overline{T_1}$) = $\frac{1}{45} + \frac{8}{45} = \frac{9}{45} = \frac{1}{5}$ = 0,2

---

37 page 216

Analyse de l'expérience aléatoire:

On dispose de deux jeux de 32 cartes.

On peut toujours supposer un jeu n°1 et un jeu n°2.

On tire **au hasard une** carte dans **chacun** des jeux.

On est dans l'hypothèse d'**équiprobabilité**.

Par exemple:

P("Tirer un cœur du jeu n°1") = P("Tirer un cœur du jeu n°2") = $\frac{8}{32} = \frac{1}{4}$

D'autre part

"Tirer une carte du jeu n°1" et "tirer une carte du jeu n°2" sont des événements **indépendants.**

Par exemple:

La probabilité de tirer "le roi de trèfle ET un cœur" est $\frac{1}{32} \times \frac{1}{4} + \frac{1}{4} \times \frac{1}{32}$ (Le roi de trèfle du jeu n°1 et un cœur du jeu n°2) ou (un cœur du jeu n°1 et le roi de trèfle du jeu n°2)

Réponses aux questions:

A : tirer au moins une fois l'as de cœur"

Une méthode:

L' événement $\overline{A}$ est "ne pas tirer l'as de cœur"

d'où P($\overline{A}$) = $\frac{31}{32} \times \frac{31}{32}$ et P(A) = $1 - \frac{31^2}{32^2} = \frac{32^2 - 31^2}{32^2} = \frac{(32-31)(32+31)}{32^2} = \frac{63}{1024}$

Une autre méthode

On appelle E l'événement "tirer l'as de cœur du jeu n°1", F: "tirer l'as de cœur du jeu n°2"

A est la réunion disjointe de $(E \cap F) \cup (E \cap \overline{F}) \cup (\overline{E} \cap F)$

$P(A) = P(E \cap F) + P(E \cap \overline{F}) + P(\overline{E} \cap F) = \frac{1}{32} \times \frac{1}{32} + \frac{1}{32} \times \frac{31}{32} + \frac{31}{32} \times \frac{1}{32} = \frac{63}{1024}$

B "tirer une et une seule fois l'as de cœur"

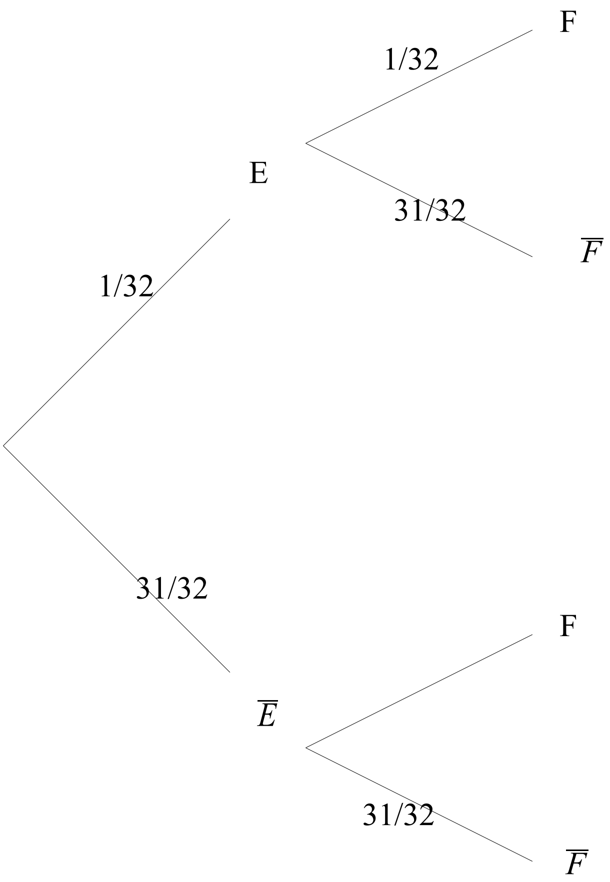
Avec les notations précédentes: $P(B) = P(E \cap \overline{F}) + P(\overline{E} \cap F) = \frac{1}{32} \times \frac{31}{32} + \frac{31}{32} \times \frac{1}{32} = \frac{62}{1024} = \frac{31}{512}$

ou encore

En appelant C "tirer les deux as de cœur" $C = E \cap F$

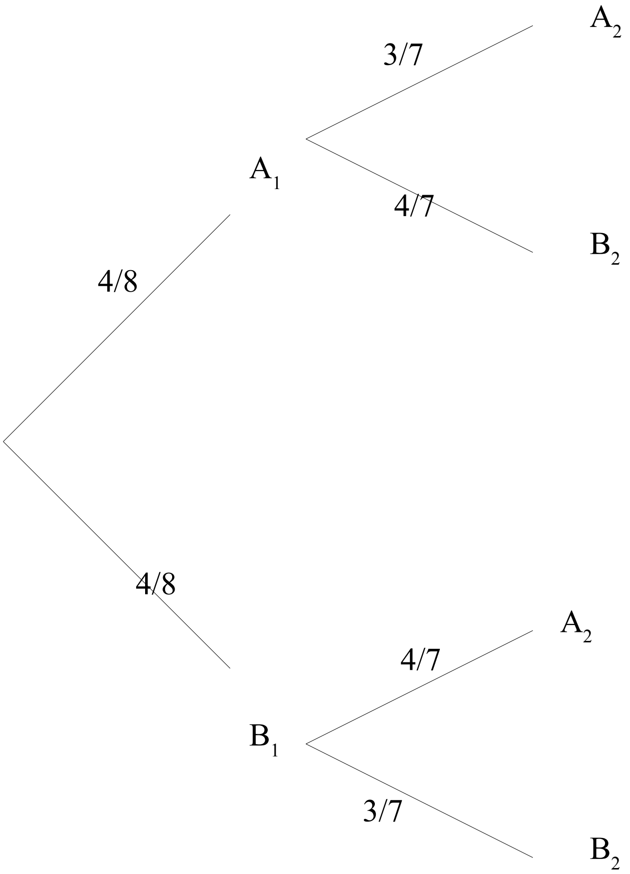
$P(B) = P(A) - P(C) = \frac{63}{1024} - \frac{1}{1024} = ...$

Un arbre de probabilité:



38 page 214

Un paquet de huit cartes: quatre valets et quatre rois.
On choisit l'une après l'autre et **sans remise** deux cartes.



a) A: "on obtient deux rois"
Soit A_1 : " la première carte est un roi " et A_2 : " la seconde carte est un roi ".
On tire une carte parmi 8 cartes.
Le nombre de cas favorables (nombre de rois) est 4, le nombre de cas possibles est 8.
La carte n'est pas remise. Il reste 7 cartes dont 3 rois.

