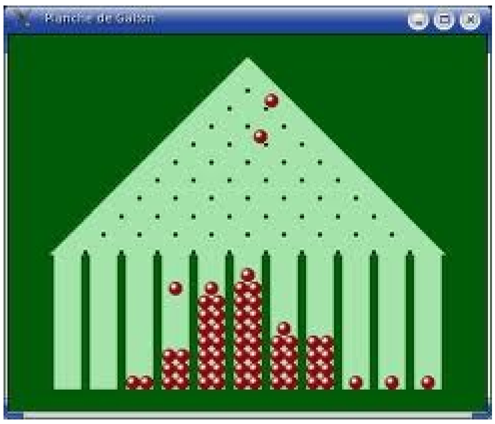
Index

Activité 1 page 228



1) La probabilité que la bille arrive en B est $P(B) = \frac{1}{2}$, en B' est $P(B') = \frac{1}{2}$

En effet, la bille rencontre l'obstacle en A et elle a autant de chances d'aller à sa droite (en B) qu'à sa gauche (en B').

2) Pour arriver en C la bille doit être en B et aller à sa droite avec une probabilité de $\frac{1}{2}$.

$P(C) = P(B)\times P_B(C) = \frac{1}{4}$

Pour arriver en C'' la bille doit être en B' et aller à sa gauche avec une probabilité de $\frac{1}{2}$.

$P(C'') = P(B')\times P_{B'}(C'') = \frac{1}{4}$

3) " Arriver en C' " est la réunion de deux événements disjoints : $B \cap C'$ et $B' \cap C'$

$P(C') = P(B \cap C') + P(B' \cap C' = P(B)\times P_B(C') + P(B')\times P_{B'}(C') = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$

4) La même démarche donne :

$P(M) = P(Q) = \frac{1}{8}$

$P(N) = P(P) = \frac{1}{4}\times\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\times\frac{1}{2} = \frac{3}{8}$

Sur les 64 billes, 8 parviennent en M, 24 parviennent en N, 24 parviennent en P et 8 parviennent en Q.

5) avec un niveau de plus : cases nommées R, S, T, U, V

Les billes en M arrivent en R avec une probabilité de $\frac{1}{2}$, d'où, $P(R) = \frac{1}{16}$, de même : $P(V) = \frac{1}{16}$.

Les billes en M arrivent en S avec la probabilité de $\frac{1}{2}$ et celles de N arrivent en S avec la probabilité de $\frac{1}{2}$, d'où, $P(S) = \frac{1}{8}\times\frac{1}{2} + \frac{3}{8}\times\frac{1}{2} = \frac{4}{16} = \frac{1}{4}$, de même : $P(U) = \frac{1}{4}$

Les billes en N arrivent en T avec la probabilité de $\frac{1}{2}$ et celles de P arrivent en T avec la probabilité de $\frac{1}{2}$,

d'où, $P(T) = \frac{3}{8}\times\frac{1}{2} + \frac{3}{8}\times\frac{1}{2} = \frac{6}{16} = \frac{3}{8}$

avec un niveau de plus : cases nommées W, X, Y, Z, Γ, Δ.

$P(W) = P(\Delta) = \frac{1}{16}\times\frac{1}{2} = \frac{1}{32}$,

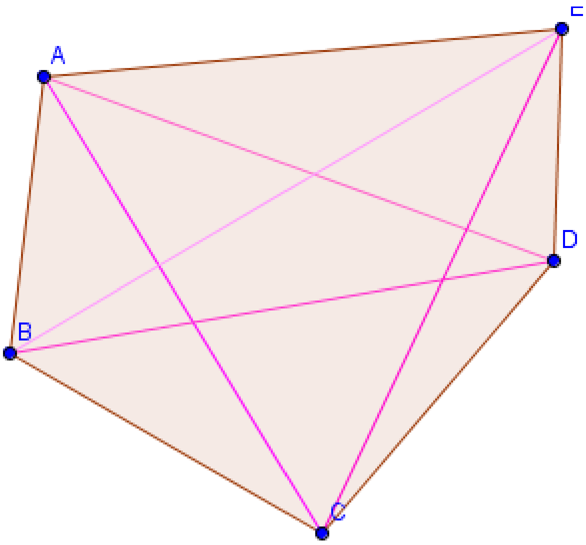
$P(X) = P(\Gamma) = \frac{1}{16}\times\frac{1}{2} + \frac{1}{4}\times\frac{1}{2} = \frac{5}{32}$,

$P(Y) = P(Z) = \frac{1}{4}\times\frac{1}{2} + \frac{3}{8}\times\frac{1}{2} = \frac{5}{16}$

<table>
<tr><td colspan="6">A (64 billes)</td></tr>
<tr><td colspan="3">B(32 billes)</td><td colspan="3">B ' (32 billes)</td></tr>
<tr><td colspan="2">C(16 billes)</td><td colspan="2">C' (16 + 16 = 32 billes)</td><td colspan="2">C " (16 billes)</td></tr>
</table>

<table>
<tr><td colspan="3">M(8 billes)</td><td colspan="3">N(8 + 16 = 24 billes)</td><td colspan="3">P(16 + 8 = 24 billes)</td><td colspan="3">Q(8 billes)</td></tr>
<tr><td colspan="2">R(4 billes)</td><td colspan="3">S(4 + 12 = 16 billes)</td><td colspan="2">T(12 +12 = 24 billes)</td><td colspan="3">U(12 + 4 = 16 billes)</td><td colspan="2">V(4 billes)</td></tr>
<tr><td>W(2 billes)</td><td colspan="2">X(2 + 8 = 10 billes)</td><td colspan="3">Y(8 + 12 = 20 billes)</td><td colspan="2">Z(12 + 8 = 20 billes)</td><td colspan="3">Γ(8 + 2 = 10 billes)</td><td>Δ(2 billes)</td></tr>
</table>

1 page 244



On dénombre 5 diagonales.
Une démarche:
Pour former une diagonale, on relie deux points non consécutifs.

Le nombre de façons de lier deux points (segments) avec 5 points est: $\binom{5}{2} = \frac{5\times4}{2\times1} = 10$

Parmi ces dix segments sont comptés les 5 côtés du pentagone:
Le nombre de diagonales est 10 – 5 = 5

Une autre démarche:
Chaque point est relié à 5 – 3 = 2 autres points, et, on divise par 2 (pour ne compter pas deux fois le même segment)

d'où nombre de diagonales: $\frac{5\times2}{2} = 5$

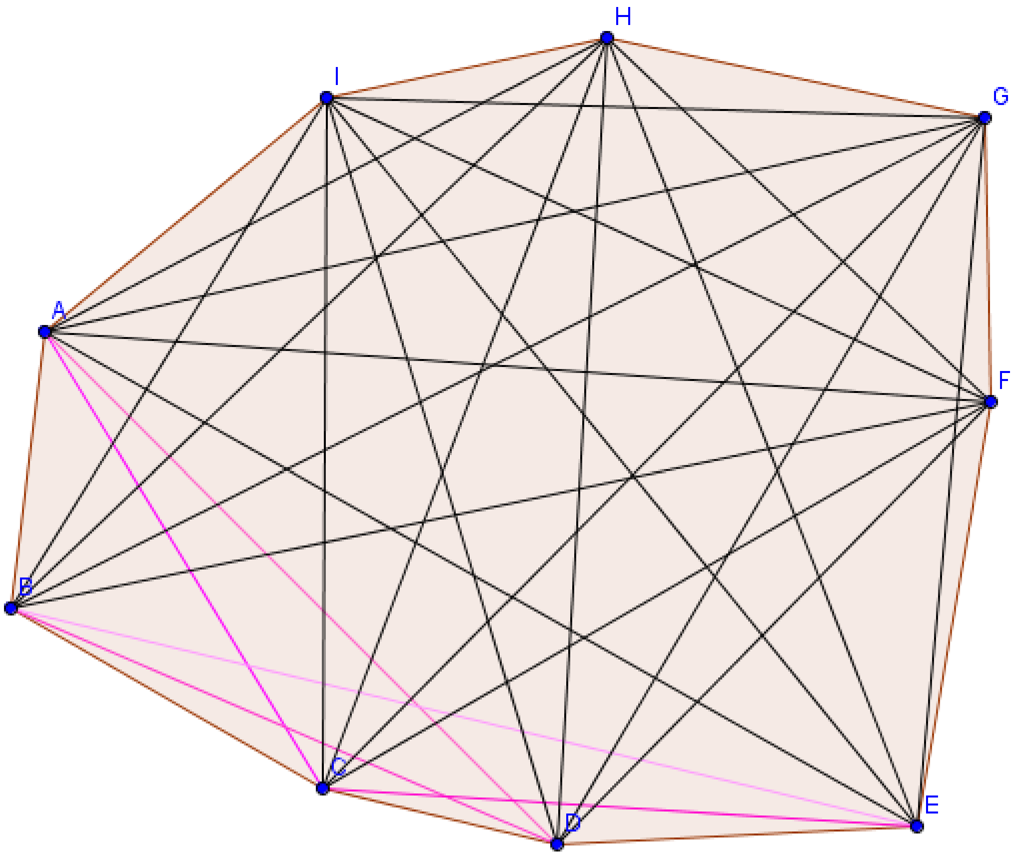
Cas général:
$n \geqslant 3$

Le nombre de diagonales est $\mathcal{N} = \binom{n}{2} - n$ (1) ou encore $\mathcal{N} = \frac{n(n-3)}{2}$ (2)

Calculs :

$$\binom{n}{2} - n = \frac{n(n-1)}{2} - n = \frac{n(n-3)}{2}$$

La première formule (1) correspond à la démarche en comptant le nombre de segments et en enlevant les côtés.
La deuxième formule (2) est obtenue en reliant un des n points aux n – 3 points restants après avoir enlevé le point et ses deux voisins.



Un ennéagone (polygone à neuf côtés) et ses 27 diagonales. (De chaque point part six diagonales)

Une preuve par récurrence

Proposition: P(n)

$n \geqslant 3$. Le nombre de diagonales d'un polygone à n côtés est $\mathcal{N} = \dfrac{n(n-3)}{2}$

Initialisation:

$n = 3$ Vrai (aucune diagonale)

Hérédité:

Soit un entier $n \geqslant 3$.

Supposons P(n) vraie.

Le nombre de diagonales est $\mathcal{N} = \dfrac{n(n-3)}{2}$.

Ajoutons un point (On a donc $n + 1$ points). On relie ce point aux autres points. Ce qui donne n segments dont deux côtés du nouveau polygone.

