Table des matières

Testez-vous page 261

A- Savez-vous … calculer?

	A	B	C	D
1. $(a+b\sqrt{2})(a-b\sqrt{2})$			a^2-2b^2	
2. $\dfrac{1}{3+\sqrt{2}}$		$\dfrac{3-\sqrt{2}}{7}$		
3. $\dfrac{1+\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}}$		$\dfrac{(1+\sqrt{2})(2+\sqrt{2})}{2}$		$\dfrac{4+3\sqrt{2}}{2}$

Commentaires:

Savoir: $(A+B)(A-B) = A^2 - B^2$

Remarquer: Si $B > 0$, $(A+\sqrt{B})(A-\sqrt{B}) = A^2 - B$

Les quantités de la forme $A + B$ et $A - B$ sont dites ***conjuguées***.

Savoir: On ne change pas la valeur d'un quotient $Q = \dfrac{N}{D}$ en multipliant le numérateur N et le dénominateur D par le même nombre k non nul. $Q = \dfrac{N}{D} = \dfrac{N\times k}{D\times k}$ avec $k \neq 0$.

B- Savez-vous … déterminer ou reconnaître un ensemble de points?

On donne les points $A(2; 3)$, $B(-4; 1)$

	A	B	C	D
4. Une équation de la médiatrice de $[AB]$ ...		$y = -3x - 1$		$(x-2)^2 + (y-3)^2 = (x+4)^2 + (y-1)^2$
5. Le cercle de diamètre $[AB]$ est l'ensemble des points M tels que				$(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}) = \dfrac{\pi}{2} + k\pi$; $k \in \mathbb{Z}$
6. Une équation du cercle de centre $\Omega(1; 2)$ et de rayon 3 est			$(x-1)^2 + (y-2)^2 = 9$	définie par $\overrightarrow{\Omega M}^2 = 9$
7- L'ensemble des points de coordonnées $(x; y)$ vérifiant $x^2 + y^2 - 2x + 5y = 0$ est		un cercle de centre $(1; -2{,}5)$	un cercle de rayon $\dfrac{\sqrt{29}}{2}$	
8. L'ensemble des points de coordonnées $(x; y)$ vérifiant $x^2 - y^2 = 0$ est				La réunion des droites d'équation $y = x$ et $y = -x$.

Commentaires:

Savoir les définitions géométriques de : médiatrice, cercle, …

Savoir caractériser ces objets géométriques: par exemple

La médiatrice d'un segment est l'ensemble des points équidistants des extrémités du segment

ou

est la droite perpendiculaire à ce segment en son milieu.

Savoir " traduire " l'orthogonalité, la distance … en géométrie vectorielle , en géométrie analytique.

Question 4.

" $M \in$ médiatrice de $[AB]$ " si et seulement si " $AM = BM$ " si et seulement si " $AM^2 = BM^2$ "

Or, $AM^2 = (x - x_A)^2 + (y - y_A)^2 = \dots$

Remarque: En développant, réduisant, on obtient: $3x + y + 1 = 0$

Question 5: Si vous ne vous souvenez plus de la propriété, ne tardez pas à réviser …

Question 6: On " traduit " en analytique, $\Omega M^2 = 3^2$et comme le carré scalaire est la norme (distance) au carré, on a: $\vec{u}\cdot\vec{u} = \vec{u}^{\,2} = \|\vec{u}\|^2$, soit, $\overrightarrow{\Omega M}^{\,2} = \Omega M^2 = 3^2$

Question 7: Voir question 6 et forme canonique du second degré.

" $x^2 + y^2 - 2x + 5y = 0$ " si et seulement si " $(x-1)^2 + (y + \frac{5}{2})^2 - 1 - \left(\frac{5}{2}\right)^2 = 0$ "

si et seulement si " $\Omega M^2 = \frac{29}{4}$, avec $\Omega(1; -2{,}5)$ "

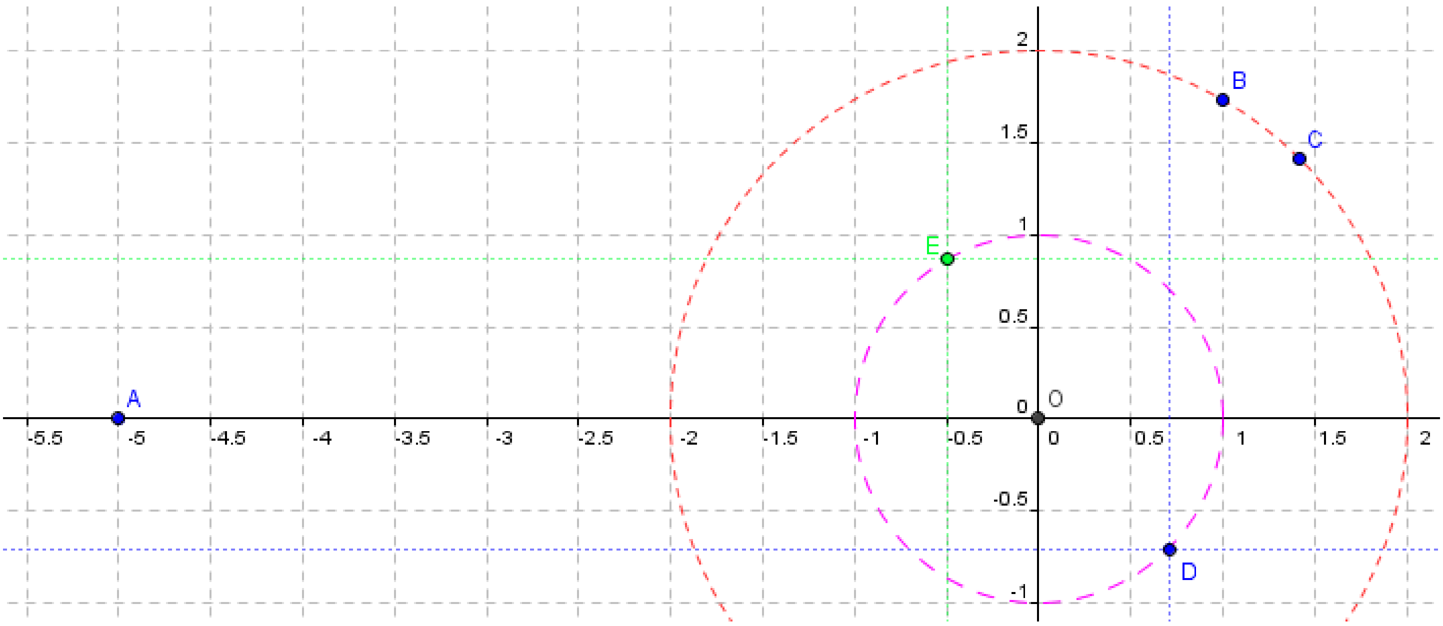
Question 8: " $x^2 - y^2 = 0$ " si et seulement si " $(x - y)(x + y) = 0$ " si et seulement si " $y = x$ ou $y = -x$ "

C- Savez-vous … utiliser des coordonnées polaires et la trigonométrie?

	A	B	C	D
9. Des coordonnées polaires du point de coordonnées cartésiennes (–5; 0) sont	$[5; \pi]$			
10. Des coordonnées polaires du point de coordonnées cartésiennes $(1; \sqrt{3})$ sont				$[2; \frac{\pi}{3}]$
11. Les coordonnées cartésiennes du point de coordonnées polaires $[2; \frac{\pi}{4}]$ sont		$(\sqrt{2}; \sqrt{2})$		
12. $\cos\theta = \frac{\sqrt{2}}{2}$ et $\sin\theta = -\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\theta = -\frac{\pi}{4}$			$\theta = \frac{7\pi}{4}$
13. $\cos\theta = -\frac{1}{2}$ et $\sin\theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$	$\theta = \frac{2\pi}{3}$			

Commentaires:

Un bon dessin vaut mieux qu'un long discours … à condition de savoir de quoi il s'agit.