$A = A_1 \cap A_2$ et $P(A) = P(A_1) \times P_{A_1}(A_2) = \frac{4}{8} \times \frac{3}{7} = \frac{3}{14}$

b) Soit B_1 : "la première carte est un valet"
On a tiré la première carte , c'est un valet.
Il reste 7 cartes dont 4 rois.
On cherche: $P_{B_1}(A_2) = \frac{4}{7}$ (Probabilité d'avoir un roi sachant que la première carte est un valet)

Complément:
La probabilité d'obtenir exactement un roi est:
P(un et un seul roi) = P(A1 ∩ B2) + P(B1 ∩ A2) = $\frac{4}{8} \times \frac{4}{7} + \frac{4}{8} \times \frac{4}{7} = \frac{4}{7}$
La probabilité d'obtenir " au moins un roi " est : P(au moins un roi) = $\frac{4}{7} + \frac{3}{14} = \frac{11}{14}$
ou encore P(au moins un roi) = 1 – P(aucun roi) = 1 – $\frac{3}{14} = \frac{11}{14}$

---

39 page 216

Une urne *U* contient une boule blanche et trois rouges.

Une urne V contient cinq boules blanches et trois rouges.

On tire au hasard une boule dans chacune des urnes et on les change d'urne.

A: " l'urne U ne contient que des boules rouges "

A est réalisé lorsqu'on a tiré l'unique boule blanche dans U **et** une boule rouge dans V.

Les événements " tirer l'unique boule blanche dans U " et " tirer une boule rouge dans V " sont indépendants.

P(boule blanche dans U) = $\frac{1}{4}$ (hypothèse d'équiprobabilité)

P(une boule rouge dans V) = $\frac{3}{8}$.

$P(A) = \frac{1}{4} \times \frac{3}{8} = \frac{3}{32}$

B: " chacune des urnes a la même composition qu'au départ "

B est réalisé lorsque:

- on a tiré l'unique boule blanche dans U **et** une boule blanche dans V. (B_1)
- on a tiré une boule rouge dans U **et** une boule rouge dans V. (B_2)

$B = B_1 \cup B_2$

Ces deux événements B_1 et B_2 sont **incompatibles** (ou disjoints), d'où, $P(B) = P(B_1 \cup B_2) = P(B_1) + P(B_2)$

Le calcul de $P(B_1)$ et de $P(B_2)$ est semblable à celui de $P(A)$.

$P(B_1) = \frac{1}{4} \times \frac{5}{8} = \frac{5}{32}$, $P(B_2) = \frac{3}{4} \times \frac{3}{8} = \frac{9}{32}$.

$P(B) = \frac{5}{32} + \frac{9}{32} = \frac{14}{32} = \frac{7}{16}$

Autre-méthode:

$\overline{B}$ est l'événement: " la composition des urnes a changé "

Cette composition a changé lorsque les boules tirées dans U et dans V sont de couleur différente.

On a alors $P(\overline{B}) = P(A) + P(C)$ avec C " on a tiré une boule rouge dans U **et** une boule blanche dans V. "

$P(C) = \frac{3}{4} \times \frac{5}{8} = \frac{15}{32}$.

$P(\overline{B}) = \frac{3}{32} + \frac{15}{32} = \frac{18}{32} = \frac{9}{16}$

$P(B) = 1 - \frac{9}{16} = \frac{7}{16}$.

Complément:

On peut modifier l'énoncé ainsi: (en rouge les modifications) (en vert les conséquences ...)

Une urne U contient une boule blanche et trois rouges.

Une urne V contient cinq boules blanches et trois rouges.

On tire au hasard une boule dans l'urne U , on la met dans l'urne V , puis, on tire une boule dans l'urne V et on la met dans l'urne U.

A: " l'urne U ne contient que des boules rouges "

A est réalisé lorsqu'on a tiré l'unique boule blanche dans U **et** une boule rouge dans V.

Les événements " tirer l'unique boule blanche dans U " et " tirer une boule rouge dans V " **ne sont pas indépendants.**

P(boule blanche dans U) = $\frac{1}{4}$ (hypothèse d'équiprobabilité)

P(une boule rouge dans V) = $\frac{3}{9}$ car l'urne V contient maintenant neuf boules (6 blanches et 3 rouges)

$P(A) = \frac{1}{4} \times \frac{3}{9} = \frac{3}{36} = \frac{1}{12}$

B: " chacune des urnes a la même composition qu'au départ "

B est réalisé lorsque:

- on a tiré l'unique boule blanche dans U **et** une boule blanche dans V. (B_1)
- on a tiré une boule rouge dans U **et** une boule rouge dans V. (B_2)

$B = B_1 \cup B_2$

Ces deux événements B_1 et B_2 sont **incompatibles** (ou disjoints), d'où, $P(B) = P(B_1 \cup B_2) = P(B_1) + P(B_2)$

Le calcul de $P(B_1)$ et de $P(B_2)$ est semblable à celui de $P(A)$.

$P(B_1) = \frac{1}{4} \times \frac{6}{9} = \frac{6}{36}$, $P(B_2) = \frac{3}{4} \times \frac{4}{9} = \frac{12}{36}$

$P(B) = \frac{6}{36} + \frac{12}{36} = \frac{18}{36} = \frac{1}{2}$.

Autre-méthode:

$\overline{B}$ est l'événement: " la composition des urnes a changé "

Cette composition a changé lorsque les boules tirées dans U et dans V sont de couleur différente.

On a alors $P(\overline{B}) = P(A) + P(C)$ avec C " on a tiré une boule rouge dans U **et** une boule blanche dans V. "

$P(C) = \frac{3}{4} \times \frac{5}{9} = \frac{15}{36}$.

$P(\overline{B}) = \frac{3}{36} + \frac{15}{36} = \frac{18}{36} = \frac{1}{2}$

$P(B) = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$.