L'un des côtés précédents devient alors une diagonale.

On a donc: $(n-2)+1 = n-1$ nouvelles diagonales.

Le nombre de diagonales avec $n + 1$ points est par conséquent: $\dfrac{n(n-3)}{2} + (n-1)$

$$\frac{n(n-3)}{2} + (n-1) = \frac{n^2-3n+2n-2}{2} = \frac{(n+1)(n-2)}{2} = \frac{(n+1)((n+1)-3)}{2}$$

La proposition est vraie pour $n + 1$ si elle est vraie pour n.

Conclusion:

D'après l'axiome de récurrence, la proposition est vraie pour tout $n \geqslant 3$

---

2 page 244

$F = \{a, b, c, d, e, f\}$

a) Les parties à un seul élément de F sont : $\{a\}$, $\{b\}$, $\{c\}$, $\{d\}$, $\{e\}$, $\{f\}$

Chaque fois qu'on forme une partie à 1 élément, la partie restante contient 5 éléments.

Il y a autant de parties à un élément pris parmi 6 que de parties à 5 éléments pris parmi 6.

Le nombre de parties à 1 élément pris parmi 6 est $\binom{6}{1} = \binom{6}{5} = 6$

b) Les parties à deux éléments de F sont : $\{a, b\}$, $\{a, c\}$; $\{a, d\}$, $\{a, e\}$, $\{a, f\}$

$\{b, c\}$, $\{b, d\}$, $\{b, e\}$, $\{b, f\}$

$\{c, d\}$, $\{c, e\}$, $\{c, f\}$

$\{d, e\}$, $\{d, f\}$

$\{e, f\}$

Chaque fois qu'on forme une partie à 2 éléments, la partie restante contient 4 éléments.

Il y a autant de parties à 2 éléments pris parmi 6 que de parties à 4 éléments pris parmi 6.

Le nombre de parties à 2 élément pris parmi 6 est $\binom{6}{2} = \binom{6}{4} = 15$

c) Les parties à trois éléments de F sont : $\{a, b, c\}$, $\{a, b, d\}$; $\{a, b, e\}$, $\{a, b, f\}$

$\{a, c, d\}$, $\{a, c, e\}$, $\{a, c, f\}$

$\{a, d, e\}$, $\{a, d, f\}$

$\{a, e, f\}$

$\{b, c, d\}$, $\{b, c, e\}$, $\{b, c, f\}$,

$\{b, d, e\}$, $\{b, d, f\}$

$\{b, e, f\}$

$\{c, d, e\}$, $\{c, d, f\}$,

$\{c, e, f\}$

$\{d, e, f\}$

Le nombre de parties à 2 élément pris parmi 6 est $\binom{6}{3} = 20$

Compléments :

Il y a une partie de F a aucun élément et une partie de F a 6 éléments.

Le nombre de parties de F est $\binom{6}{0} + \binom{6}{1} + \binom{6}{2} + \binom{6}{3} + \binom{6}{4} + \binom{6}{5} + \binom{6}{6}$

$= 1 + 6 + 15 + 20 + 15 + 6 + 1 = 64 = 2^6$

Pour retrouver 2^6, imaginer la constitution des parties de F en prenant ou en ne prenant pas chaque élément au fur et à mesure.

Pour chaque élément, on a deux choix, d'où 2^6 pour les 6 éléments.

---

6 page 244

$A = \dfrac{n!}{(n-1)!} = n$

$B = \dfrac{n!}{(n-2)!} = n(n-1)$

C = $\dfrac{(m-1)!}{(m+2)!} = \dfrac{1}{m(m+1)(m+2)}$

D = $\dfrac{(n-m+1)!}{(n-m-1)!} = (n-m+1)(n-m)$

Un autre calcul

$E = \dfrac{n!}{(n+1)!} - \dfrac{(n-1)!}{n!} = \dfrac{n!-(n+1)(n-1)!}{(n+1)!} = \dfrac{(n-1)![n-(n+1)]}{(n+1)!} = \dfrac{-(n-1)!}{(n+1)!} = \dfrac{-1}{n(n+1)}$

ou encore

$E = \dfrac{n!}{(n+1)!} - \dfrac{(n-1)!}{n!} = \dfrac{1}{(n+1)} - \dfrac{1}{n} = \dfrac{n-(n+1)}{n(n+1)} = \dfrac{-1}{n(n+1)}$

---

8 page 244

Une urne contient 5 boules blanches et 6 boules noires.
On choisit trois boules au hasard et simultanément.
« au hasard » : hypothèse d'équiprobabilité.
« simultanément » : sous-ensemble ou partie (ensemble non ordonnée)

Le nombre de cas possibles (card(Ω) = $\begin{pmatrix}11\\3\end{pmatrix} = \dfrac{11\times10\times9}{3\times2\times1}$ = 165

Événement A: les trois boules sont blanches.

Nombre de cas favorables = card(A) = $\begin{pmatrix}5\\3\end{pmatrix} = \dfrac{5\times4\times3}{3\times2\times1}$ = 10

$P(A) = \dfrac{10}{165} = \dfrac{2}{33}$

Événement B: les trois boules sont de même couleur.

On peut faire une partition de B avec $B_1 = A$ et B_2 : « les trois boules sont noires »

card(B) = $\begin{pmatrix}5\\3\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}6\\3\end{pmatrix}$ = 10 + 20 = 30

$P(B) = \dfrac{30}{165} = \dfrac{2}{11}$

Événement C: on a deux boules blanches **et** une boule noire

card(C) = $\begin{pmatrix}5\\2\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}6\\1\end{pmatrix}$ = 10×6 = 60

$P(C) = \dfrac{60}{165} = \dfrac{4}{11}$

---

9 page 244

On choisit au hasard 5 cartes dans un jeu de 32 cartes.

Nombre de cas possibles = card(Ω) = $\begin{pmatrix}32\\5\end{pmatrix} = \dfrac{32\times31\times30\times29\times28}{5\times4\times3\times2\times1}$ = 32×31×29×7 = ...

T: « obtenir 5 trèfles »

card(T) = $\begin{pmatrix}8\\5\end{pmatrix}$

$P(T) = \dfrac{card\ (T)}{card\,(\Omega)} = \dfrac{8\times7\times6\times5\times4}{32\times31\times30\times29\times28}$ = ...

R : « obtenir 5 cartes rouges »

card(R) = $\begin{pmatrix}16\\5\end{pmatrix}$

$P(R) = \dfrac{card(R)}{card(\Omega)} = \dfrac{16\times15\times14\times13\times12}{32\times31\times30\times29\times28} = ...$

A : « ne pas recevoir d'as »

card (A) = $\begin{pmatrix}28\\5\end{pmatrix}$

$P(A) = \dfrac{card(A)}{card(\Omega)} = \dfrac{28\times27\times26\times25\times24}{32\times31\times30\times29\times28} = ...$

Complément:

B: « avoir au moins un as »

$P(B) = P(\overline{A}) = 1 - P(A) = ...$

C: « avoir au plus un as »

$P(C) = P(A) + P(A_1)$ où A_1 : « exactement un as »

card(A_1) = $\begin{pmatrix}4\\1\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}28\\4\end{pmatrix} = 4\times\dfrac{28\times27\times26\times25}{4\times3\times2\times1} = 28\times9\times13\times5 = ...$

$P(A_1) = \dfrac{28\times9\times13\times5}{32\times31\times29\times7} = ...$

$P(C) = ...$

---

11 page 244

L'alphabet est composé de 6 voyelles et 20 consonnes.

En tirant simultanément 2 jetons au hasard, on a:

p(" ce sont deux voyelles ") = $\dfrac{\begin{pmatrix}6\\2\end{pmatrix}}{\begin{pmatrix}26\\2\end{pmatrix}} = \dfrac{\frac{6\times5}{2\times1}}{\frac{26\times25}{2\times1}} = \dfrac{6\times5}{26\times25} = \dfrac{3}{65}$

p(" ce sont deux consonnes ") = $\dfrac{\begin{pmatrix}20\\2\end{pmatrix}}{\begin{pmatrix}26\\2\end{pmatrix}} = \dfrac{\frac{20\times19}{2\times1}}{\frac{26\times25}{2\times1}} = \dfrac{20\times19}{26\times25} = \dfrac{38}{65}$

p(" ce sont une voyelle et une consonne ") = $\dfrac{\begin{pmatrix}6\\1\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}20\\1\end{pmatrix}}{\begin{pmatrix}26\\2\end{pmatrix}} = \dfrac{6\times20}{\frac{26\times25}{2\times1}} = \dfrac{2\times6\times20}{26\times25} = \dfrac{24}{65}$

En remarquant que les trois événement forment une partition de l'univers: " tirer deux jetons ", on a:

" ce sont une voyelle et une consonne " est l'événement contraire de " deux voyelles ou deux consonnes " p(" ce sont une voyelle et une consonne ") = $1 - \dfrac{3}{65} - \dfrac{38}{65} = \dfrac{24}{65}$

---

13 page 244

La population compte $2n$ poussins dont $n + 1$ mâles et $n - 1$ femelles. ($n \geqslant 2$)

1) On choisit deux poussins simultanément au hasard:

le nombre de paires est (cardinal de l'univers) : $\binom{2n}{2} = \dfrac{2n(2n-1)}{2} = n(2n - 1)$

1) On veut un mâle (pris parmi $n + 1$) et une femelle (prise parmi $n - 1$), d'où, le nombre de cas favorables est:
$\binom{n+1}{1} \times \binom{n-1}{1} = (n + 1)(n - 1) = n^2 - 1$

La probabilité pour que les deux poussins soient de sexes différents est: $p_{\text{n}} = \dfrac{n^2-1}{n(2n-1)}$

2) On pose $f(x) = \dfrac{x^2-1}{x(2x-1)}$ avec $x \geqslant 2$.

$f'(x) = \dfrac{2x(x)(2x-1)-(4x-1)(x^2-1)}{(x(2x-1))^2} = \dfrac{-x^2+4x-1}{(x(2x-1))^2}$

$f'(x)$ est du signe de $-x^2 + 4x - 1$

$\Delta = ... = 12$. Deux racines $x_1 = 2 - \sqrt{3}$ et $x_2 = 2 + \sqrt{3}$

$-x^2 + 4x - 1$ est du signe du coefficient -1 de x^2 à l'extérieur des racines et ....

x	2		$2+\sqrt{3}$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$\frac{1}{2}$	$\nearrow$	max	$\searrow$	$\frac{1}{2}$

le nombre de poussins étant entier, on cherche les deux entiers consécutifs encadrant $2 + \sqrt{3}$,

$f(3) = \dfrac{8}{15}$ et $f(4) = \dfrac{15}{28}$

Comme $\dfrac{15}{28} > \dfrac{8}{15}$, la valeur maximale de n est 4.