Question 9. $A(-5; 0)$: il est évident que $OA = 5$ et $(\vec{u}, \overrightarrow{OA}) = \pi + 2k\pi$; $k \in \mathbb{Z}$

Question 10. $B(1; \sqrt{3})$. Il est évident que $OB = 2$ (Pythagore) et que $(\vec{u}, \overrightarrow{OB}) = \dfrac{\pi}{3} + 2k\pi$; $k \in \mathbb{Z}$ (lignes trigonométriques usuelles)

Question 11. $C[2; \dfrac{\pi}{4}]$. Lignes trigonométriques usuelles

Question 12. Les mesures de $(\vec{u}, \overrightarrow{OD})$ sont $-\dfrac{\pi}{4} + 2k\pi$; $k \in \mathbb{Z}$ (lignes trigonométriques usuelles)

Question 13. Les mesures de $(\vec{u}, \overrightarrow{OE})$ sont $\dfrac{2\pi}{3} + 2k\pi$; $k \in \mathbb{Z}$ (lignes trigonométriques usuelles)

Activité 1 page 262

1- a- L'équation $x + 3 = 0$ n'a aucune solution dans $\mathbb{N}$.

On crée alors un ensemble symétrique en 0 qui contient tous les entiers naturels. (on invente des nombres tels que pour tout x de cet ensemble, il existe un nombre x' opposé à x (tel que $x + x' = 0$)).

Les opérations dans $\mathbb{N}$ sont étendues à cet ensemble.

Cet ensemble est $\mathbb{Z}$.

$x + 3 = 0$ a une et une seule solution dans $\mathbb{Z}$, le nombre entier relatif -3.
b- L'équation $x^2 - 4 = 0$ équivalente à $(x - 2)(x + 2) = 0$ a une seule solution dans $\mathbb{N}$, l'entier naturel 2 et deux solutions dans $\mathbb{Z}$, les entiers -2 et 2
2- a- L'équation $7x - 1 = 0$ n'a pas de solution dans $\mathbb{Z}$. (Il n'existe aucun entier qui multiplié par 7 donne 1).
Preuve: Supposons un entier n tel que $7n = 1$
On sait: $7\times 0 < 1 < 7\times 1$, soit: $7\times 0 < 7\times n < 7\times 1$.
$0 < n < 1$ et n entier est impossible, d'où, la proposition est fausse.
On symétrise l'ensemble des entiers ne contenant pas 0 par rapport à 1, c'est-à-dire: on invente un ensemble qui contient tous les entiers et tels que chaque élément x non nul de cet ensemble est un inverse x'. ($x \times x' = 1$).
Les opérations dans $\mathbb{Z}$ sont étendues à cet ensemble.

Cet ensemble est $\mathbb{Q}$.

Dans $\mathbb{Q}$: $7x - 1 = 0$ a pour solution le rationnel non entier $\frac{1}{7}$.

b) Dans $\mathbb{Z}$, l'équation $x^2 - \frac{25}{9} = 0$ n'a aucune solution.

Dans $\mathbb{Q}$, l'équation $x^2 - \frac{25}{9} = 0$ a deux solutions: les rationnels non entiers $-\frac{5}{3}$ et $\frac{5}{3}$.

3 a) L'équation $x^2 - 3 = 0$ n'a aucune solution dans $\mathbb{Q}$.
L'équation $x^2 - 3 = 0$ a deux solutions dans $\mathbb{R}$, les réels irrationnels $-\sqrt{3}$ et $\sqrt{3}$.
b) Soit l'équation $3x^2 - (1 + 3\sqrt{3})x + \sqrt{3} = 0$

$\Delta = (1+3\sqrt{3})^2 - 4\times 3\times \sqrt{3} = 1 + (3\sqrt{3})^2 - 2\times 3\times \sqrt{3} = (1-3\sqrt{3})^2$

On a alors: $x_1 = \dfrac{1+3\sqrt{3}-(1-3\sqrt{3})}{2\times 3} = \sqrt{3}$ et $x_2 = \dfrac{1+3\sqrt{3}+(1-3\sqrt{3})}{2\times 3} = \dfrac{1}{3}$.

L'équation possède une seule solution dans $\mathbb{Q}$, et, deux solutions dans $\mathbb{R}$.
4a) L'équation $x^2 = -1$ n'a aucune solution dans $\mathbb{R}$.
b) L'équation $x^4 - 1 = 0$ est équivalente à $(x^2 - 1)(x^2 + 1) = 0$ est équivalente à $(x - 1)(x + 1)(x^2 + 1) = 0$
Dans $\mathbb{R}$, cette équation a deux solutions: -1 et 1.
c) On pose un nouveau nombre définit par $i^2 = -1$ et on étend les opérations usuelles de $\mathbb{R}$.
Ainsi, $x^2 = -2 = 2i^2$
Il existe deux solutions dans ce nouvel ensemble qui sont $-\sqrt{2}\,i$ et $\sqrt{2}\,i$.
L'équation $x^4 - 1 = 0$ a quatre solutions dans cet ensemble: -1; 1; i; $-i$.
d) $x^2 - 2x + 5 = (x - 1)^2 + 4 = (x - 1)^2 - 4i^2 = (x - 1 - 2i)(x - 1 + 2i)$
L'équation $x^2 - 2x + 5 = 0$ a donc pour solutions dans $\mathbb{C}$, les nombres $1 + 2i$ et $1 - 2i$.

1 page 278

Nombre complexe z	partie réelle de $z = \mathcal{R}e(z)$	partie imaginaire de $z = \mathcal{I}m(z)$	conjugué de $z = \bar{z}$
-3	-3	0	-3
$2 + i$	2	1	$2 - i$
$-1 - i$	-1	-1	$-1 + i$
$5i$	0	5	$-5i$
$3i^2 - i = -3 - i$	-3	-1	$-3 + i$

2 page 278

Deux nombres complexes sont égaux si et seulement si ils ont même partie réelle et même partie imaginaire, d'où,

a) $2x - y + i(x + y) = 1 - 3i \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - y = 1 \\ x + y = -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x = -2 \\ 3y = -7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\dfrac{2}{3} \\ y = -\dfrac{7}{3} \end{cases}$

b) $3x + 2iy + i(x - iy) = i \Leftrightarrow 3x + y + i(2y + x) \Leftrightarrow \begin{cases} 3x+y=0 \\ 2y+x=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5x=-1 \\ 5y=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-\dfrac{1}{5} \\ y=\dfrac{3}{5} \end{cases}$

---

3 page 278

a) On lit: $A(2)$, $B(1 + 3i)$, $C(-i)$, $D(-2 + 2i)$

b) $\overrightarrow{OA}$ (2), $\overrightarrow{OB}$ (1 + 3i), $\overrightarrow{BC}$ (–i – (1 + 3i)), d'où, $\overrightarrow{BC}$ (– 1 – 4i), $\overrightarrow{AD}$ (– 2 + 2i – 2), d'où, $\overrightarrow{AD}$ (–4 + 2i)

Compléments: calculs de longueurs et d'angles

$OA = 2$; $AB = \sqrt{1^2+3^2} = \sqrt{10}$; $OD = \sqrt{2^2+2^2} = 2\sqrt{2}$; $BD = \sqrt{3^2+1^2} = \sqrt{10}$

$\alpha = (\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB})$ est tel que $\cos\alpha = \dfrac{\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}}{OA\times OB} = \dfrac{2\times1+0\times3}{2\times\sqrt{10}} = \dfrac{1}{\sqrt{10}} = \dfrac{\sqrt{10}}{10}$

La calculatrice donne pour valeur approchée: $\alpha \approx 1{,}25$ radians par excès (B est dans le premier quadrant)

Autre méthode: Soit H le projeté orthogonal de B sur (OA).