---

50 page 217

Partie A:

$P(G_1) = P(P_1) = \frac{1}{2}$

$P_{G1}(G_2) = 0{,}6 \quad P_{P1}(P_2) = 0{,}7$

d'où $P_{P1}(G_2) = 1 - 0{,}7 = 0{,}3$

$P(G_2) = P(G_1)\times P_{G1}(G_2) + P(P_1)\times P_{P1}(G_2)$

$= \frac{1}{2}\times 0{,}6 + \frac{1}{2}\times 0{,}3 = 0{,}45$

$P(P_2) = 1 - 0{,}45 = 0{,}55$

Partie B

1) $P_{Pn}(P_{n+1}) = 0{,}7$ et $P_{Gn}(G_{n+1}) = 0{,}6$ (Énoncé)

2) D'après la partie A/, on a: $x_1 = y_1 = \frac{1}{2}$

$x_{n+1} = P(G_{n+1}) = P(G_n)\times P_{Gn}(G_{n+1}) + P(P_n)\times P_{Pn}(G_{n+1})$

$= x_n\times 0{,}6 + y_n\times(1 - 0{,}7)$

$y_{n+1} = P(P_{n+1}) = P(G_n)\times P_{Gn}(P_{n+1}) + P(P_n)\times P_{Pn}(P_{n+1})$

$= x_n\times(1 - 0{,}6) + y_n\times 0{,}7$

d'où, $\begin{cases} x_{n+1}=0{,}6\,x_n+0{,}3\,y_n \\ y_{n+1}=0{,}4\,x_n+0{,}7\,y_n \end{cases}$

3) $v_n = x_n + y_n = 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ (les événements G_n et P_n forment une partition de l'univers)

(w_n) définie par $w_n = 4x_n - 3y_n$

$w_{n+1} = 4x_{n+1} - 3y_{n+1} = 4(0{,}6x_n + 0{,}3y_n) - 3(0{,}4x_n + 0{,}7y_n)$

$= 1{,}2x_n - 0{,}9y_n = 0{,}3(4x_n - 3y_n) = 0{,}3w_n$

Donc (w_n) est une suite géométrique de raison 0,3 et de premier terme $w_1 = 4x_1 - 3y_1 = \frac{1}{2}$

$w_n = \frac{1}{2}\,0{,}3^{n-1}$

4 a) $\begin{cases} x_n+y_n=1 \\ 4\,x_n-3\,y_n=\frac{1}{2}0{,}3^{n-1} \end{cases} \begin{pmatrix} L1 \\ L2 \end{pmatrix}$

En faisant 3×(L1) + (L2), on a: $7x_n = 3 + \frac{1}{2}\,0{,}3^{n-1}$ $\quad x_n = \frac{1}{7}\left(3 + \frac{1}{2}\,0{,}3^{n-1}\right)$

En faisant 4×(L1) – (L2), on a: $7y_n = 4 - \frac{1}{2}\,0{,}3^{n-1}$ $\quad y_n = \frac{1}{7}\left(4 - \frac{1}{2}\,0{,}3^{n-1}\right)$

---

51 page 218

P_i : probabilité pour que C_i touche la cible E. On note E_i cet événement.

$1-P_i$: probabilité pour que C_i ne touche pas la cible E. $(\bar{E}_i)$

Soit A l'événement: "E est touché par au moins un chasseur".

$\bar{A}$: "E n'est touché par aucun chasseur". $\bar{A}=\bar{E}_1\cap\bar{E}_2\cap\bar{E}_3$

Les événements étant indépendants, $P(\bar{a})=P(\bar{E}_1)\times P(\bar{E}_2)\times P(\bar{E}_3)=(1-P_1)(1-P_2)(1-P_3)$

$P(A)=1-P(\bar{A})=1-(1-P_1)(1-P_2)(1-P_3)$

Application: $P_1=0{,}1$, $P_2=0{,}2$, $P_3=0{,}3$. $1-P_1=0{,}9$; $1-P_2=0{,}8$, $1-P_3=0{,}7$

$P(\bar{A})=0{,}9\times 0{,}8\times 0{,}7=0{,}504$ $\qquad P(A)=1-0{,}504=0{,}496$

---

57 page 219

Étant donné l'hypothèse d'équiprobabilité: P(AA)=0,25, P(Aa)=0,5 et P(aa)=0,25

---

58 page 219

a) Voir n°66: $P(mm)=0{,}25$

(En notant A l'événement "les deux parents sont porteurs", on a: $P_A(mm)=0{,}25$)

b) 1 personne sur 25 est porteuse (Nm). Soit A l'événement le couple est porteur. $P(A)=\frac{1}{25}\times\frac{1}{25}$

Un enfant est atteint lorsque les deux parents sont porteurs **et** que l'enfant a le génotype (mm): $A\cap(mm)$

$P(A\cap(mm))=P_A(mm)\times P(A)=\frac{1}{4}\times\frac{1}{25}\times\frac{1}{25}=0{,}0004$

---

59 page 219

a) Voir n°66: E={(AA),(Aa)}, F={(aa)}, G={(Aa)} P(E)=0,25+0,5=0,75, P(F)=0,25, P(G)=0,5

b) $P(E\cap G)=P(G)=0{,}5$ et $P(E)\times P(G)=0{,}75\times 0{,}5=0{,}375$ E et G ne sont pas indépendants

$P(F\cap G)=P(\emptyset)=0$ et $P(F)\times P(G)=0{,}25\times 0{,}5=0{,}125$ F et G ne sont pas indépendants

Remarque: F et G sont incompatibles

c) $P_G(E)=1$ et $P_F(G)=0$

---

60 page 219

Descendance d'une plante autoféconde homozygote de génotype (AA) (idem avec (aa) en remplaçant A par a)

parent 2 / parent 1	A	A
A	AA	AA
A	AA	AA

La descendance est une plante de même génotype (AA) (respectivement (aa)

La probabilité d'avoir un descendant hétérozygote est nulle dans ce cas

Descendance d'une plante autoféconde hétéroygote de génotype (Aa)

parent 2 / parent 1	A	a

A	AA	Aa
a	aA	aa

La probabilité d'avoir un descendant hétérozygote est $\frac{1}{2}$ et celle d'avoir un descendant homozygote de génotype (AA) est $\frac{1}{4}$ et celle d'avoir un descendant homozygote de génotype (aa) est $\frac{1}{4}$

À la n[ième] génération: : E_n "génotype (AA)", F_n :"génotype (Aa)", G_n :"génotype(aa)"

$x_n = P(E_n)$, $y_n = P(F_n)$, $z_n = P(G_n)$

a) $x_0 = 0$, $y_0 = 1$ et $z_0 = 0$ (génération 0: plante hétérozygote: F_0)

b) $x_n + y_n + z_n = 1$, car, les événements E_n F_n et G_n forment une partition de l'univers.