---

14 page 244

Dans le triangle de Pascal :

n \ p	0	1	2	3	4	5	6
0	1						
1	1	1					
2	1	2	1				
3	1	3	3	1			

4	1	4	6	4	1		
5	1	5	10	10	5	1	
6	1	6	15	20	15	6	1

a) $(a+b)^5 = a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5$

b) En remplaçant b par $(-b)$ dans la précédente, on obtient :

$(a-b)^5 = a^5 + 5a^4(-b) + 10a^3(-b)^2 + 10a^2(-b)^3 + 5a(-b)^4 + (-b)^5$

$(a-b)^5 = a^5 - 5a^4b + 10a^3b^2 - 10a^2b^3 + 5ab^4 - b^5$

c) $(x+1)^6 + (x-1)^6 = x^6 + 6x^5 + 15x^4 + 20x^3 + 15x^2 + 6x + 1 + x^6 - 6x^5 + 15x^4 - 20x^3 + 15x^2 - 6x + 1$

$(x+1)^6 + (x-1)^6 = 2x^6 + 30x^4 + 30x^2 + 2$

$(x+1)^5 - (x-1)^5 = x^5 + 5x^4 + 10x^3 + 5x^2 + 5x + 1 - (x^5 - 5x^4 + 10x^3 - 5x^2 + 5x - 1)$

$(x+1)^5 - (x-1)^5 = 10x^4 + 10x^2 + 2$

d) $(2-\mathrm{i})^6 = 2^6 - 6\times2^5\times\mathrm{i} + 15\times2^4\times\mathrm{i}^2 - 20\times2^3\times\mathrm{i}^3 + 15\times2^2\times\mathrm{i}^4 - 6\times2\times\mathrm{i}^5 + \mathrm{i}^6$

$(2-\mathrm{i})^6 = 2^6 - 6\times2^5\times\mathrm{i} - 15\times2^4 + 20\times2^3\times\mathrm{i} + 15\times2^2 - 6\times2\times\mathrm{i} - 1$

$= -117 - 44\mathrm{i}$

e) $(2\mathrm{i}-1)^6 = (2\mathrm{i})^6 - 6\times(2\mathrm{i})^5 + 15\times(2\mathrm{i})^4 - 20\times(2\mathrm{i})^3 + 15\times(2\mathrm{i})^2 - 6\times(2\mathrm{i}) + 1$

$= 117 - 44\mathrm{i}$

On peut remarquer : $(2\mathrm{i}-1)^6 = (2\mathrm{i}+\mathrm{i}^2)^6 = [\mathrm{i}(2+\mathrm{i})^6] = \mathrm{i}^6(2+\mathrm{i})^6 = -(2+\mathrm{i})^6$

$2+\mathrm{i}$ et $2-\mathrm{i}$ sont conjugués.

$(2\mathrm{i}-1)^6 = -\overline{(-117-44\mathrm{i})} = -(-117+44\mathrm{i}) = 117 - 44\mathrm{i}$

---

15 page 245

Connaissant la formule $\binom{n}{p} = \frac{n!}{(n-p)!\,p!}$, on a:

$$\binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k} = \frac{(n-1)!}{(n-1-(k-1))!(k-1)!} + \frac{(n-1)!}{(n-1-k)!\,k!} =$$

$$= \frac{(n-1)!}{(n-k)!(k-1)!} + \frac{(n-1)!}{(n-1-k)!\,k!}$$

En mettant au même dénominateur, on obtient:

$$\binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k} = \frac{(n-1)!\,k}{(n-k)!\,k!} + \frac{(n-1)!(n-k)}{(n-k)!\,k!} =$$

$$= \frac{(n-1)!(k+n-k)}{(n-k)!\,k!} = \frac{(n-1)!\,n}{(n-k)!\,k!} = \frac{n!}{(n-k)!\,k!} = \binom{n}{k}$$

$$\binom{19}{8}+2\binom{19}{9}+\binom{19}{10}=\binom{19}{8}+\binom{19}{9}+\binom{19}{9}+\binom{19}{10}=\binom{20}{9}+\binom{20}{10}=\binom{21}{10}$$

Dans le triangle de Pascal :

p / n	...	8	9	10	....
...					
19		$\binom{19}{8}$	$\binom{19}{9}$	$\binom{19}{10}$	
20			$\binom{20}{9}$	$\binom{20}{10}$	
21				$\binom{21}{10}$	
...					

17 page 245

1) X peut prendre 5 valeurs : 0, 1, 2, 3, 4

2) La loi de la variable X est une loi binomiale, car, « actionner la roulette » est **une épreuve de Bernoulli à deux issues : 0 ou 1**, et, on **répète** cette épreuve quatre fois, le résultat d'une épreuve étant **indépendant** des résultats des autres épreuves.

La probabilité d'obtenir 1 est $\frac{1}{3}$ d'après l'énoncé.

la loi binomiale est la loi de paramètres 4 et $\frac{1}{3}$: $\mathscr{B}(4\ ;\ \frac{1}{3})$

On a donc : $P(X=k)=\binom{4}{k}\left(\frac{1}{3}\right)^k\left(\frac{2}{3}\right)^{4-k}$ où $k \in \{0\ ;1\ ;2\ ;3\ ;4\}$

Les résultats sont arrondis au centième le plus proche

k	0	1	2	3	4	Total
$P(X=k)$	$\left(\frac{2}{3}\right)^4 \approx 0{,}20$	$4\times\frac{1}{3}\times\left(\frac{2}{3}\right)^3 \approx 0{,}40$	$6\times\left(\frac{1}{3}\right)^2\times\left(\frac{2}{3}\right)^2 \approx 0{,}30$	$4\times\left(\frac{1}{3}\right)^3\times\frac{2}{3} \approx 0{,}10$	$\left(\frac{1}{3}\right)^4 \approx 0{,}01$	1
$k\times P(X=k)$	0	$4\times\frac{1}{3}\times\left(\frac{2}{3}\right)^3$	$12\times\left(\frac{1}{3}\right)^2\times\left(\frac{2}{3}\right)^2$	$12\times\left(\frac{1}{3}\right)^3\times\frac{2}{3}$	$4\times\left(\frac{1}{3}\right)^4$	$\frac{4}{3}$
$k^2\times P(X=k)$	0	$4\times\frac{1}{3}\times\left(\frac{2}{3}\right)^3$	$24\times\left(\frac{1}{3}\right)^2\times\left(\frac{2}{3}\right)^2$	$36\times\left(\frac{1}{3}\right)^3\times\frac{2}{3}$	$16\times\left(\frac{1}{3}\right)^4$	$E(X^2)$

On sait : $\left(\frac{2}{3}+\frac{1}{3}\right)^4 = \left(\frac{2}{3}\right)^4 + 4\times\frac{1}{3}\times\left(\frac{2}{3}\right)^3 + 6\times\left(\frac{1}{3}\right)^2\times\left(\frac{2}{3}\right)^2 + 4\times\left(\frac{1}{3}\right)^3\times\frac{2}{3} + \left(\frac{1}{3}\right)^4$

3) Pour la loi $\mathcal{B}(n\,;p)$ $E(X) = np$ et $V(X) = np(1-p) = npq$

Calcul de $E(X)$: $E(X) = 4\times\frac{1}{3} = \frac{4}{3}$

Calcul de $\sigma(X)$: $\sigma(X) = \sqrt{4\times\frac{1}{3}\times\frac{2}{3}} = \frac{2\sqrt{2}}{3}$

Remarque et rappel :

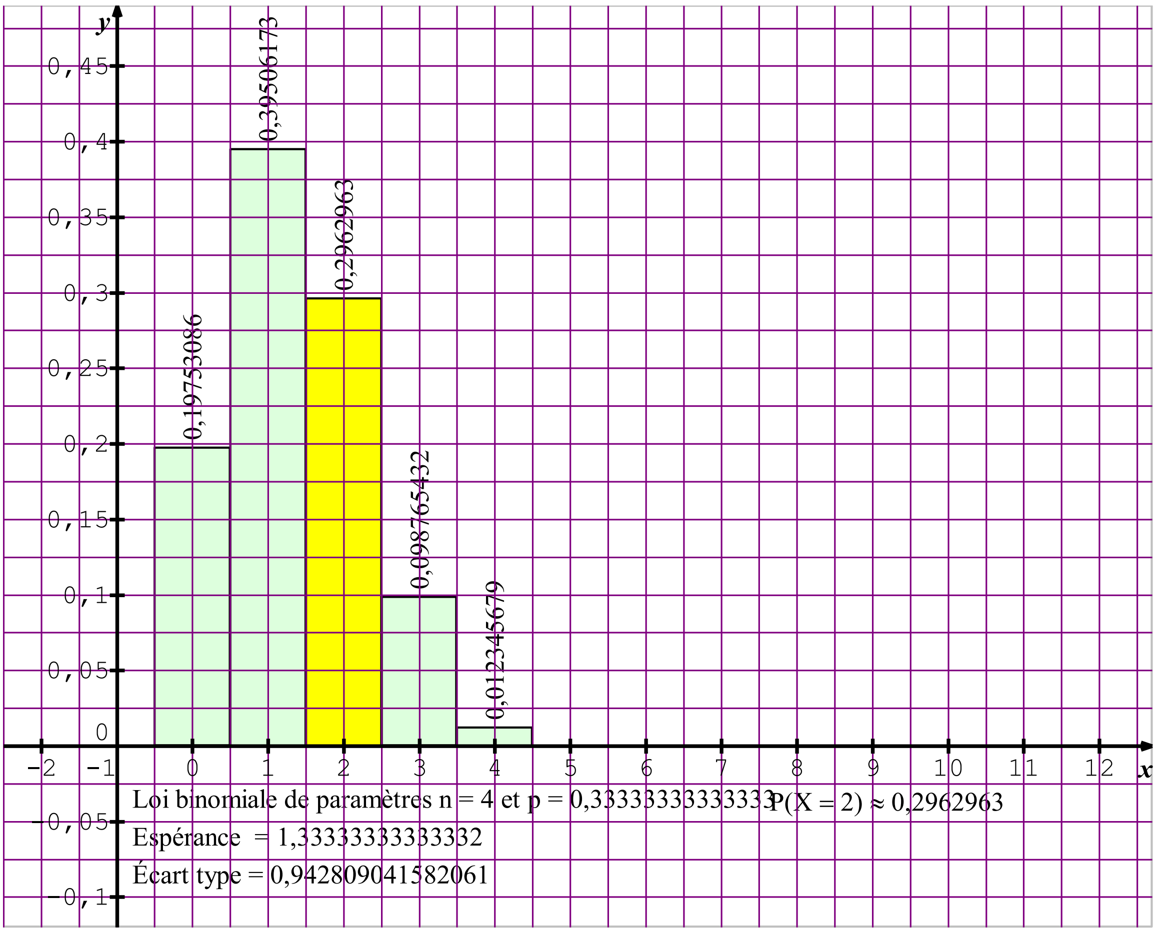
$E(X) = 0 + 4\times\frac{1}{3}\times\left(\frac{2}{3}\right)^3 + 12\times\left(\frac{1}{3}\right)^2\times\left(\frac{2}{3}\right)^2 + 12\times\left(\frac{1}{3}\right)^3\times\frac{2}{3} + 4\times\left(\frac{1}{3}\right)^4 =$