On a: $\cos\alpha = \dfrac{1}{OB} = \dfrac{1}{\sqrt{10}}$ et $\sin\alpha = \dfrac{3}{OB} = \dfrac{3}{\sqrt{10}}$

$\beta = (\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OD})$ est tel que $\cos\beta = \dfrac{\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OD}}{OA\times OD} = \dfrac{2\times(-2)+0\times2}{2\times2\sqrt{2}} = -\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

$\beta = \dfrac{3\pi}{4}$ (D est dans le deuxième quadrant)

Autre méthode: Soit H' le projeté orthogonal de D sur (OA).

On a: $\cos\beta = \dfrac{-2}{OD} = \dfrac{-1}{\sqrt{2}}$ et $\sin\beta = \dfrac{2}{OD} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$

$\gamma = (\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OD}) = (\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OD}) - (\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB})$ Index

---

4 page 278

$z_1 = 4 - (1 - i) = 3 + i$
$z_2 = 3(5 - i) + i(3 + 2i) = 15 - 3i + 3i - 2 = 13$

---

6 page 278

$z_1 = \left(\dfrac{1}{2} - i\right)(5 + i) = \dfrac{5}{2} + \dfrac{1}{2}i - 5i + 1 = \dfrac{7}{2} - \dfrac{9}{2}i$

$z_2 = 2i(7 - i)(3i + 1) = 2i(21i + 7 + 3 - i) = 2i(20i + 10) = -40 + 20i$ Index

---

7 page 278

$z_1 = \frac{1}{3\mathrm{i}} = -\frac{1}{3}\mathrm{i}$

$z_2 = \frac{\mathrm{i}}{1+\mathrm{i}} = \frac{1-\mathrm{i}}{2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\mathrm{i}$

$z_3 = \frac{1}{2-3\mathrm{i}} = \frac{2+3\mathrm{i}}{13} = \frac{2}{13} + \frac{3}{13}\mathrm{i}$

$z_4 = \frac{3}{\sqrt{3}+\mathrm{i}} = \frac{3(\sqrt{3}-\mathrm{i})}{4} = \frac{3\sqrt{3}}{4} - \frac{3}{4}\mathrm{i}$ Index

---

8 page 278

$z_1 = \frac{3-\mathrm{i}}{\mathrm{i}} = -1 - 3\mathrm{i}$ Remarquer: $\frac{1}{\mathrm{i}} = -\mathrm{i}$

$z_2 = \frac{3+\mathrm{i}}{2+5\mathrm{i}} = \frac{(3+\mathrm{i})(2-5\mathrm{i})}{29} = ... = \frac{11}{29} - \frac{13}{29}\mathrm{i}$ Remarquer: $(2 + 5\mathrm{i})(2 - 5\mathrm{i}) = 29$

$z_3 = \frac{\mathrm{i}}{3\mathrm{i}-1} = \frac{1}{3+\mathrm{i}} = \frac{3-\mathrm{i}}{10} = \frac{3}{10} - \frac{1}{10}\mathrm{i}$ Remarquer: $3\mathrm{i} - 1 = 3\mathrm{i} + \mathrm{i}^2 = \mathrm{i}(3 + \mathrm{i})$

---

10 page 278

$z_1 = 1 - 2\mathrm{i}$ et $z_2 = 3\mathrm{i}$

$z_1^2 + z_2^2 = (1 - 2\mathrm{i})^2 + (3\mathrm{i})^2 = 1 - 4\mathrm{i} - 4 - 9 = -12 - 4\mathrm{i}$

$z_1^3 - z_2^3 = (1 - 2\mathrm{i})^3 + (3\mathrm{i})^3 = (-3 - 4\mathrm{i})(1 - 2\mathrm{i}) - (-9)(3\mathrm{i}) = -3 + 6\mathrm{i} - 4\mathrm{i} - 8 + 27\mathrm{i} = -11 + 29\mathrm{i}$

---

11 page 278

$z_1 = 1 - 2\mathrm{i}$ et $z_2 = 3\mathrm{i}$

$\frac{1}{z_1} = \frac{1}{1-2\mathrm{i}} = \frac{1+2\mathrm{i}}{5} = \frac{1}{5} + \frac{2}{5}\mathrm{i}$

$\frac{z_1}{z_2} = \frac{1-2\mathrm{i}}{3\mathrm{i}} = \frac{1}{3}(1 - 2\mathrm{i})(-\mathrm{i}) = -\frac{2}{3} - \frac{1}{3}\mathrm{i}$

$\frac{1+z_1}{3-z_2} = \frac{2-2\mathrm{i}}{3-3\mathrm{i}} = \frac{2(1-\mathrm{i})}{3(1-\mathrm{i})} = \frac{2}{3}$ Index

---

13 page 278

a) $\mathrm{i}z + 1 - \mathrm{i} = 0 \Leftrightarrow \mathrm{i}z = \mathrm{i} - 1 \Leftrightarrow z = \frac{\mathrm{i}-1}{\mathrm{i}} = \frac{\mathrm{i}(1+\mathrm{i})}{\mathrm{i}} = 1 + \mathrm{i}$ Rmq: $\mathrm{i} - 1 = \mathrm{i} + \mathrm{i}^2 = \mathrm{i}(1 + \mathrm{i})$

$S_a = \{1 + \mathrm{i}\}$

b) $(1 + 3\mathrm{i})z = 1 + z \Leftrightarrow z(1 + 3\mathrm{i} - 1) = 1 \Leftrightarrow z = \frac{1}{3\mathrm{i}} = -\frac{1}{3}\mathrm{i}$

$S_b = \{-\dfrac{1}{3}\text{i}\}$

---

14 page 278

a) $z^2 - (1 + \text{i})^2 = 0 \Leftrightarrow [z + (1 + \text{i})][z - (1 + \text{i})] = 0$

Or, un produit de .... est nul si et seulement si ...

$S_a = \{1 + \text{i}; -1 - \text{i}\}$

b) $z^2 + 4 = 0 \Leftrightarrow z^2 - (-4) = 0 \Leftrightarrow z^2 - 4\text{i}^2 = 0 \Leftrightarrow (z + 2\text{i})(z - 2\text{i}) = 0$

$S_b = \{-2\text{i}; 2\text{i}\}$

---

15 page 278

$z^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow (z - 2)(z + 2) = 0 \Leftrightarrow z = 2$ ou $z = -2$ $\qquad S = \{-2; 2\}$

---

16 page 278

a) $\dfrac{1}{z-\text{i}} = 2 + \text{i} \Leftrightarrow \begin{cases} z \neq \text{i} \\ z - \text{i} = \dfrac{1}{2+\text{i}} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z \neq \text{i} \\ z - \text{i} = \dfrac{2-\text{i}}{5} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z \neq \text{i} \\ z = \dfrac{2-\text{i}}{5} + \text{i} \end{cases} \Leftrightarrow z = \dfrac{2}{5} + \dfrac{4}{5}\text{i}$ $\qquad S_a = \{\dfrac{2}{5} + \dfrac{4}{5}\text{i}\}$

b) $\dfrac{z+2}{z-2} = \text{i} \Leftrightarrow \begin{cases} z \neq 2 \\ z + 2 = \text{i}(z-2) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z \neq 2 \\ z - iz = -2 - 2\text{i} \end{cases} \Leftrightarrow z \neq 2; z = \dfrac{-2(1+\text{i})}{1-\text{i}} \Leftrightarrow \begin{cases} z \neq 2 \\ z = \dfrac{-2(1+\text{i})(1+\text{i})}{2} \end{cases}$

Or, $(1 + \text{i})(1 + \text{i}) = (1 + \text{i})^2 = 2\text{i}$.