c) $x_{n+1} = P(E_{n+1}) = P(E_{n+1} \cap E_n) + P(E_{n+1} \cap F_n) + P(E_{n+1} \cap G_n)$

$= P(E_n)\times P_{En}(E_{n+1}) + P(F_n)\times P_{Fn}(E_{n+1}) + P(G_n)\times P_{Gn}(E_{n+1})$ Formule de Bayes

$= x_n\times 1 + y_n\times \frac{1}{4} + z_n\times 0$

$= x_n + \frac{1}{4} y_n$

$y_{n+1} = P(F_{n+1}) = P(F_{n+1} \cap E_n) + P(F_{n+1} \cap F_n) + P(F_{n+1} \cap G_n)$

$= P(E_n)\times P_{En}(F_{n+1}) + P(F_n)\times P_{Fn}(F_{n+1}) + P(G_n)\times P_{Gn}(F_{n+1})$ Formule de Bayes

$= x_n\times 0 + y_n\times \frac{1}{2} + z_n\times 0$

$= \frac{1}{2} y_n$

(y_n) est donc une suite géométrique de raison $\frac{1}{2}$ et de premier terme $y_0 = 1$, d'où $y_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n$

Comme $0 < \frac{1}{2} < 1$, la suite converge vers 0.

À long terme, les plantes hétérozygotes disparaissent.

$z_{n+1} = P(G_{n+1}) = P(G_{n+1} \cap E_n) + P(G_{n+1} \cap F_n) + P(G_{n+1} \cap G_n)$

$= P(E_n)\times P_{En}(G_{n+1}) + P(F_n)\times P_{Fn}(G_{n+1}) + P(G_n)\times P_{Gn}(G_{n+1})$ Formule de Bayes

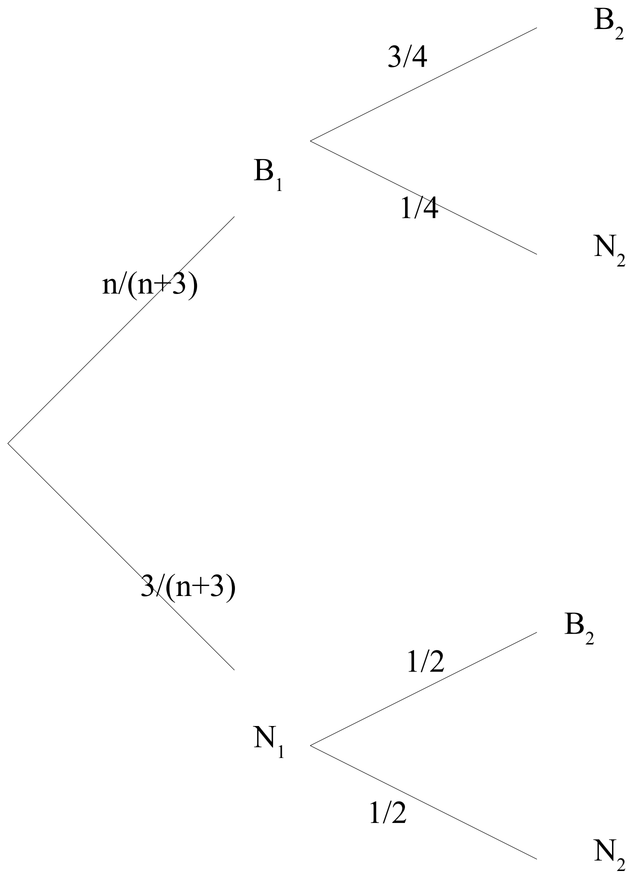
$= x_n\times 0 + y_n\times \frac{1}{4} + z_n\times 1$

$= \frac{1}{4} y_n + z_n$

Les plantes homozygotes dominent. Les deux suites (x_n) et (z_n)convergent vers 0,5

69 page 221

Arbre pondéré:



1) a) Événement A: "les urnes se retrouvent chacune dans leur configuration de départ" si et seulement si on tire une boule de même couleur dans les urnes U_1 et U_2

L'urne U_1 contient $n+3$ boules (*n* boules blanches et 3 boules noires)

U_2 contient 3 boules (2 blanches et 1 noire)

Lorsqu'on a placé une boule de U_1 dans U_2 , U_2 contient quatre boules.

L'événement *A* est donc la réunion de deux événements disjoints: A_1 " tirer une boule blanche de U_1 et tirer une boule blanche de U_2 " ou A_2 " tirer une boule noire de U_1 et tirer une boule noire de U_2 "

On est dans l'hypothèse d'équiprobabilité (au hasard) lors du tirage d'une boule dans une des urnes.

En notant: B_i avec $i=1$ ou 2 tirer une boule blanche de U_i et N_i tirer une boule noire de U_i, on a:

$p(A_1 \cup A_2) = p(A_1)+p(A_2)$ (Événements disjoints)

$$= p(B_1 \cap B_2)+p(N_1 \cap N_2)$$

$$= p_{B_1}(B_2)\times p(B_1)+p_{N_1}(N_2)\times p(N_1)$$

$$= \frac{3}{4}\times\frac{n}{n+3}+\frac{2}{4}\times\frac{3}{n+3}$$

$$= \frac{3(n+2)}{4(n+3)}$$

b) La limite de $p(A)$ lorsque n tend vers $+\infty$ est $\frac{3}{4}$ (factorisation de *n* ...)

2) Événement *B*: "L'urne U_2 ne contient qu'une boule blanche" si et seulement si on tire une boule noire de U_1 et une boule blanche de U_2 .

$p(B)=p(N_1\cap B_2)=p(N_1)\times p_{N_1}(B_2)=\frac{3}{n+3}\times\frac{2}{4}=\frac{3}{2(n+3)}$

3) La variable aléatoire *X* peut prendre trois valeurs: $-20\,;n-20\ \ et\ 2\mathrm{n}-20$ (gains algébriques).
a) Puisque le joueur mise 20 € , il ne peut espérer récupérer sa mise que si le gain maximal est supérieur à 20.
$2\mathrm{n}>20$ implique $n>10$

b) $p(X=2\mathrm{n}-20)=p(B)=\frac{3}{2(n+3)}$

$p(X=n-20)=p(A)=\frac{3(n+2)}{4(n+3)}$ car, U_2 contient deux boules blanches à la fin de l'épreuve seulement lorsque les urnes sont inchangées.