$= 4\times\frac{1}{3}\left(\left(\frac{2}{3}\right)^3 + 3\times\frac{1}{3}\times\left(\frac{2}{3}\right)^2 + 3\times\left(\frac{1}{3}\right)^2\times\frac{2}{3} + \left(\frac{1}{3}\right)^3\right)$

$= 4\times\frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}+\frac{1}{3}\right)^3 = \frac{4}{3}$

$V(X) = E(X^2) - [E(X)]^2$

Graphique : (réalisé avec Sinequanon)



18 page 245

La pièce étant équilibrée, la probabilité d'avoir PILE est $\frac{1}{2}$

Soit X la variable aléatoire indiquant le nombre de PILE en six lancers.

X suit la loi binomiale $\mathcal{B}(6\ ;\ \frac{1}{2})$

1) Obtenir au moins une fois PILE est l'événement $(X \geqslant 1)$

$$P(X \geqslant 1) = 1 - P(X < 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^6 = \frac{2^6 - 1}{2^6} = \frac{63}{64}$$

2) Obtenir plus d'une fois PILE est l'événement $(X > 1)$

$$P(X > 1) = 1 - P(X \leqslant 1) = 1 - P(X = 0) - P(X = 1) = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^6 - 6 \times \frac{1}{2} \times \left(\frac{1}{2}\right)^5 = \frac{2^6 - 1 - 6}{2^6} = \frac{57}{64}$$

Soit Y la variable aléatoire indiquant le nombre de PILE en huit lancers.

Y suit la loi binomiale $\mathcal{B}(8\ ;\ \frac{1}{2})$

3) Obtenir au moins deux fois PILE est l'événement $(Y \geqslant 2)$

$$P(Y \geqslant 2) = 1 - P(Y < 2) = 1 - P(Y = 0) - P(Y = 1) = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^8 - 8 \times \frac{1}{2} \times \left(\frac{1}{2}\right)^7 = \frac{2^8 - 1 - 8}{2^8} = \frac{247}{256}$$

4) Obtenir autant de PILE que de FACE en dix lancers a pour probabilité :

$$P(Z = 5) = \binom{10}{5} \times \left(\frac{1}{2}\right)^5 \times \left(\frac{1}{2}\right)^5 = \frac{10 \times 9 \times 8 \times 7 \times 6}{5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1} \times \frac{1}{2^{10}} = 3 \times 2 \times 7 \times 6 \times \frac{1}{2^{10}} = \frac{3 \times 7 \times 3}{2^8} = \frac{63}{256}$$

28 page 245

a) La probabilité d'atteindre la cible est: $P(S) = 0{,}6$.

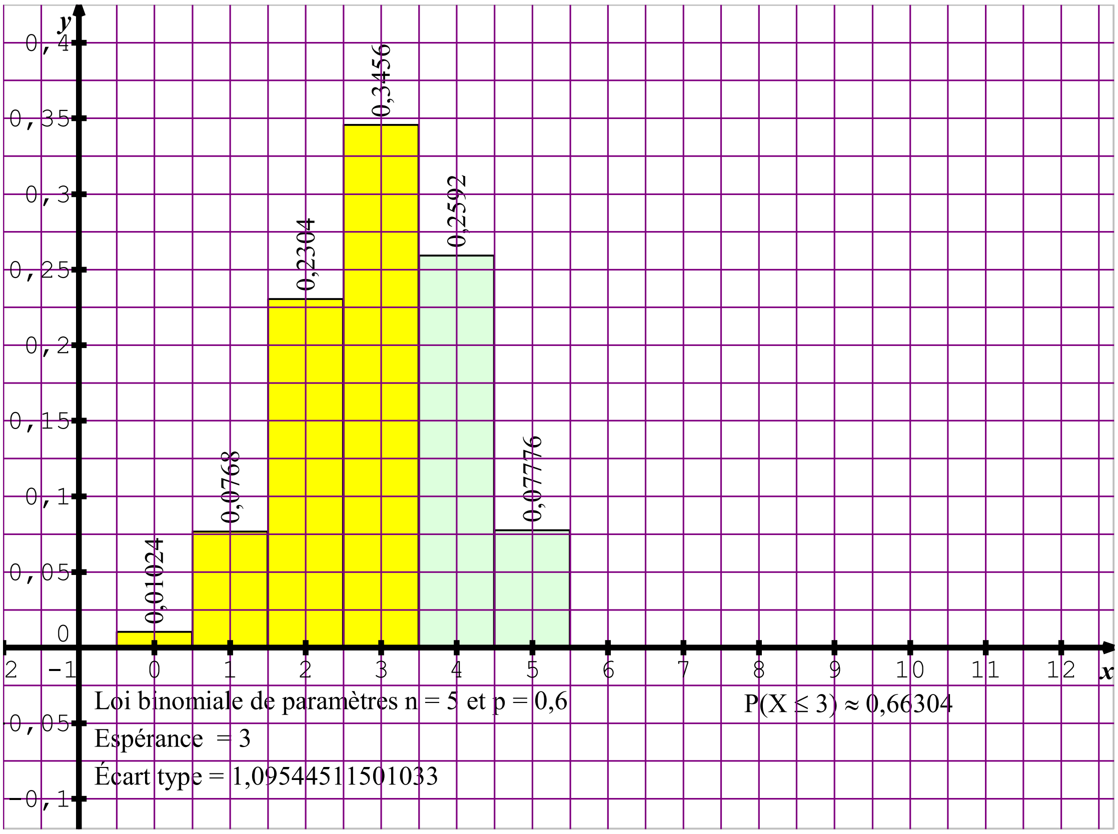
Le compétiteur tire 5 flèches.

En supposant que chaque tir est indépendant,

(autrement dit: le fait de tirer une flèche n'est pas un apprentissage !!!)

la loi de probabilité de la variable aléatoire Y est la loi binomiale $\mathcal{B}(5;\ 0{,}6)$

On a donc: $P(Y = k) = \binom{5}{k} 0{,}6^k\ 0{,}4^{5-k}$ pour k entier de 0 à 5.



b) $E(Y) = 5 \times 0{,}6 = 3$ et $V(Y) = 5 \times 0{,}6 \times 0{,}4 = 1{,}2$

c) $P(Z = 10) = P(Y = 4) + P(Y = 5) = 5 \times 0{,}6^4 \times 0{,}4 + 0{,}6^5 = 0{,}336\,96$

$P(Z = -5) = 1 - P(Z = 10) = 0{,}663\,04$

ou encore:

$P(Z = -5) = P(Y = 0) + P(Y = 1) + P(Y = 2) + P(Y = 3)$

$= 0{,}4^5 + 5 \times 0{,}6 \times 0{,}4^4 + 10 \times 0{,}6^2 \times 0{,}4^3 + 10 \times 0{,}6^3 \times 0{,}4^2 = \ldots.$

$E(Z) = 10 \times 0{,}336\,96 + (-5) \times 0{,}663\,04 = 0{,}0544$

$V(Z) = E(Z^2) - (E(Z))^2 = 10^2 \times 0{,}336\,96 + (-5)^2 \times 0{,}663\,04 - (0{,}0544)^2 = 95{,}917\ldots$

---

33 page 246

L'expression du second degré $15x^2 - 8x + 1$ a pour racines $x_1 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$ avec $\Delta = 4 = 2^2$.

On a donc : $x_1 = \dfrac{1}{5}$ et $x_2 = \dfrac{1}{3}$

Autrement dit :

$15x^2 - 8x + 1 = 15(x - \frac{1}{5})(x - \frac{1}{3})$

L'expression est strictement positive pour les valeurs de x prises à l'extérieur des racines : soit $x < \frac{1}{5}$ ou $x > \frac{1}{3}$.

1) Notons $I = [0 ; \frac{1}{5}[$ et $J =]\frac{1}{3} ; 1]$

Sur [0 ; 1], on a donc : $15x^2 - 8x + 1 > 0$ si et seulement si $x \in [0 ; \frac{1}{5}[\cup]\frac{1}{3} ; 1] = I \cup J$

Comme $I \cap J = \emptyset$, on sait : $P(I \cup J) = P(I) + P(J)$

D'après la loi uniforme continue, on a : $P(I \cup J) = P(I) + P(J) = \frac{1}{5} + \frac{2}{3} = \frac{13}{15}$

La probabilité pour que le réel tiré dans [0 ; 1] soit solution de l'inéquation $15x^2 - 8x + 1 > 0$ est $\frac{13}{15}$.

2) L'expression est nulle pour les valeurs de x égales aux racines : soit $x = \frac{1}{5}$ ou $x = \frac{1}{3}$.

Or : $P(x = \frac{1}{5}) = P(x = \frac{1}{3}) = 0$,

la probabilité pour que le réel tiré dans [0 ; 1] soit solution de l'équation $15x^2 - 8x + 1 = 0$ est nulle.

---

36 page 246

X est une variable continue sur $[0 ; +\infty[$.

Elle donne la durée de vie d'une machine à laver avec le paramètre $\lambda = 0{,}05$.