On obtient: $z = -2\text{i}$ $\qquad S_b = \{-2\text{i}\}$

---

17 page 278

a) $\begin{cases} z + z' = 1 \\ \text{i}z - z' = \text{i} \end{cases}$

En faisant la somme membre-à-membre des deux lignes, il vient: $(1 + \text{i})z = 1 + \text{i}$

On en déduit: $z = 1$, puis $z' = 0$

La vérification évidente.

L'ensemble solution est le couple $\{(1; 0)\}$

b) $\begin{cases} 3z + z' = 1 - \text{i} \\ \text{i}z - z' = 0 \end{cases}$

En faisant la somme membre-à-membre des deux lignes, il vient: $(3 + \text{i})z = 1 - \text{i}$

On en déduit: $z = \dfrac{1-i}{3+i} = \dfrac{(1-i)(3-i)}{10} = ... = \dfrac{1}{5} - \dfrac{2}{5}$ i, puis, $z' = iz = \dfrac{2}{5} + \dfrac{1}{5}$ i

Vérification (première ligne) : $3\left(\dfrac{1}{5}-\dfrac{2}{5}i\right) + \dfrac{2}{5} + \dfrac{1}{5}i = ... = 1 - i$

L'ensemble solution est le couple $\left\{\left(\dfrac{1}{5}-\dfrac{2}{5}i;\dfrac{2}{5}+\dfrac{1}{5}i\right)\right\}$

---

19 page 278

(compléter cet exercice en plaçant les points d'affixes j, j², j³, $\dfrac{1}{j}$ et $\bar{j}$ et donner une interprétation géométrique de l'égalité: 1 + j + j² = 0)

Le nombre complexe $j = -\dfrac{1}{2} + i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

$\bar{j} = -\dfrac{1}{2} - i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$. $j^2 = \dfrac{1}{4} - \dfrac{3}{4} - i\dfrac{\sqrt{3}}{2} = -\dfrac{1}{2} - i\dfrac{\sqrt{3}}{2} = \bar{j}$

$j^3 = j^2 \times j = \bar{j} \times j = |j|^2 = \dfrac{1}{4} + \dfrac{3}{4} = 1$

On peut aussi développer: $j^3 = j^2\times j = (-\dfrac{1}{2} - i\dfrac{\sqrt{3}}{2})(-\dfrac{1}{2} + i\dfrac{\sqrt{3}}{2}) = \dfrac{1}{4} + \dfrac{3}{4} = 1$

b) $1 + j + j^2 = 1 - \dfrac{1}{2} + i\dfrac{\sqrt{3}}{2} - \dfrac{1}{2} - i\dfrac{\sqrt{3}}{2} = 0$

Interprétation des résultats:

Comme $j^3 = j^2\times j = 1$, on en déduit: $j^2 = \dfrac{1}{j}$ et comme $j^2 = \bar{j}$, on a: $\dfrac{1}{j} = \bar{j} = j^2$

j est le complexe d'affixe 1 et d'argument $\dfrac{2\pi}{3}$, d'où, j² est le complexe d'affixe 1 et d'argument $\dfrac{4\pi}{3}$ ou $-\dfrac{2\pi}{3}$ et j^3 est l'unité.

$j = \cos\dfrac{2\pi}{3} + i\sin\dfrac{2\pi}{3}$,

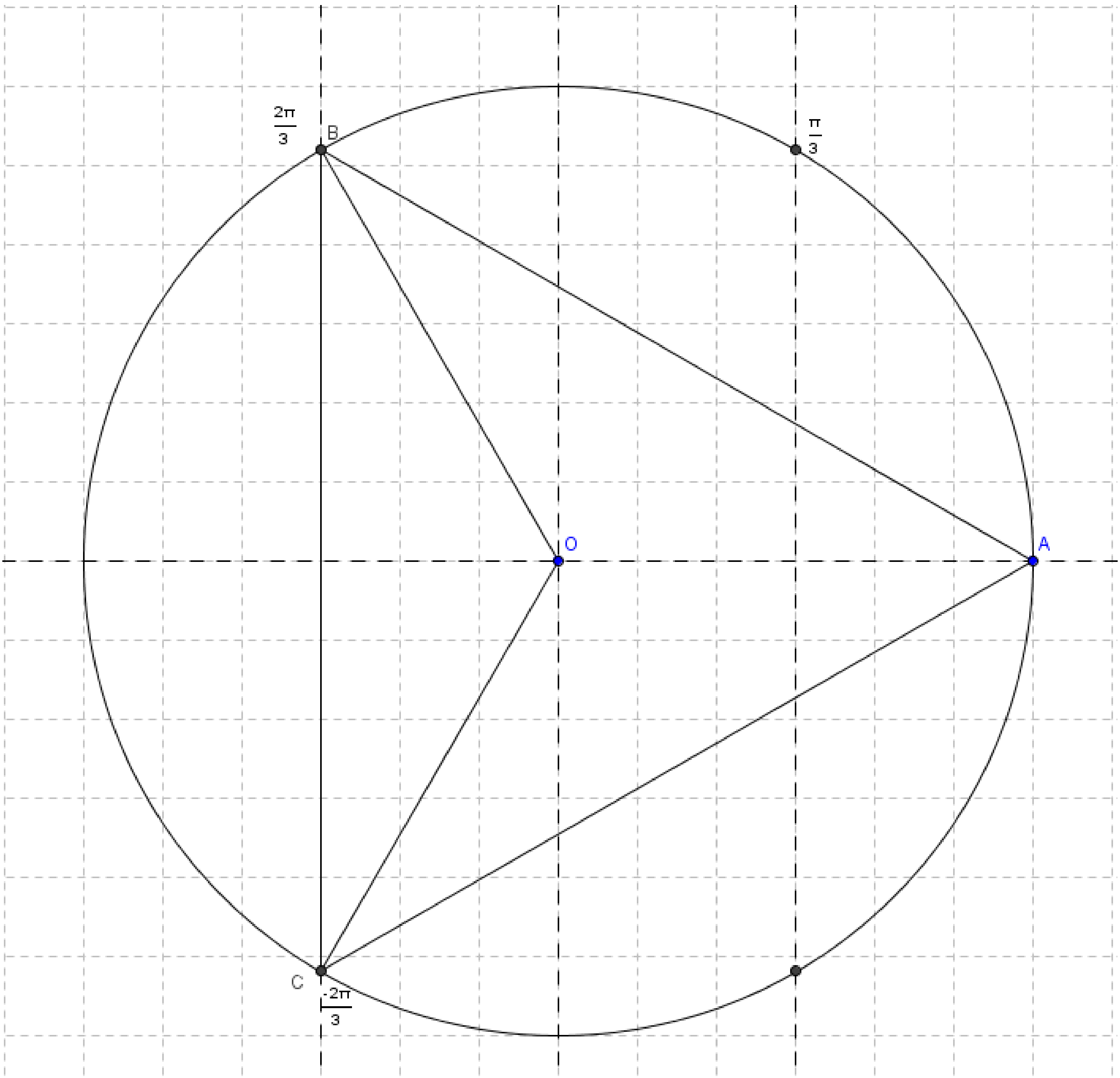
$j^2 = \cos(-\dfrac{2\pi}{3}) + i\sin(-\dfrac{2\pi}{3}) = \cos\dfrac{4\pi}{3} + i\sin\dfrac{4\pi}{3}$

Les points d'affixes j, j² et 1 forment un triangle équilatéral *ABC* d'isobarycentre le point *O*, d'où, 1 + j + j² = 0

En effet, ces points *A*, *B*, *C* sont situés sur le cercle trigonométrique

et $\widehat{(\vec{u};\overrightarrow{OA})} = \dfrac{2\pi}{3}$, $\widehat{(\vec{u};\overrightarrow{OB})}=\dfrac{4\pi}{3}$, $\widehat{(\vec{u};\overrightarrow{OC})}=2\pi$.