$p(X=-20)=1-\big(p(X=n)+p(X=2\mathrm{n})\big)=1-\frac{3(n+2)}{4(n+3)}-\frac{3}{2(n+3)}=\frac{4(n+3)-3\mathrm{n}-6-6}{4(n+3)}=\frac{n}{4(n+3)}$

On peut aussi faire un calcul directement: Soit l'événement $(X=-20)$ *,* U_2 *contient trois boules blanches si et seulement si on tire une boule blanche de* U_1 *et une boule noire de* U_2 *, ce qui donne* $p(X=-20)=\frac{n}{n+3}\times\frac{1}{4}$

c) L'espérance mathématique

$$E(X)=-20\times\frac{n}{4(n+3)}+(n-20)\times 3\frac{(n+2)}{4}(n+3)+(2\mathrm{n}-20)\times\frac{3}{2(n+3)}$$
$$=\frac{3\mathrm{n}^2+6\mathrm{n}+12\mathrm{n}-20\mathrm{n}-60\mathrm{n}-120-120}{4(n+3)}=\frac{3\mathrm{n}^2-62\mathrm{n}-240}{4(n+3)}$$

d) Le jeu est favorable si et seulement si l'espérance mathématique est strictement positive.
On doit donc avoir: $n>10$ et $3\mathrm{n}^2-62\mathrm{n}-240>0$

L'étude du second degré (**à faire**) donne: $3\mathrm{n}^2-62\mathrm{n}-240$ s'annule pour $n=\frac{-10}{3}$ et $n=24$

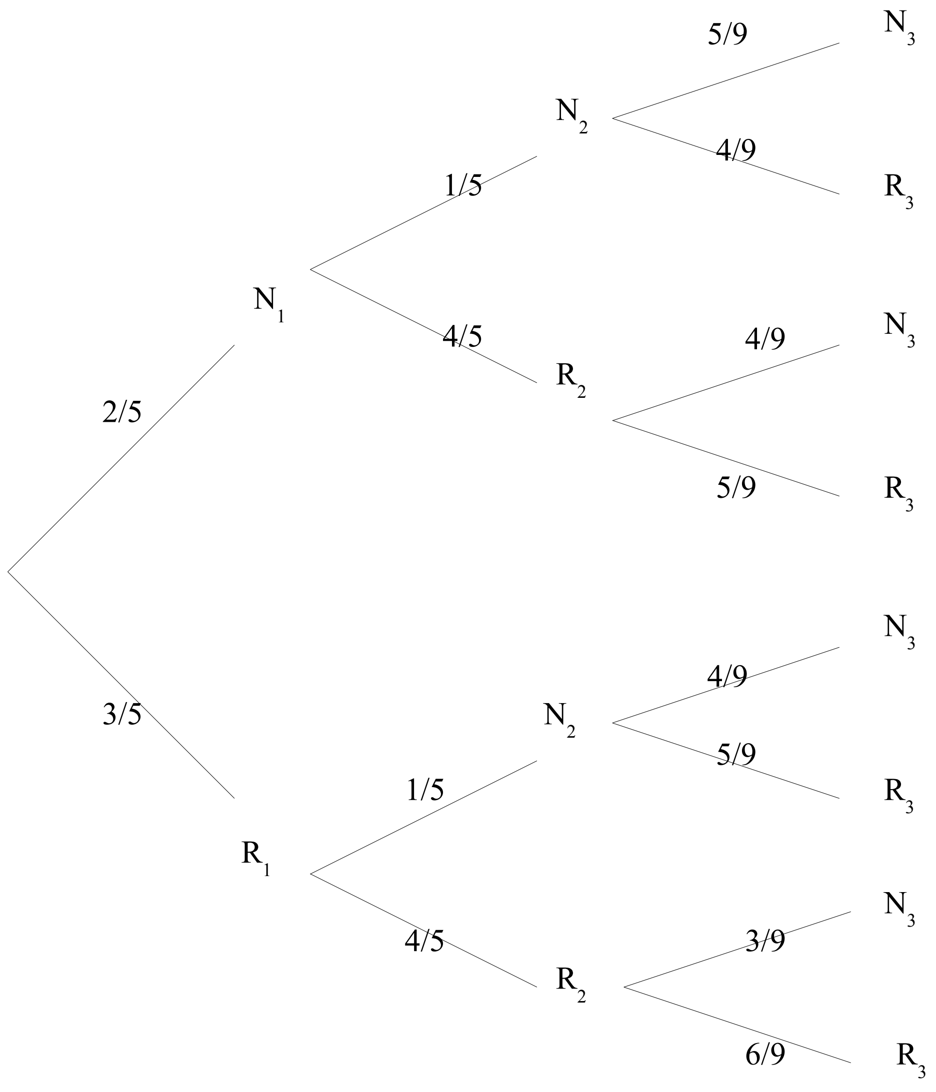
Le coefficient de n^2 strictement positif et la condition $n>10$ impliquent alors: $n\geq 25$

A page 222 (Baccalauréat S La Réunion juin 2005)

Premier tirage dans l'urne U1 contenant 2N et 3R

Deuxième tirage dans l'urne U2 contenant 1N et 4R

Troisième tirage dans l'urne U3 la composition de l'urne dépend des tirages précédents: l'urne contient 9 boules



2 a) $P(N_1 \cap N_2 \cap N_3) = \frac{2}{5} \times \frac{1}{5} \times \frac{5}{9} = \frac{10}{225} = \frac{2}{45}$ (l'urne U_3 est composée de 9 boules dont 5 noires après le tirage de deux boules noires (une dans U_1, l'autre dans U_2) placées dans cette urne)

$P(N_1 \cap R_2 \cap N_3) = \frac{2}{5} \times \frac{4}{5} \times \frac{4}{9} = \frac{32}{225}$ (l'urne U_3 est composée de 9 boules dont 4 noires après le tirage d'une boule noire dans l'une dans U_1 placée dans cette urne)

b) Comme N_2 et R_2 réalisent une partition de l'univers, on a:

$P(N_1 \cap N_3) = P(N_1 \cap N_2 \cap N_3) + P(N_1 \cap R_2 \cap N_3) = \frac{10}{225} + \frac{32}{225} = \frac{42}{225} = \frac{14}{75}$

c) P($R_1 \cap N_3$) = P($R_1 \cap N_2 \cap N_3$) + P($R_1 \cap R_2 \cap N_3$)

$$= \frac{3}{5} \times \frac{1}{5} \times \frac{4}{9} + \frac{3}{5} \times \frac{4}{5} \times \frac{3}{9} = \frac{12}{225} + \frac{36}{225} = \frac{48}{225} = \frac{16}{75}$$

3) Comme N_1 et R_1 réalisent une partition de l'univers, on a:

P(N_3) = P($N_1 \cap N_3$) + P($R_1 \cap N_3$) = $\frac{42}{225} + \frac{48}{225} = \frac{90}{225} = \frac{2}{5}$

4) P(N_1) = $\frac{2}{5}$, P(N_3) = $\frac{2}{5}$ et P($N_1 \cap N_3$) = $\frac{14}{75}$

Comme $\frac{2}{5} \times \frac{2}{5} \neq \frac{14}{75}$, les événements N_1 et N_3 ne sont pas indépendants.