1) La machine à laver tombe en panne avant 10 ans est définie par :

$$P(X < 10) = \int_0^{10} 0{,}05\,e^{-0{,}05x}\,dx = \left[-e^{-0{,}05x}\right]_0^{10} = -e^{-0{,}5} + 1 = 1 - e^{-0{,}5} \quad \text{(environ : 0,39)}$$

Remarque : $1 - e^{-0{,}5} = 1 - \frac{1}{\sqrt{e}} = \frac{\sqrt{e}-1}{\sqrt{e}}$

2) la probabilité pour que la machine à laver tombe en panne pour la première fois après dix ans es : $P(X \geqslant 10) = 1 - P(X < 10) = e^{-0{,}5}$ (environ : 0,61)

---

37 page 246

La durée de vie d'un matériel électronique est une variable aléatoire qui suit la loi exponentielle de paramètre $\frac{1}{3000}$.

1) $G(t) = P(T \leqslant t) = \int_0^t \frac{1}{3000} e^{-\frac{1}{3000}x}\,dx = \left[-e^{-\frac{1}{3000}x}\right]_0^t = 1 - e^{-\frac{1}{3000}t}$

2) Le matériel est encore en fonctionnement au bout de 4 000 heures a pour probabilité :

$P(T \geqslant 4000) = 1 - G(4000) = e^{\frac{-4}{3}}$ (environ : 0,26)

---

40 page 246

la durée de vie exprimée en année d'un appareil ménager suit une loi exponentielle de paramètre λ, d'où,

1) Pour $t \geqslant 0$, $p([t\,;+\infty[) = 1 - p([0;t[) = e^{-\lambda t}$

2) $p([0;t[) = p([t\,;+\infty[)$ si et seulement si $e^{-\lambda t} = 1 - e^{-\lambda t}$

si et seulement si $e^{-\lambda t} = \frac{1}{2}$ (en appliquant la fonction ln réciproque de la fonction exp)

si et seulement si $-\lambda t = \ln \frac{1}{2} = -\ln 2$

Finalement : $t = \frac{\ln 2}{\lambda}$

3) L'appareil tombe en panne avant la fin de l'année est donnée par : $p([0;\,1[) = 1 - e^{-\lambda}$

On a donc : $1 - e^{-\lambda} = 0{,}18$ soit : $e^{-\lambda} = 0{,}82$ d'où, $-\lambda = \ln \frac{82}{100}$, puis, $\lambda = \ln \frac{100}{82} = \ln \frac{50}{41}$

4) D'après la définition d'une loi de durée de vie sans vieillissement, chercher la probabilité d'être encore en vie au bout de trois ans sachant que l'objet était en vie au bout de 2 ans est $p[1\,;+\infty[$

Démonstration :

L'appareil n'a connu aucune panne au cours des deux premières années est l'événement $[2\,;+\infty[$

Il ne connaît aucune panne l'année suivante est l'événement $[3\,;+\infty[$.

On cherche donc : $p_{[2;+\infty[}([3;+\infty[) = \frac{p([2+\infty[\cap[3;+\infty[)}{p([2;+\infty[)} = \frac{p([3;+\infty[)}{p([2;+\infty[)} = \frac{e^{-3\lambda}}{e^{-2\lambda}} = e^{-\lambda} = p[1\,;+\infty[$

---

41 page 245

on sait que $p(X > t) = e^{-\lambda t}$

1) Comme $p(X > 10) = 0{,}286$, on a : $e^{-10\lambda} = 0{,}286$, d'où,

$-10\lambda = \ln 0{,}286$

$\lambda = -\frac{\ln 0{,}286}{10} \approx 0{,}125$

2) On cherche $p(X \leqslant 0{,}5)$

$p(X \leqslant 0{,}5) = 1 - e^{-0{,}125\times 0{,}5} \approx 0{,}606$ au millième près par excès.

3) Sachant qu'un appareil a fonctionné huit années, la probabilité qu'il est une durée de vie supérieur à 10 ans est $P(X \geqslant 2) = e^{-0{,}125\times 2} \approx 0{,}779$ au millième près par excès.

---

42 page 247

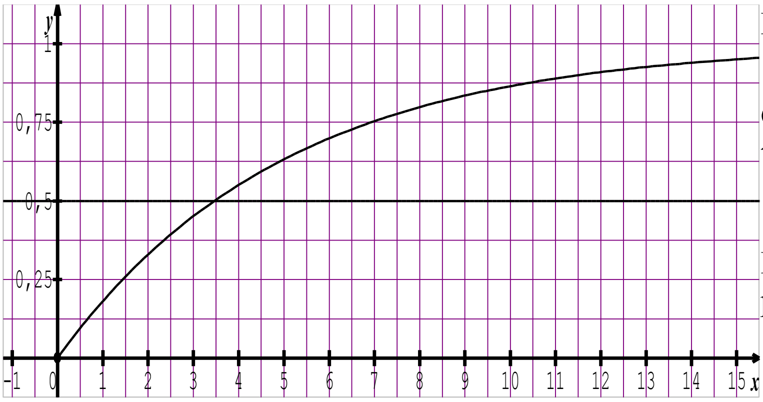
La durée de vie T, qui suit une loi exponentielle de paramètre λ, a pour valeur moyenne 5 ans, d'où,

$E(X)=5=\frac{1}{\lambda}$ donne $\lambda=\frac{1}{5}=0{,}2$.

a) On cherche $P(T\leqslant 1) = \int_0^1 \frac{1}{5}\mathrm{e}^{-1/5\,x}\,\mathrm{d}x = \left[-\mathrm{e}^{-1/5\,x}\right]_0^1 = 1-\mathrm{e}^{-1/5} \approx 0{,}18$ à 10^{-2} par défaut

b) On cherche t tel que $P(T\leqslant t)=0{,}5$. $\int_0^t \frac{1}{5}\mathrm{e}^{-1/5\,x}\,\mathrm{d}x = 0{,}5 \Leftrightarrow 1-\mathrm{e}^{-1/5\,t}=0{,}5 \Leftrightarrow \mathrm{e}^{-1/5\,t}=0{,}5 \Leftrightarrow$
$-\frac{1}{5}t=\ln(0{,}5)=-\ln 2 \Leftrightarrow t=5\ln 2 \approx 3{,}47$ ans à 10^{-2} par excès

Cette valeur est la valeur médiane de la variable aléatoire *T*. On a 50% de l'effectif de part et d'autre de cette valeur.



Représentation graphique de la fonction

$x \mapsto 1-\mathrm{e}^{-1/5x}$

Graphiquement: on lit que la proportion d'appareils tombés en panne vaut 0,5 lorsque $x \approx 3{,}5$ ans

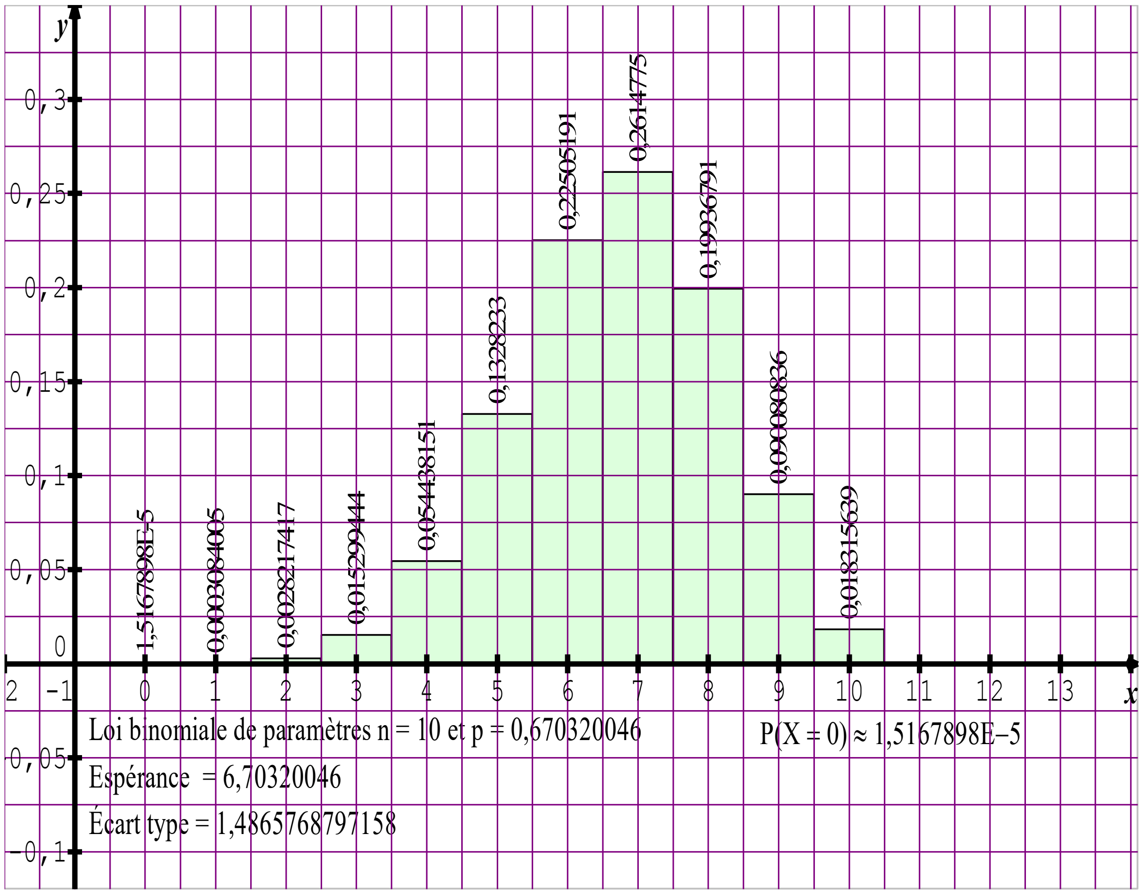
Pour $x=1$, on lit que la proportion d'appareils en panne est d'environ 0,2

c) Dans un lot de 10 moteurs, la variable aléatoire *X* donnant le nombre de moteurs qui n'ont pas de pannes durant deux ans suit la loi binomiale $\mathscr{B}(10;\ \mathrm{e}^{-2/5})$.
En effet, lorsqu'un "individu" e_i $(1\leqslant i\leqslant n)$ suit une loi de durée de vie sans vieillissement, les événements "être en vie pour l'individu e_i " $(1\leqslant i\leqslant n)$ sont indépendants.
La probabilité pour qu'un moteur qui n'a pas de pannes durant deux ans est: $P(T>2)=1-P(T\leqslant 2)=\mathrm{e}^{2\times(-1/5)}$
Loi de probabilité de *X:* $P(X=k)=\binom{10}{k} p^k\ q^{10-k}$ avec $p=\mathrm{e}^{-2/5}$ et $q=1-p$

$E(X)=10\,p=10\,\mathrm{e}^{-2/5} \approx 6{,}7$

k	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**
$P(X=k)$	q^{10}	$10\times p\times q^9$	$45\times p^2\times q^8$	$120\times p^3\times q^7$	$210\times p^4\times q^6$	$252\times p^5\times q^5$

k	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**
$P(X=k)$	$210\times p^6\times q^4$	$120\times p^7\times q^3$	$45\times p^8\times q^2$	$10\times p^9\times q$	p^{10}



48 page 248

Soit $n \in \mathbb{N}^*$

$f(x) = x\ (1+x)^n = x \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{k+1}$ (On a une somme de $n + 1$ termes et on multiplie chaque terme de la somme par x.)