1+j+j²=0 équivaut à $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=\vec{0}$



[Index](#)

26 page 279

$z + 3\bar{z} = (1 + i)^2$

On pose $z = a + ib$ où a et b sont des réels.

$z + 3\bar{z} = (1 + i)^2 \quad \Leftrightarrow \quad a + ib + 3(a - ib) = 2i \quad \Leftrightarrow \quad 4a - 2ib = 2i$

On en déduit: $a = 0$ et $b = -1$ par identification des parties réelles et des parties imaginaires.

conclusion: $z = -i$

Vérification: $-i + 3\times i = 2i$ et $(1 + i)^2 = 2i$

32 page 279

Pour tout point M d'affixe z, on associe le point M' d'affixe $z' = z^2$.

a) On pose $z = x + \mathrm{i}y$ (x et y réels).

Remarque: dans le plan complexe rapporté au repère orthonormal direct $(O\,;\vec{u},\vec{v})$, (x, y) sont les coordonnées cartésiennes du point M.

$z' = x' + \mathrm{i}y' = (x + \mathrm{i}y)^2 = ... = x^2 - y^2 + \mathrm{i}(2xy)$

On a donc: $x' = x^2 - y^2$ et $y' = 2xy$

Remarque: dans le plan complexe rapporté au repère orthonormal direct $(O\,;\vec{u},\vec{v})$, (x', y') sont les coordonnées cartésiennes du point M'.

b) ***Avec la forme algébrique***

z' **est un réel** si et seulement si $y' = 0$

z' est un réel si et seulement si $2xy = 0$

z' est un réel si et seulement si $x = 0$ ou $y = 0$

L'ensemble des points M tels que z' est un réel est **la réunion des deux droites** d'équations respectives $x = 0$ et $y = 0$ (axes de coordonnées)

z' **est un imaginaire pur** si et seulement si $x' = 0$
z' est un imaginaire pur si et seulement si $x^2 - y^2 = 0$

z' est un imaginaire pur si et seulement si $(x - y)(x + y) = 0$

z' est un imaginaire pur si et seulement si $y = x$ ou $y = -x$

L'ensemble des points M tels que z' est un imaginaire pur est **la réunion des deux droites** d'équations respectives $y = x$ et $y = -x$ (bissectrices du repère $(O\,;\vec{u},\vec{v})$)

c) ***Avec les conjugués:***

z' **est un réel** si et seulement si $z' = \overline{z'}$

z' est un réel si et seulement si $z^2 = \overline{z^2}$, or $\overline{z^2} = \bar{z}^2$

z' est un réel si et seulement si $z^2 - \bar{z}^2 = 0$

z' est un réel si et seulement si $(z - \bar{z})(z + \bar{z}) = 0$

z' est un réel si et seulement si $z = \bar{z}$ ou $z = -\bar{z}$

z' est un réel si et seulement si z est un réel ou z est un imaginaire pur

L'ensemble des points M tels que z' est un réel est **la réunion des deux droites** d'équations respectives $x = 0$ et $y = 0$ (axes de coordonnées)

z' **est un imaginaire pur** si et seulement si $z' + \overline{z'} = 0$
z' est un imaginaire pur si et seulement si $z^2 + \overline{z^2} = 0$, or $\overline{z^2} = \bar{z}^2$

z' est un imaginaire pur si et seulement si $z^2 + \bar{z}^2 = 0$, or, $z^2 + \bar{z}^2 = z^2 - \mathrm{i}^2.\,\bar{z}^2$)

z' est un imaginaire pur si et seulement si $(z - \mathrm{i}\,\bar{z})(z + \mathrm{i}\,\bar{z}) = 0$

z' est un imaginaire pur si et seulement si $z = \mathrm{i}\,\bar{z}$ ou $z = -\mathrm{i}\,\bar{z}$

En posant $z = x + iy$, on retrouve $y = x$ ou $y = -x$

L'ensemble des points M tels que z' est un imaginaire pur est **la réunion des deux droites** d'équations respectives $y = x$ et $y = -x$ (bissectrices du repère $(O ; \vec{u}, \vec{v})$)

et pourquoi pas une troisième méthode:

z' **est un réel** si et seulement si $\arg(z') = 0 + k\pi$; $k \in \mathbb{Z}$ ou $z' = 0$

si et seulement si $\arg(z^2) = 0 + k\pi$; $k \in \mathbb{Z}$ ou $z^2 = 0$

si et seulement si $2\times\arg(z) = 0 + k\pi$; $k \in \mathbb{Z}$ ou $z = 0$

si et seulement si $\arg(z) = 0 + k\dfrac{\pi}{2}$; $k \in \mathbb{Z}$ ou $z = 0$

si et seulement si $(\vec{u}, \overrightarrow{OM}) = 0 + k\dfrac{\pi}{2}$; $k \in \mathbb{Z}$ ou $M = O$.

On a donc $\vec{u}$ et $\overrightarrow{OM}$ colinéaires, ou ,$\vec{u}$ et $\overrightarrow{OM}$ orthogonaux ….

z' **est un imaginaire pur** si et seulement si $\arg(z') = \dfrac{\pi}{2} + k\pi$; $k \in \mathbb{Z}$ ou $z' = 0$

si et seulement si $\arg(z^2) = \dfrac{\pi}{2} + k\pi$; $k \in \mathbb{Z}$ ou $z^2 = 0$

si et seulement si $2\times\arg(z) = \dfrac{\pi}{2} + k\pi$; $k \in \mathbb{Z}$ ou $z = 0$

si et seulement si $\arg(z) = \dfrac{\pi}{4} + k\dfrac{\pi}{2}$; $k \in \mathbb{Z}$ ou $z = 0$

si et seulement si $(\vec{u}, \overrightarrow{OM}) = \dfrac{\pi}{4} + k\dfrac{\pi}{2}$; $k \in \mathbb{Z}$ ou $M = O$.

On a donc $\vec{u}$ et $\overrightarrow{OM}$ forment un angle de $\dfrac{\pi}{4}$ ou $\dfrac{3\pi}{4}$ ou $\dfrac{5\pi}{4}$ ou $\dfrac{7\pi}{4}$ ...