5) Sachant que la boule tirée dans U_3 est noire, on cherche la probabilité d'avoir tirée une boule rouge dans U_1, soit, $P_{N_3}(R_1) = \frac{P(N_3 \cap R_1)}{P(N_3)} = \frac{48 \times 225}{225 \times 90} = \frac{8}{15}$

ou encore

$$P_{N_3}(R_1) = 1 - P_{N_3}(N_1) = 1 - \frac{P(N_3 \cap N_1)}{P(N_3)} = 1 - \frac{42 \times 225}{225 \times 90} = 1 - \frac{7}{15} = \frac{8}{15}$$

---

exercice C page 222 Baccalauréat S Centres étrangers juin 2004

Un employé se rend à son travail en bus. S'il est à l'heure, il prend le bus de ramassage gratuit mis à disposition par l'entreprise, s'il est en retard, il prend le bus de la ville, il lui en coûte 1,50 €.

Si l'employé est à l'heure un jour donné, la probabilité qu'il soit en retard le lendemain est $\frac{1}{5}$; s'il est en retard un jour donné la probabilité qu'il soit en retard le lendemain est $\frac{1}{20}$.

Pour tout entier naturel non nul *n*, on appelle R_n l'évènement : « l'employé est en retard le jour *n* ». On note p_n, la probabilité de R_n et q_n, celle de $\overline{R_n}$. On suppose que $p_1 = 0$.

1. Détermination d'une relation de récurrence.

(Voir l'arbre de probabilité à la fin de l'exercice)

a. Déterminer les probabilités conditionnelles $p_{Rn}(R_{n+1})$ et $p_{\overline{Rn}}(R_{n+1})$.

$p_{Rn}(R_{n+1}) = \frac{1}{20}$ (Traduction de la phrase: s'il est en retard un jour donné la probabilité qu'il soit en retard le lendemain est $\frac{1}{20}$.)

$p_{\overline{Rn}}(R_{n+1}) = \frac{1}{5}$ (Traduction de la phrase: Si l'employé est à l'heure un jour donné, la probabilité qu'il soit en retard le lendemain est $\frac{1}{5}$.)

b. Déterminer $p(R_{n+1} \cap R_n)$ en fonction de p_n et $p(R_{n+1} \cap \overline{R_n})$ en fonction de q_n.

$p(R_{n+1} \cap R_n) = p_{Rn}(R_{n+1}) \times p(R_n) = \frac{1}{20} p_n$.

$p(R_{n+1} \cap \overline{R_n}) = p_{\overline{Rn}}(R_{n+1}) \times p(\overline{R_n}) = \frac{1}{5} q_n$

c. Exprimer p_{n+1} en fonction de p_n et de q_n.

$p_{n+1} = p(R_{n+1}) = p(R_{n+1} \cap R_n) + p(R_{n+1} \cap \overline{R_n}) = \frac{1}{20} p_n + \frac{1}{5} q_n$

d. En déduire que $p_{n+1} = \frac{1}{5} - \frac{3}{20} p_n$.

Or, $p_n + q_n = 1$, d'où, $p_{n+1} = \frac{1}{20} p_n + \frac{1}{5}(1 - p_n) = \frac{1}{5} - \frac{3}{20} p_n$.

2. Étude de la suite (p_n)..

Pour tout entier naturel non nul *n*, on pose $v_n = p_n - \frac{4}{23}$.

a. Démontrer que (v_n) est une suite géométrique de raison $-\frac{3}{20}$.

$v_{n+1} = p_{n+1} - \frac{4}{23} = \frac{1}{5} - \frac{3}{20} p_n - \frac{4}{23}$

Or, $p_n = v_n + \frac{4}{23}$, d'où, $v_{n+1} = \frac{1}{5} - \frac{3}{20}(v_n + \frac{4}{23}) - \frac{4}{23} = -\frac{3}{20} v_n + \frac{1}{5} - \frac{3}{20} \times \frac{4}{23} - \frac{4}{23}$

Comme $\frac{1}{5} - \frac{3}{20} \times \frac{4}{23} - \frac{4}{23} = \frac{1}{5} - \frac{4}{23}(\frac{3}{20} + 1) = \frac{1}{5} - \frac{4}{23} \times \frac{23}{20} = \frac{1}{5} - \frac{1}{5} = 0$

On en déduit: $v_{n+1} = -\frac{3}{20} v_n$

(v_n) est une suite géométrique de raison $-\frac{3}{20}$ de premier terme $v_1 = 0 - \frac{4}{23} = -\frac{4}{23}$.