Soit $f(x) = x\ (1+x)^n$

En dérivant ce produit, on obtient: $f'(x) = (1+x)^n + x \times n\ (1+x)^{n-1} = (1+x)^{n-1}(1 + x + nx)$

Soit $f(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{k+1}$

En dérivant cette somme, on obtient: $f'(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (k+1)\, x^k$

On obtient l'égalité: pour tout x de $\mathbb{R}$, $(1+x)^{n-1}(1 + x + nx) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (k+1)\, x^k$

En particulier lorsque $x = 1$, $2^{n-1}(2 + n) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (k+1)$

Quelques calculs:

n	$2^{n-1}(2+n)$	$\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (k+1)$
1	$2^0\ (2 + 1) = 3$	$\binom{1}{0} \times 1 + \binom{1}{1} \times 2 = 3$

2	$2^1(2+2)=8$	$\binom{2}{0}\times 1+\binom{2}{1}\times 2+\binom{2}{2}\times 3=1+2\times 2+3=8$
3	$2^2(2+3)=20$	$\binom{3}{0}\times 1+\binom{3}{1}\times 2+\binom{3}{2}\times 3+\binom{3}{3}\times 4=1+3\times 2+3\times 3+1\times 4=20$
4	$2^3(2+4)=48$	$\binom{4}{0}\times 1+\binom{4}{1}\times 2+\binom{4}{2}\times 3+\binom{4}{3}\times 4+\binom{4}{4}\times 5=1+4\times 2+6\times 3+4\times 4+5=48$

49 page 248

a) $A=\binom{6}{1}+2\binom{6}{2}+3\binom{6}{3}+4\binom{6}{4}+5\binom{6}{5}+6\binom{6}{6}=6+2\times 15+3\times 20+4\times 15+5\times 6+6\times 1=192$

$6\times 2^5=6\times 32=192$

b) pour tous entiers naturels n et k tels que $1\leqslant k\leqslant n$

$\binom{n}{k}=\frac{n!}{k!(n-k)!}$ et $\binom{n-1}{k-1}=\frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-1-k+1)!}=\frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!}$

d'où, $\frac{n}{k}\binom{n-1}{k-1}=\frac{n}{k}\times\frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!}=\frac{n!}{k!(n-k)!}=\binom{n}{k}$

c) On tire de l'égalité précédente, pour tous entiers naturels n et k tels que $1\leqslant k\leqslant n$, $k\binom{n}{k}=n\binom{n-1}{k-1}$

On peut écrire les $n+1$ égalités

$k=0$ $\quad 0\binom{n}{0}=0$

$k=1$ $\quad 1\binom{n}{1}=n\binom{n-1}{0}$

$k=2$ $\quad 2\binom{n}{2}=n\binom{n-1}{1}$

...

k $\quad k\binom{n}{k}=n\binom{n-1}{k-1}$

...

$k=n$ $\quad n\binom{n}{n}=n\binom{n-1}{n-1}$

En faisant la somme membre-à-membre, il vient après factorisation de n dans le second membre:

$$\sum_{k=0}^{n}k\binom{n}{k}=n\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n-1}{k}$$

Comme $(1+1)^{n-1}=\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n-1}{k}1^k\,1^{n-1-k}=\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n-1}{k}$, on obtient:

$$\sum_{k=0}^{n}k\binom{n}{k}=n\times 2^{n-1}$$

En appliquant cette égalité avec $n=6$, on a:

$$0\times\binom{6}{0}+1\times\binom{6}{1}+2\binom{6}{2}+3\binom{6}{3}+4\binom{6}{4}+5\binom{6}{5}+6\binom{6}{6}=6\times\ 2^{6-1}$$

qui est l'égalité du a)

---

54 page 248

1) Nombre de dominos ayant deux chiffres distincts:

Un domino non "double" est une paire de deux chiffres pris parmi les 7 chiffres de 0 à 6,

soit, $\binom{7}{2}=\dfrac{7\times 6}{2\times 1}=21$

Nombre de dominos "double" ayant deux chiffres identiques: il y a 7 "double"

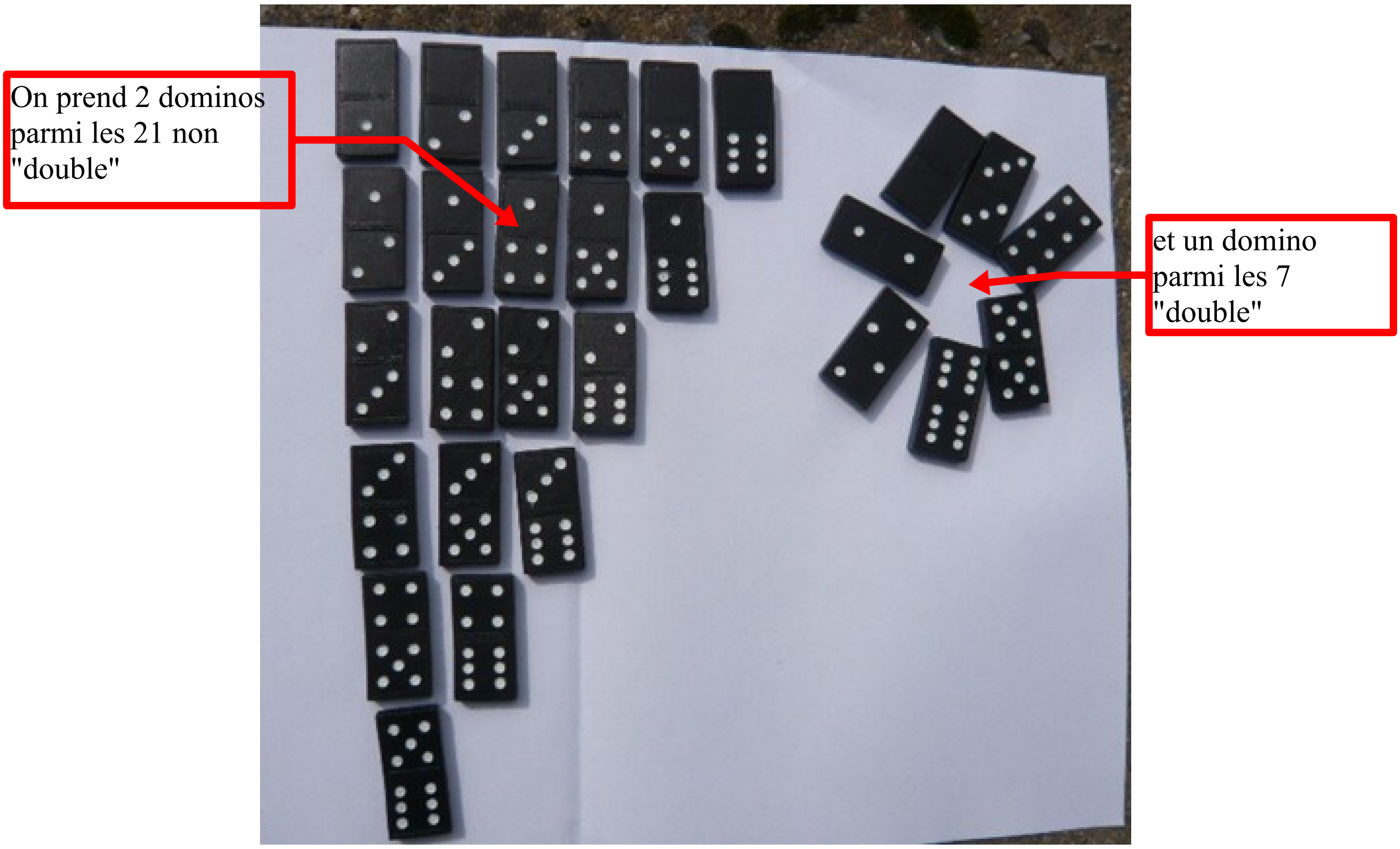
Il y a donc 21 + 7 = 28 dominos.

2) On tire simultanément trois dominos du jeu:

Un tirage est donc une partie de 3 éléments pris parmi 28 éléments.

Le nombre de tirages est: $\mathrm{card}(\Omega)=\binom{28}{3}=\dfrac{28\times 27\times 26}{3\times 2\times 1}=28\times 9\times 13=3\ 276$

A: "il y a un seul "double"" (et donc deux non "double")



card(A) = $\binom{7}{1} \times \binom{21}{2} = 7\times21\times10 = 1470$

Comme le tirage est au hasard, nous sommes dans l'hypothèse d'équiprobabilité,

soit, P(A) = $\dfrac{card\ A}{card\ \Omega} = \dfrac{7\times21\times10}{28\times9\times13} = \dfrac{35}{78}$

B: "Il y a au moins un double"

Soit $\overline{B}$: "ne tirer aucun double"

On a donc: card($\overline{B}$) = $\binom{21}{3} = \dfrac{21\times20\times19}{3\times2\times1} = 7\times10\times19 = 1\ 330$

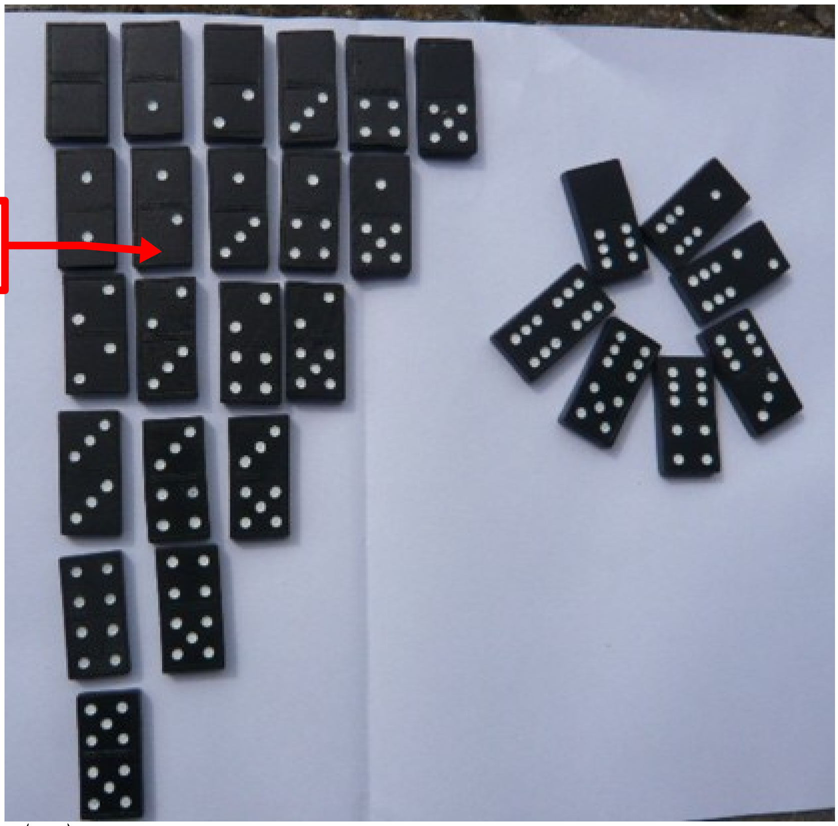
P(B) = 1 – P($\overline{B}$) = $1 - \dfrac{7\times10\times19}{28\times9\times13} = 1 - \dfrac{5\times19}{2\times9\times13} = \dfrac{2\times9\times13-5\times19}{2\times9\times13} = \dfrac{139}{234}$.