---

33 page 279

$z_1 = \dfrac{1}{3}$ $\quad |z_1| = \dfrac{1}{3}$

$z_2 = 3 + 4i$ $\quad |z_2| = \sqrt{3^2+4^2} = 5$ $\quad$ ou $z_2\overline{z_2} = (3 + 4i)(3 - 4i) = 9 + 16 = 25$ et ... (voir z_4)

$z_3 = -2$ $\quad |z_3| = 2$

$z_4 = 3 - 4i$ $\quad |z_4| = |z_2| = 5$

$z_5 = \dfrac{5}{7}i$ $\quad |z_5| = \dfrac{5}{7}$

Retenir:

a) Si $z = a$ est un réel alors $|z| = |a|$

b) Si $z = bi$ est un imaginaire pur alors $|z| = |b|$

c) Un nombre complexe z et son conjugué $\overline{z}$ ont le même module. $\quad |z| = |\overline{z}|$

---

35 page 279

a) $z_1 = \cos\alpha + \text{i}\sin\alpha$ $\quad |z_1| = \sqrt{(\cos\alpha)^2+(\sin\alpha)^2} = 1$

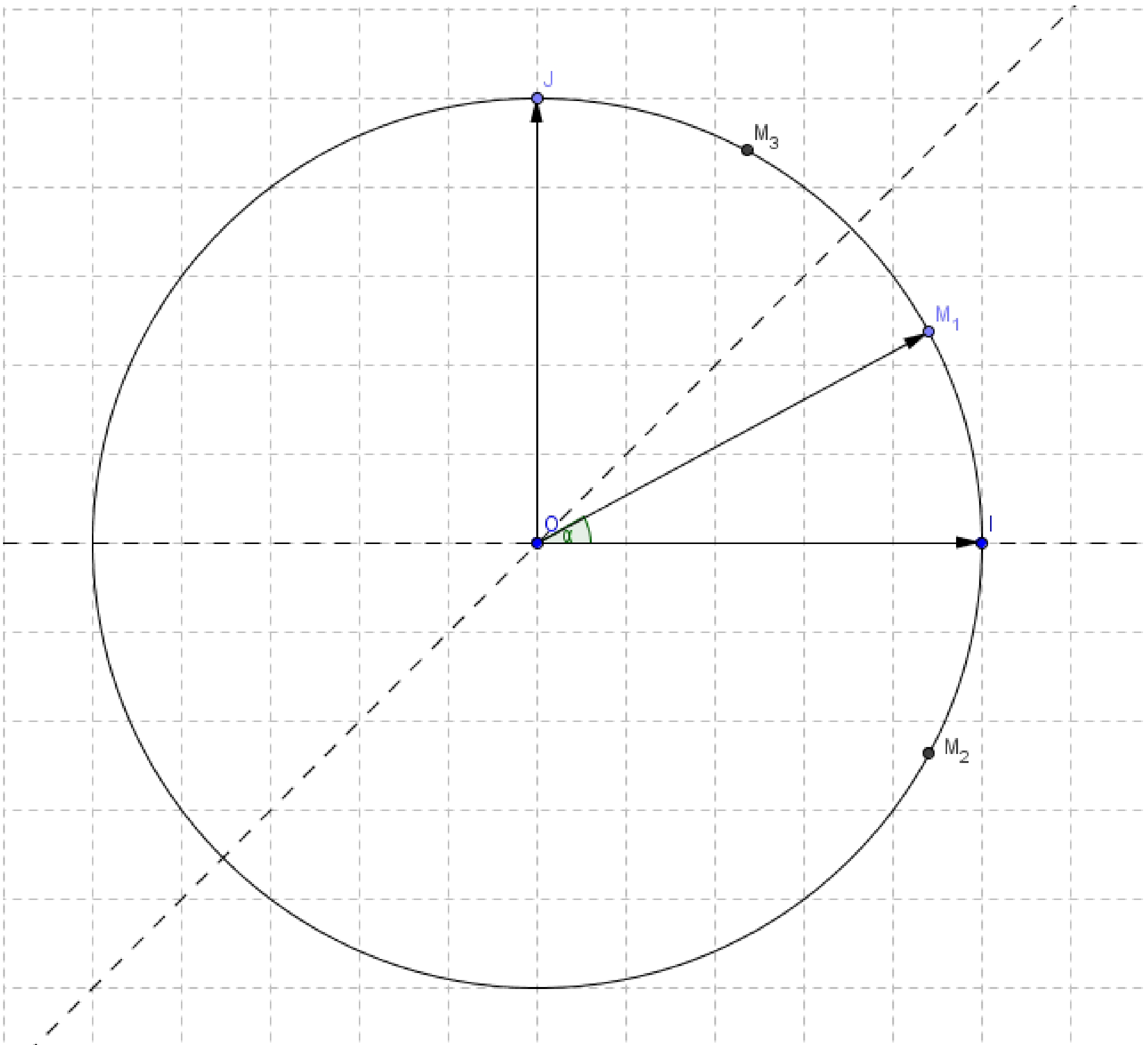
b) $z_2 = \cos\alpha - \text{i}\sin\alpha$ $\quad$ Comme $z_2 = \overline{z_1}$, on a: $|z_2| = 1$

c) $z_3 = \sin\alpha + \text{i}\cos\alpha$ $\quad |z_3| = \sqrt{(\sin\alpha)^2+(\cos\alpha)^2} = 1$

Important:

Les images de ces trois complexes sont situés sur le cercle unitaire (cercle de centre O et de rayon 1)

Rappel:



Un point M du cercle trigonométrique a pour coordonnées cartésiennes ($\cos\alpha$; $\sin\alpha$) où α est une mesure de l'angle ($\vec{u}$, $\overrightarrow{OM}$)

---

36 page 279

a) Deux méthodes:

- on réduit le produit donné , puis on calcule le module

$(5 - 3\text{i})(12 + 7\text{i}) = \ldots = 81 - \text{i}$, d'où, $|(5-3\text{i})(12+7\text{i})| = |81-\text{i}| = \sqrt{81^2+(-1)^2} = \sqrt{6562}$

- on calcule le module de chaque facteur, puis on effectue le produit des modules.

$|(5-3\text{i})(12+7\text{i})| = |5-3\text{i}| \times |12+7\text{i}| = \sqrt{34} \times \sqrt{193} = \sqrt{34\times193} = \sqrt{6562}$

b) Une méthode s'impose … $|z^n| = |z|^n$

$|(3-4\,\mathrm{i})^5| = |3-4\,\mathrm{i}|^5 = 5^5 = 3\ 125$

---

41 page 279

a) $|z+1-2\,\mathrm{i}| = \sqrt{2}$

Soit A le point d'affixe $z_{\mathbf{A}} = -1 + 2\mathrm{i}$

$z + 1 - 2\mathrm{i}$ est l'affixe de $\overrightarrow{AM}$, d'où,

$|z+1-2\,\mathrm{i}| = \sqrt{2}$ équivaut à $AM = \sqrt{2}$.