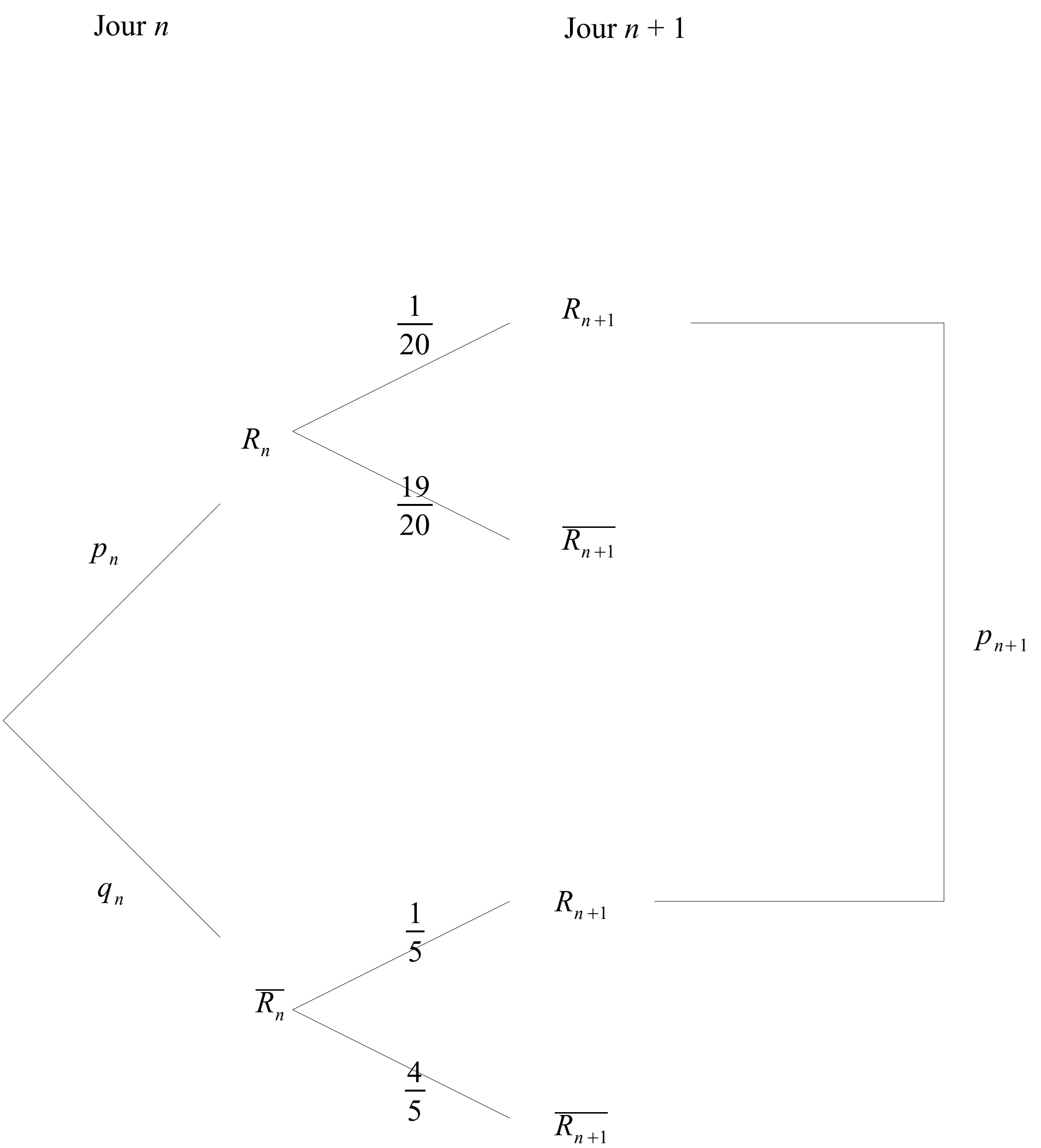
b. Exprimer v_n puis p_n en fonction de *n*.

Par conséquent: $v_n = -\frac{4}{23}\left(-\frac{3}{20}\right)^{n-1}$ et $p_n = -\frac{4}{23}\left(-\frac{3}{20}\right)^{n-1} + \frac{4}{23}$.

c. Justifier que la suite (p_n) est convergente et calculer sa limite.

Comme $-1 < -\frac{3}{20} < 1$, la suite géométrique (v_n) converge vers 0, et, la suite (p_n) converge vers $\frac{4}{23}$.

Arbre de probabilité



Exercice D page 223: D'après Asie Bac S juin 2005 (Complément à la fin)

remplacer à la troisième ligne « simultanément » par « successivement sans remise »

On verra dans le chapitre " loi de probabilité " comment traiter le cas général des tirages simultanés.

Une association organise une loterie pour laquelle une participation m exprimée en euros est demandée.
Un joueur doit tirer « successivement sans remise » ~~simultanément~~ au hasard, deux boules dans une urne contenant 2 boules vertes et 3 boules jaunes.
Si le joueur obtient deux boules de couleurs différentes, il a perdu.
Si le joueur obtient deux boules jaunes, il est remboursé de sa participation m.
Si le joueur obtient 2 boules vertes, il peut continuer le jeu qui consiste à faire tourner une roue où sont inscrits des gains répartis comme suit:

- sur $\frac{1}{8}$ de la roue le gain est de 100 €,
- sur $\frac{1}{4}$ de la roue le gain est de 20 €,

• sur le reste, le joueur est remboursé de sa participation *m*.
On appelle *V* l'évènement «le joueur a obtenu 2 boules vertes».
On appelle *J* l'évènement «le joueur a obtenu 2 boules jaunes».
On appelle *R* l'évènement «le joueur est remboursé de sa participation et ne gagne rien».

Analyse de la situation:
Tirages successifs sans remise.
L'univers est constitué de 20 couples
{(V1; V2), (V1, J1), (V1,J2), (V1, J3),
(V2; V1), (V2, J1), (V2,J2), (V2, J3),
(J1; V1), (J1, V2), (J1,J2), (J1, J3),
(J2; V1), (J2, V2), (J2,J1), (J2, J3),
(J3; V1), (J3, V2), (J3,J1), (J3, J2)}

Sur ces vingt issues, deux issues correspondent à l'événement *V* $P(V) = \frac{2}{20} = \frac{1}{10}$

Sur ces vingt issues, six issues correspondent à l'événement *J* $P(J) = \frac{6}{20} = \frac{3}{10}$

Sur ces vingt issues, douze issues correspondent à l'événement " deux boules de couleurs différentes "

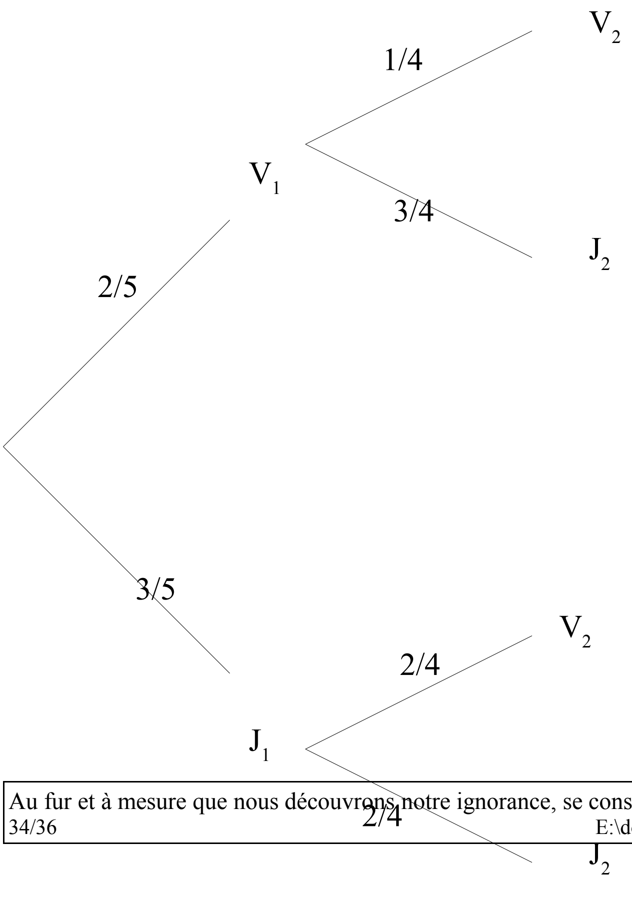
$$P(couleurs \neq) = \frac{12}{20} = \frac{6}{10}$$