C: "il y a au moins un domino sur lequel figure le SIX"

$\overline{C}$: "aucun domino ne porte le numéro SIX"

On prend donc trois dominos parmi les 21 qui ne portent pas le SIX.

Trois parmi les 21 qui ne portent pas le SIX



On a alors: card($\overline{C}$) = $\binom{21}{3} = \dfrac{21\times20\times19}{3\times2\times1} = 7\times10\times19$

P(C) = 1 – P($\overline{C}$) = ... = P(B)

59 page 249

La variable X suit la loi binomiale de paramètres $n = 10$ et $p = 0,8$ $\mathcal{B}(10; 0,8)$

1) $A = (X \leqslant 4)$

$P(A) = P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) + P(X = 3) + P(X = 4)$

$= 0,2^{10} + 10\times0,8\times0,2^9 + 45\times0,8^2\times0,2^8 + 120\times0,8^3\times0,2^7 + 210\times0,8^4\times0,2^6$

En remarquant que $8 = 2^3$ et que tous les termes sont de la forme $\dfrac{m\times8^k\times2^{10-k}}{10^{10}}$

$= \dfrac{2^{10}}{10^{10}}(1 + 10\times2^2 + 45\times2^4 + 120\times2^6 + 210\times2^8)$

$= \dfrac{1024}{10^{10}}(1 + 40 + 720 + 7\,680 + 53\,760)$

$= 63\,693\,824\times10^{-10}$

$B = (X < 8)$

Il est plus simple de chercher $\overline{B} = (X \geqslant 8) = (X = 8) + (X = 9) + (X = 10)$

$P(\overline{B}) = 45\times0,8^8\times0,2^2 + 10\times0,8^9\times0,2 + 0,8^{10}$

$= \dfrac{2^{26}}{10^{10}}(45 + 10\times2^2 + 2^4) = \dfrac{2^{26}}{10^{10}}\times101 = 6\,777\,995\,264\times10^{-10}$

$P(B) = 1 - P(\overline{B}) = \dfrac{10^{10}-6777995264}{10^{10}} = 3\,222\,004\,736\times10^{-10}$

2) Remarquer: $A \subset B$, d'où, $A \cap B = A$

$P_B(A) = \dfrac{P(A\cap B)}{P(B)} = \dfrac{P(A)}{P(B)}$

$P_B(A) = \dfrac{63\,693\,824}{3\,222\,004\,736} = \dfrac{62201}{3146489}$ ≈ 0,020 à 10–3 par excès

$P_A(B) = \dfrac{P(A\cap B)}{P(A)} = \dfrac{P(A)}{P(A)} = 1$

3) Rappel:

A et B étant deux événements non nuls,

Les événements A et B sont indépendants si et seulement si $P(A \cap B) = P(A)\times P(B)$

si et seulement si $P_B(A) = P(A)$

si et seulement si $P_A(B) = P(B)$

Dans cet exercice, les événements A et B ne sont pas indépendants.

63 page 249

A: la montre présente le défaut *a*. P(A) = $\dfrac{2}{100}$ = 0,02

B: la montre présente le défaut *b*: P(B) = $\dfrac{10}{100}$ = 0,1

C: la montre ne présente aucun défaut, d'où, C = $\overline{A} \cap \overline{B}$.

Comme les événements A et B sont indépendants

P(C) = P($\overline{A}$)×P($\overline{B}$) = (1 – P(A))×(1 – P(B)) = 0,98×0,9 = 0,882

D: La montre présente un et un seul défaut, D = (A ∩ $\overline{B}$) ∪ ($\overline{A}$ ∩ B)

Comme (A ∩ $\overline{B}$) et ($\overline{A}$ ∩ B) forment une partition de D, on a: P(D) = P(A ∩ $\overline{B}$) + P($\overline{A}$ ∩ B)

Comme les événements A et B sont indépendants: P(D) = 0,02×0,9 + 0,98×0,1 = 0,116

Remarque: La montre présente les deux défauts P(A ∩ B) = 0,02×0,1 = 0,002

La somme 0,002 + 0,116 + 0,882 = 1

3) Puisque les tirages sont indépendants et considérés avec remise, la variable aléatoire X qui donne le nombre de montres ne présentant aucun défaut suit la loi binomiale $\mathscr{B}(5; 0{,}882)$

Pour tout *k* entier compris entre 0 et 5, P(X = *k*) = $\binom{5}{k} 0{,}882^k \; 0{,}118^{5-k}$

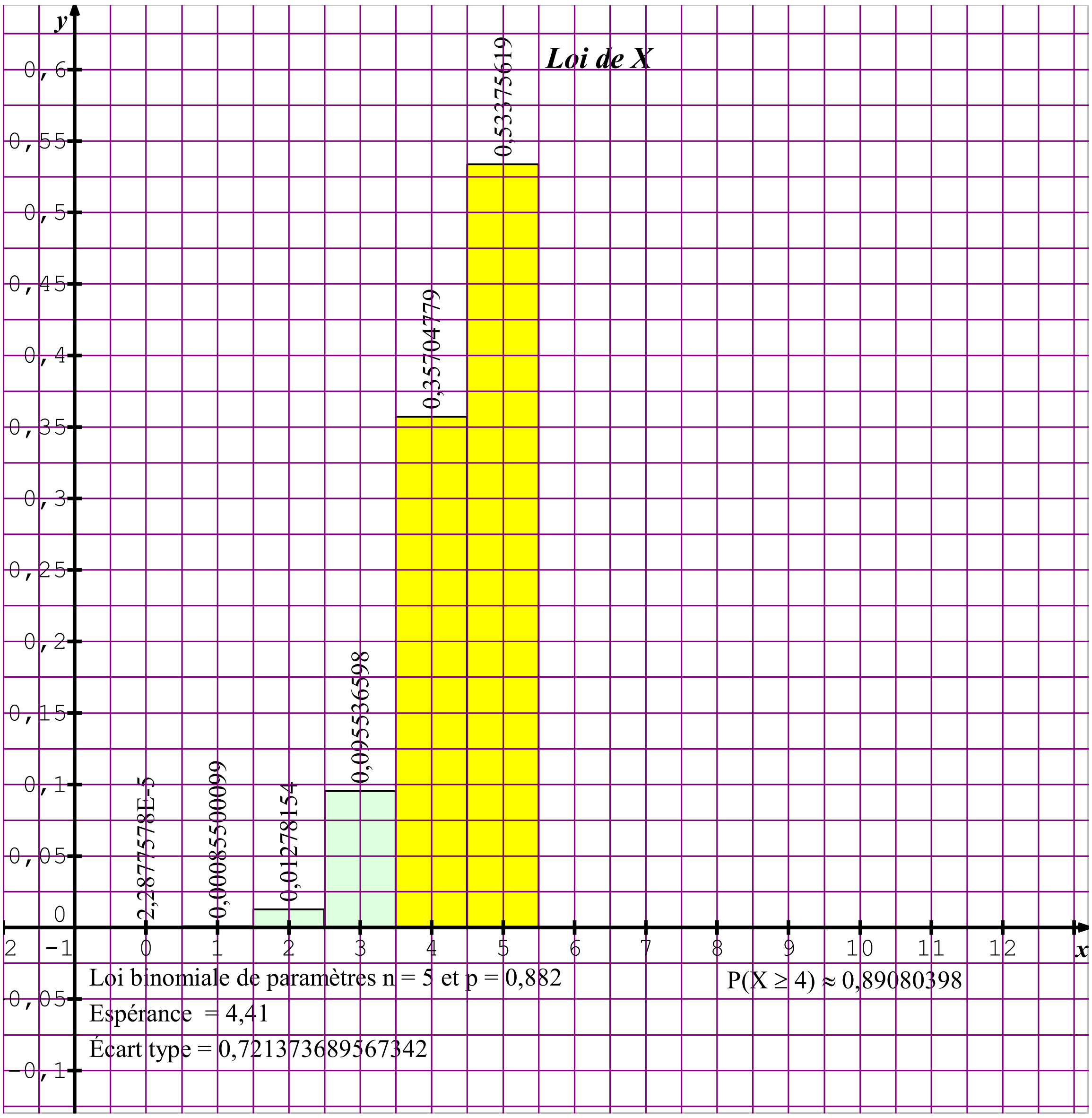
E: "quatre montres au moins n'ont aucun défaut"

P(E) = P(X = 4) + P(X = 5) = $\binom{5}{4}\times 0{,}882^4\times 0{,}118 + 0{,}882^5$

$= 5\times 0{,}882^4\times 0{,}118 + 0{,}882^5 = 0{,}882^4\times(5\times 0{,}118 + 0{,}882) = ...$

Une valeur approchée au millième: 0,891 par excès

Graphique de la loi de X (*réalisé avec Sinequanon*)



70 page 250

X variable continue de loi uniforme prenant ses valeurs sur $[a; b]$.