L'ensemble des points M est le cercle de centre A et de rayon $\sqrt{2}$.

b) $|z| = |z-3\,\mathrm{i}|$

Soit B le point d'affixe $z_{\mathbf{B}} = 3\mathrm{i}$

$z - 3\mathrm{i}$ est l'affixe de $\overrightarrow{BM}$, d'où,

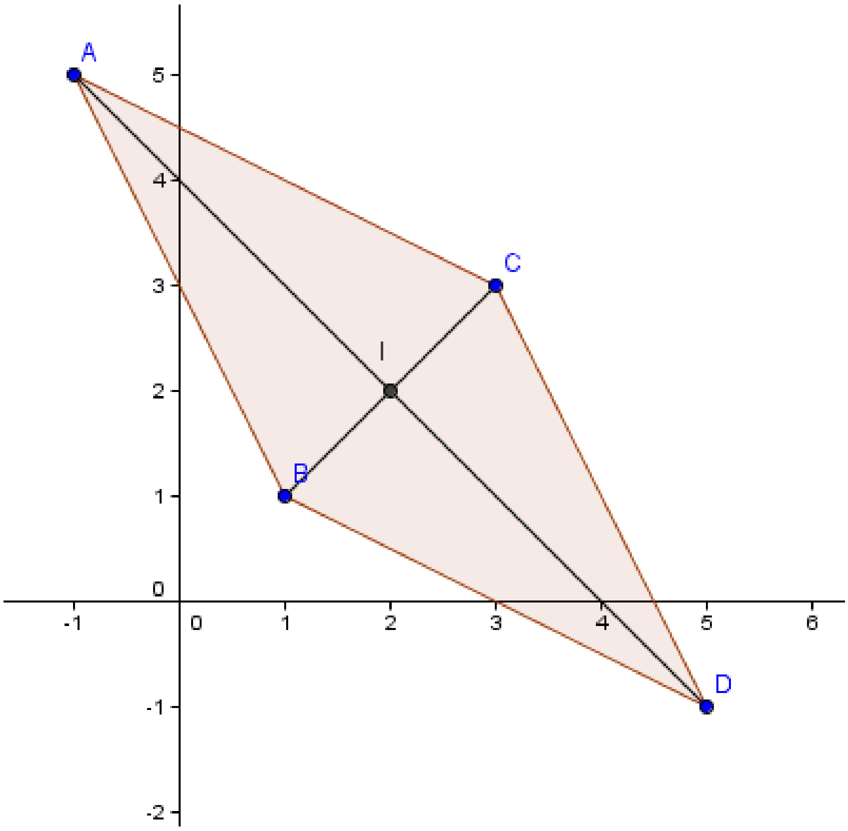
$|z| = |z-3\,\mathrm{i}|$ équivaut à $OM = BM$.

L'ensemble des points M est la médiatrice du segment $[OB]$

---

46 page 279

Il est important de faire une figure et de contrôler les résultats ...
$A(-1 + 5\mathrm{i})$, $B(1 + \mathrm{i})$ et $C(3 + 3\mathrm{i})$
a) Affixe de $\overrightarrow{AB}$: $z_{\overrightarrow{AB}} = 1 + \mathrm{i} - (-1 + 5\mathrm{i}) = 2 - 4\mathrm{i}$
Affixe de $\overrightarrow{AC}$: $z_{\overrightarrow{AC}} = 3 + 3\mathrm{i} - (-1 + 5\mathrm{i}) = 4 - 2\mathrm{i}$
$|z_{\overrightarrow{AB}}| = \sqrt{2^2+(-4)^2} = 2\sqrt{5}$ et $|z_{\overrightarrow{AC}}| = \sqrt{4^2+(-2)^2} = 2\sqrt{5}$
On en déduit: $AB = AC$.
Le triangle ABC est un triangle isocèle de sommet A.
Le triangle est-il rectangle en A?
$\overrightarrow{BC}$ a pour affixe $3 + 3\mathrm{i} - (1 + \mathrm{i}) = 2 + 2\mathrm{i}$, d'où, $BC = \sqrt{2^2+2^2} = 2\sqrt{2}$.
Comme $BC^2 \neq AC^2 + AB^2$, le triangle n'est pas rectangle en A.
b) **Erreur d'énoncé: Le losange est *ABDC* (il est impossible d'avoir un losange *ABCD*)**

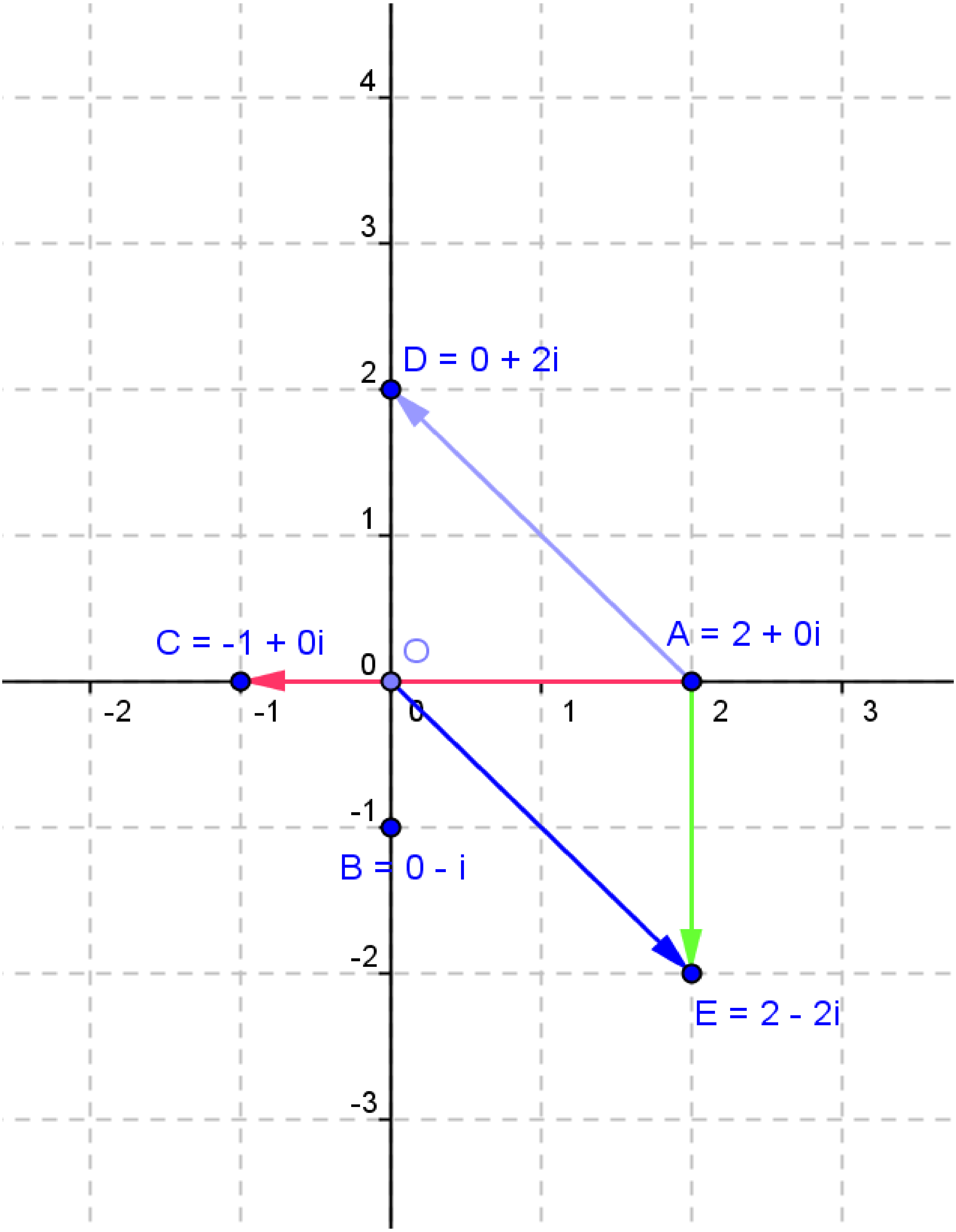


On sait: $AB = AC$, il suffit donc de déterminer le point D tel que $ABDC$ est un parallélogramme.
Une méthode:
On cherche D tel que $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$, on cherche donc D tel que $z_D - z_C = z_B - z_A$
$z_D = 1 + i - (-1 + 5i) + 3 + 3i = 5 - i$
Une autre méthode:
On cherche le milieu I de la diagonale $[BC]$ et on détermine le symétrique de A par rapport à I.
$z_I = \dfrac{z_B + z_C}{2} = ... = 2 + 2i$
On veut: $z_I = \dfrac{z_A + z_D}{2}$, soit: $z_D = 2z_I - z_A = 2(2 + 2i) - (-1 + 5i) = 5 - i$

---

48 page 280

Lecture graphique



a) $\arg(z_A) = 0\ [2\pi]$ $\arg(z_B) = -\dfrac{\pi}{2}\ [2\pi]$ $\arg(z_C) = \pi\ [2\pi]$

$\arg(z_D) = \dfrac{\pi}{2}\ [2\pi]$ $\arg(z_E) = -\dfrac{\pi}{4}\ [2\pi]$

b) Comme $(\vec{u}, \overrightarrow{AC}) = \pi\ [2\pi]$, on a: $\arg(z_{\overrightarrow{AC}}) = \pi\ [2\pi]$.