La somme des probabilités vaut 1

Il n'est pas nécessaire d'écrire toutes ces issues mais seulement d'imaginer le nombre de possibilités qui amènent un des événements (voir l'arbre au 1 a)

Tirages simultanés de deux boules.
Dans ce cas, il ne s'agit plus de couples mais de paires car l'ordre n'est pas pris en compte.
Les couples (V1, V2) et (V2,V1) donnent la même paire {Verte, Verte}
L'univers est réduit à 10 paires.

Sur ces dix paires, une correspond à l'événement *V* $P(V) = \frac{1}{10}$



De même, pour $P(J) = \frac{3}{5} \times \frac{2}{4} = \frac{3}{10}$

b. On note $P_V(R)$ la probabilité pour le joueur d'être remboursé sachant qu'il a obtenu deux boules vertes.
Déterminer $P_V(R)$ puis $P(R \cap V)$.
$P_V(R)$ Le joueur a effectivement tirer deux boules vertes et après avoir fait tourner la roue, il est remboursé de sa mise, d'où, $P_V(R) = 1 - \frac{1}{8} - \frac{1}{4} = \frac{5}{8}$
$P(R \cap V) = P(V) \times P_V(R) = \frac{1}{10} \times \frac{5}{8} = \frac{1}{16}$

c. Calculer P(R).
La probabilité d'être remboursé est la somme des probabilités des événements **<u>disjoints</u>** J et $R \cap V$.
$P(R) = P(J) + P(R \cap V) = \frac{3}{10} + \frac{1}{16} = \frac{29}{80}$

d. Calculer la probabilité de gagner les 100 €, puis la probabilité de gagner les 20 € de la roue.
$P(100€) = P(V \cap \text{" 100 "}) = \frac{1}{10} \times \frac{1}{8} = \frac{1}{80}$
$P(20€) = P(V \cap \text{" 20 "}) = \frac{1}{10} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{40}$.

2. On appelle X la variable aléatoire donnant le gain algébrique du joueur, c'est-à-dire la différence entre les sommes éventuellement perçues et la participation initiale m.
a. Donner les ***valeurs prises*** par la variable aléatoire X.
L'univers-image est: $X(\Omega) = \{-m, 0; 20 - m; 100 - m\}$

b. Donner la ***loi de probabilité*** de la variable aléatoire X et vérifier que $p(X = -m)$ est 0,6.
$P(X = -m) = 1 - P(V) - P(J) = 1 - \frac{4}{10} = \frac{6}{10} = \frac{48}{80}$.
$P(X = 0) = P(R) = \frac{29}{80}$
$P(X = 20 - m) = P(\text{" 20 "}) = \frac{1}{40} = \frac{2}{80}$.
$P(X = 100 - m) = P(\text{" 100 "}) = \frac{1}{80}$
On vérifie: $\frac{48+29+2+1}{80} = 1$

c. $E(X) = -m \times \frac{48}{60} + 0 \times \frac{29}{80} + (20 - m) \times \frac{2}{80} + (100 - m) \times \frac{1}{80} = \frac{-48m+40-2m+100-m}{80} = \frac{140-51m}{80}$.

d. L'organisateur veut fixer la participation m à une valeur entière en euro.
Quelle valeur minimale faut-il donner à m pour que ***l'organisateur puisse* espérer *ne pas perdre d'argent***?
Dans ce cas, $X < 0$ si et seulement si $140 - 51m < 0$, soit: $m > \frac{140}{51}$.
La valeur minimale entière de m est donc 3 €

Complément/
3. Un joueur se présente et décide de jouer 4 fois, quels que soient les résultats obtenus.

Calculer la probabilité qu'il perde au moins une fois sa mise.
Soit la variable aléatoire Y où Y est le nombre de parties où le joueur ne perd pas sa mise

On reconnaît une expérience de Bernoulli avec $p = \frac{4}{10}$ et $n = 4$

On applique la loi binomiale $\mathscr{B}(\frac{4}{10}\ ; 4)$ à la variable aléatoire Y

$P(Y = 0) = \left(\frac{4}{10}\right)^4$ (Le joueur n'a jamais perdu sa mise)

$P(Y \geqslant 1) = 1 - \left(\frac{4}{10}\right)^4 = 1 - 0{,}025\,6 = 0{,}974\,4$

4. On voudrait qu'un joueur ait plus d'une chance sur deux d'être remboursé de sa mise ou de gagner quand il joue une seule fois. On note G cet évènement.
Pour cela on garde deux boules vertes dans l'urne mais on modifie le nombre de boules jaunes. On appelle n le nombre de boules jaunes, on suppose $n \geqslant 1$.
Calculer la valeur minimale de n pour que la condition précédente soit vérifiée.

Il suffit de modifier l'arbre initial en posant $P(V_1) = \frac{2}{n+2}$ et $P(J_1) = \frac{n}{n+2}$.

$P_{V_1}(V_2) = \frac{1}{n+1}$ et $P_{J_1}(J_2) = \frac{n-1}{n+1}$ ....

$P(G) = P(V) + P(J) = \frac{2}{n+2} \times \frac{1}{n+1} + \frac{n}{n+2} \times \frac{n-1}{n+1} = \frac{n^2-n+2}{(n+2)(n+1)}$

On veut $P(G) > \frac{1}{2}$, soit, $\frac{n^2-n+2}{(n+2)(n+1)} > \frac{1}{2} \Leftrightarrow n^2 - 5n + 2 > 0$

Le trinôme du second degré a pour racines: $\frac{5-\sqrt{17}}{2}$ et $\frac{5+\sqrt{17}}{2}$

et est positif (signe du coefficient de n^2) à l'extérieur des racines.

Comme $n \geqslant 1$, il faut $n \in \mathbb{N}$ et $n > \frac{5+\sqrt{17}}{2}$

$n \geqslant 5$.
la valeur minimale de n pour que la condition précédente soit vérifiée est donc 5.