Par définition: $P(a \leqslant X \leqslant b) = 1$

On pose: $P(a \leqslant X \leqslant x) = \int_a^x k \,\mathrm{d}t$ (k constante).

a) $P(a \leqslant X \leqslant b) = \int_a^b k \,\mathrm{d}t = k(b-a) = 1$, d'où, $k = \dfrac{1}{b-a}$

b) $P(c \leqslant X \leqslant d) = \int_c^d k \,\mathrm{d}t = k(d-c)$ et comme $k = \dfrac{1}{b-a}$, $P(c \leqslant X \leqslant d) = \dfrac{d-c}{b-a}$

c) $P(a \leqslant X \leqslant \frac{a+b}{2}) = \frac{\frac{a+b}{2}-a}{b-a} = ... = \frac{1}{2}$ et $P(\frac{a+b}{2} \leqslant X \leqslant b) = ... = \frac{1}{2}$

d) Si $a = 0$ et $b = 1$, on retrouve la loi uniforme sur [0; 1]

e) Si $a = 1$, $b = 11$, on a alors $k = \frac{1}{10}$ et $P(1 \leqslant X \leqslant 5) = \frac{4}{10} = \frac{2}{5}$

---

72 page 251

a) Comme $E(T)=5000$ heures, le paramètre $\lambda=\frac{1}{5000}$ et $P(T>2000)=\mathrm{e}^{-2/5}$

b) Sachant que la machine n'a aucune défaillance pendant les 2 000 premières heures, la probabilité que cette machine ne connaisse aucune défaillance pendant les 6000 premières heures est donnée par:

$$P_{(T>2000)}(T>6000)=\frac{P((T>6000)\cap(T>2000))}{P(T>2000)}$$

Or, $P((T>6000)\cap(T>2000))=P(T>6000)$ Les machines n'ayant aucune panne au bout de 6000 heures n'étaient pas en panne les 2000 premières heures.

$P_{(T>2000)}(T>6000)=\frac{\mathrm{e}^{-6/5}}{\mathrm{e}^{-2/5}}=\mathrm{e}^{-4/5}$ ou encore $P_{(T>2000)}(T>6000)=P(T>4000)$

Index

---

79 page 252

Sexe	Garçons	Filles
Effectif	134	108
Fréquence	$\frac{134}{242} = \frac{67}{121}$	$\frac{108}{242} = \frac{54}{121}$

Sur cet échantillon de 242 naissances, on se pose la question d'une répartition équiprobable des garçons et des filles.

5000 simulations de 242 échantillons au hasard du tirage de deux chiffres à donner la distribution de fréquences suivantes pour le nombre $10^4 \times d^2$

D_1	Q_1	**Médiane**	Q_3	D_9
0,3	8,7	22,3	41,1	55,9

C'est-à-dire , 10 % des 5000 simulations donnent pour le calcul de $10^4 \times d^2$ un résultat inférieur ou égal à 0,3

25 % des 5000 simulations donnent pour le calcul de $10^4 \times d^2$ un résultat inférieur ou égal à 8,7

90 % des 5000 simulations donnent pour le calcul de $10^4 \times d^2$ un résultat inférieur ou égal à 55,9.

Calcul du nombre $10^4 \times d^2$ dans l'échantillon (réel) des naissances dans la commune.

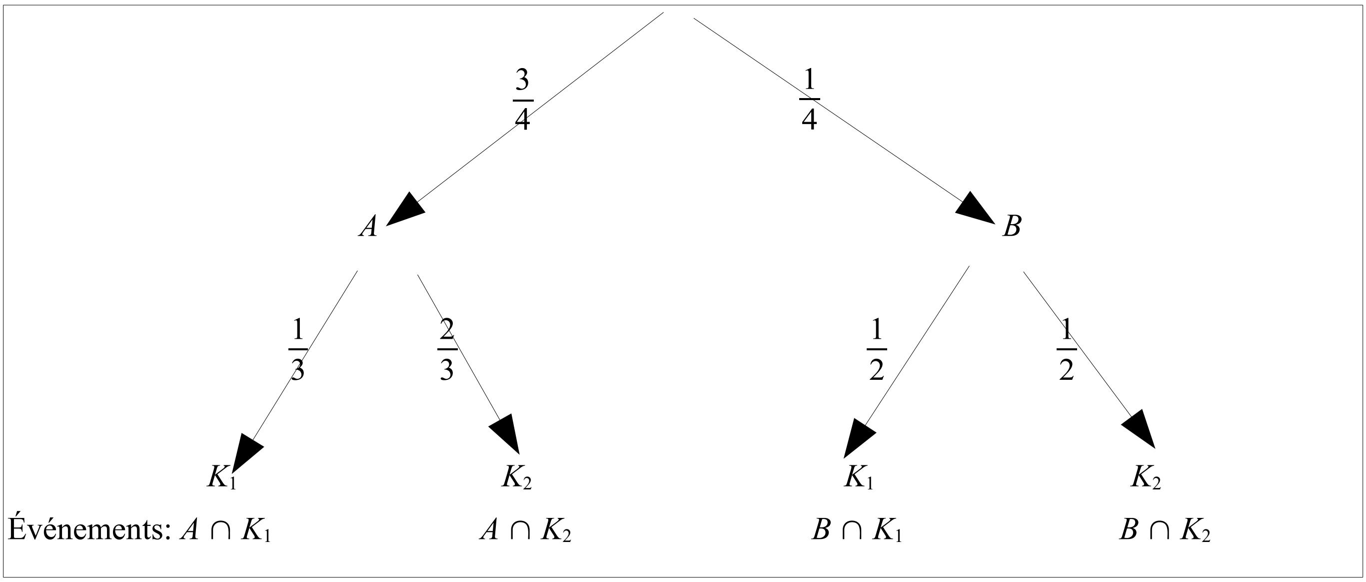
$$10^4 \times d^2 = 10^4 \times [(\frac{67}{121} - \frac{1}{2})^2 + (\frac{54}{121} - \frac{1}{2})^2]$$

$\approx 57{,}71$ par défaut

On rejette donc l'hypothèse d'équiprobabilité au seuil de 10 % puisque le calcul de $10^4 \times d^2 > D_9$

Exercice A page 256

Un gaz est constitué de deux sortes de particules: 75% de particules A et 25% de particules B.
Les particules sont projetées sur une cible formée de deux compartiments K_1 et K_2
Une particule au hasard de A entre dans K_1 avec la probabilité $\frac{1}{3}$ et dans K_2 avec la probabilité $\frac{2}{3}$; une particule au hasard de B entre dansa K_1 vec la probabilité $\frac{1}{2}$ et dans K_2 avec la probabilité $\frac{1}{2}$.
Voir arbre de probabilité



Partie A.

1) $A_1 = A \cap K_1$: la particule est de type A et entre dans K_1 : $P(A \cap K_1) = P(A) \times P_A(K_1) = \frac{3}{4} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{4}$

$A_2 = A \cap K_2$: la particule est de type A et entre dans K_2 : $P(A \cap K_2) = P(A) \times P_A(K_2) = \frac{3}{4} \times \frac{2}{3} = \frac{1}{2}$

$B_1 = B \cap K_1$: la particule est de type B et entre dans K_1 : $P(B \cap K_1) = P(B) \times P_B(K_1) = \frac{1}{4} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{8}$

$B_2 = B \cap K_2$: la particule est de type B et entre dans K_2 : $P(B \cap K_2) = P(B) \times P_B(K_2) = \frac{1}{4} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{8}$

A et B formant une partition de l'univers, on a, d'après la relation des probabilités totales, l'événement C_1: "la particule entre dans K_1 : $P(C_1) = P(A \cap K_1) + P(B \cap K_1) = \frac{1}{4} + \frac{1}{8} = \frac{3}{8}$

et

C_2: "la particule entre dans K_2 " : $P(C_2) = P(A \cap K_2) + P(B \cap K_2) = \frac{1}{2} + \frac{1}{8} = \frac{5}{8}$

Évidemment : on a $P(K_1) + P(K_2) = 1$

2) On procède 5 fois de suite à la même épreuve et le grand nombre de particules permet de considérer que les expériences sont indépendantes, d'où, la variable aléatoire X donnant le nombre de particules dans K_2 suit la loi

binomiale de paramètres 5 et $\frac{5}{8}$

$P(X=2) = \binom{5}{2}\left(\frac{5}{8}\right)^2\left(\frac{3}{8}\right)^3 = \frac{10\times 5^2\times 3^3}{8^5} \approx 0{,}21$ à 10^{-2} près par excès.

Partie B

Les particules A radioactives se transforment spontanément en particules B.
$p(t)$ est la proportion de particules A à l'instant avec $p(0) = 0{,}75$.
Plus généralement $p(t) = 0{,}75\ \mathrm{e}^{-\lambda t}$ où $\lambda \in \mathbb{R}$.

1) La demi-vie (temps au bout duquel le nombre de particules restantes est la moitié du nombre initial) est égale à 3 750 ans d'où $p(3\,750) = \frac{1}{2}p(0)$ et $p(3\,750) = 0{,}75\ \mathrm{e}^{-3750\lambda}$

On en déduit : $\frac{1}{2}\times 0{,}75 = 0{,}75\ \mathrm{e}^{-3750\lambda}$

Après réduction et en appliquant la fonction ln, fonction réciproque de la fonction exp., il vient :
$\lambda = \frac{\ln 2}{3750} \approx 0{,}000\,18$ à 10^{-5} près par défaut

2) Lorsque 10 % des particules A se sont transformées en particules B, la proportion de particules A est:
$0{,}9\times 0{,}75 = 0{,}675$ (ou encore : $0{,}75 - 0{,}1\times 0{,}75 = 0{,}675$)

On cherche t tel que $p(t) = 0{,}675$ soit, $0{,}675 = 0{,}75\ \mathrm{e}^{-\lambda t}$ avec $\lambda = \frac{\ln 2}{3750}$

On en déduit : $\mathrm{e}^{-\lambda t} = \frac{675}{750} = 0{,}9$

d'où, $\lambda t = \ln 0{,}9$, puis $t = \frac{-\ln 0{,}9\times 3750}{\ln 2} \approx 570$ ans

3) Il y a autant de particules A que de particules B lorsque $p(t) = \frac{1}{2}$

$0{,}75\ \mathrm{e}^{-\lambda t} = \frac{1}{2}$ si et seulement si $\mathrm{e}^{-\lambda t} = \frac{2}{3}$

d'où, $\lambda t = \ln \frac{2}{3}$, soit : $t = \frac{-\ln\frac{2}{3}\times 3750}{\ln 2} = 2\,194$ ans par excès.