Comme $(\vec{u}, \overrightarrow{AE}) = -\frac{\pi}{2}$ $[2\pi]$, on a: arg($z_{\overrightarrow{AE}}$) = $-\frac{\pi}{2}$ $[2\pi]$.

Comme $(\vec{u}, \overrightarrow{OE}) = -\frac{\pi}{4}$ $[2\pi]$, on a: arg($z_{\overrightarrow{OE}}$) = $-\frac{\pi}{4}$ $[2\pi]$.

Comme $(\vec{u}, \overrightarrow{AD}) = \frac{3\pi}{4}$ $[2\pi]$, on a: arg($z_{\overrightarrow{OE}}$) = $\frac{3\pi}{4}$ $[2\pi]$.

Comme $(\vec{u}, \overrightarrow{DA}) = -\frac{\pi}{4}$ $[2\pi]$, on a: arg($z_{\overrightarrow{DA}}$) = $-\frac{\pi}{4}$ $[2\pi]$.

---

49 page 280

(ne pas hésiter à placer les points et à s'aider de la lecture graphique)

$z_1 = 5$ d'où $\arg(z_1) = 0$ $[2\pi]$

$z_2 = 4\mathrm{i}$ d'où $\arg(z_2) = \frac{\pi}{2}$ $[2\pi]$

$z_3 = -2\mathrm{i}$ d'où $\arg(z_3) = -\frac{\pi}{2}$ $[2\pi]$

$z_4 = \mathrm{i} - 1 = -1 + \mathrm{i} = \sqrt{2}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}\mathrm{i}\right) = \sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) + \mathrm{i}\sin\left(\frac{3\pi}{4}\right)\right)$ d'où $\arg(z_4) = \frac{3\pi}{4}$ $[2\pi]$

$z_5 = \frac{\mathrm{i}}{2}$ d'où $\arg(z_5) = \frac{\pi}{2}$ $[2\pi]$

---

55 page 280

M d'affixe z, A d'affixe $1 - 5\mathrm{i}$ et B d'affixe $2\mathrm{i}$

a) On a alors: l'affixe de $\overrightarrow{AM}$ est $z - (1 - 5\mathrm{i}) = z - 1 + 5\mathrm{i}$ et celle de $\overrightarrow{BM}$ est $z - 2\mathrm{i}$

b) Pour $z \neq 1 - 5\mathrm{i}$ et $z \neq 2\mathrm{i}$, une mesure de ($\overrightarrow{AM}$, $\overrightarrow{BM}$) est donnée par $\arg\left(\frac{z-2\mathrm{i}}{z-1+5\mathrm{i}}\right)$, car, d'après la relation de Chasles, ($\overrightarrow{AM}$, $\overrightarrow{BM}$) = ($\vec{u}$, $\overrightarrow{BM}$) – ($\vec{u}$; $\overrightarrow{AM}$) = arg(z – 2i) – arg(z – 1 + 5i) $[2\pi]$ Index

---

57 page 280

$z' = \frac{z+3-7\mathrm{i}}{z+1+3\mathrm{i}}$ avec $z \neq -1 - 3\mathrm{i}$

On pose $A(-3 + 7\mathrm{i})$, $B(-1 - 3\mathrm{i})$, $M(z)$.

En ce cas, $z + 3 - 7\mathrm{i}$ est l'affixe de $\overrightarrow{AM}$ et $z + 1 + 3\mathrm{i}$ est celle de $\overrightarrow{BM}$.

Pour $M \neq B$, n a donc $|z'| = \left|\frac{z+3-7\mathrm{i}}{z+1+3\mathrm{i}}\right| = \frac{|z+3-7\mathrm{i}|}{|z+1+3\mathrm{i}|} = \frac{AM}{BM}$

et pour $M \neq A$ et $M \neq B$, $\arg\left(\frac{z+3-7\mathrm{i}}{z+1+3\mathrm{i}}\right) = \arg(z + 3 - 7\mathrm{i}) - \arg(z + 1 + 3\mathrm{i})$ $[2\pi]$

$$= (\vec{u}, \overrightarrow{AM}) - (\vec{u}, \overrightarrow{BM}) \quad [2\pi]$$

$$= (\overrightarrow{BM}, \overrightarrow{AM}) \quad [2\pi] \qquad \text{ou encore}$$

$$= (\overrightarrow{MB}, \overrightarrow{MA}) \quad [2\pi]$$

---

70 page 280

a) Soit $Z = \dfrac{\mathrm{i}\sqrt{3}-1}{1+\mathrm{i}}$

Forme algébrique: il s'agit de mettre sous la forme $X + \mathrm{i}Y$ où X et Y sont des ***réels***

Méthode: On multiplie N et D par le complexe conjugué de D.

Ici, on a: 1 – i est le conjugué de 1 + i et (1 + i)(1 – i) = 2 (carré du module)

Calculs:

On a donc: $Z = \dfrac{(\mathrm{i}\sqrt{3}-1)(1-\mathrm{i})}{2} = \dfrac{-1+\sqrt{3}}{2} + \mathrm{i}\ \dfrac{\sqrt{3}+1}{2}$

La partie réelle de Z est: $\dfrac{-1+\sqrt{3}}{2}$, la partie imaginaire de Z est: $\dfrac{\sqrt{3}+1}{2}$.

Remarque: On ne reconnaît pas de lignes trigonométriques remarquables …

Forme trigonométrique: il s'agit de mettre sous la forme $r(\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta)$ où ***r* est un réel strictement positif et *θ* un réel.**

Module: la meilleure méthode est d'appliquer les propriétés du module d'un quotient.

On cherche le module du numérateur: $|-1+i\sqrt{3}| = \sqrt{(-1)^2+(\sqrt{3})^2} = 2$

et du dénominateur: $|1+\mathrm{i}| = \sqrt{2}$.

Par conséquent: $|Z| = \dfrac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$

Argument: la seule méthode pour cet exercice les propriétés de l'argument d'un quotient.

On cherche un argument du numérateur: arg$(-1 + \mathrm{i}\sqrt{3}) = \alpha$ est défini par: $\begin{cases}\cos\alpha = \dfrac{-1}{2}\\ \sin\alpha = \dfrac{\sqrt{3}}{2}\end{cases}$, d'où, $\alpha = \dfrac{2\pi}{3}\ [2\pi]$

On cherche un argument du dénominateur: arg$(1 + \mathrm{i}) = \beta$ est défini par: $\begin{cases}\cos\beta = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\\ \sin\beta = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\end{cases}$, d'où, $\beta = \dfrac{\pi}{4}\ [2\pi]$

Par conséquent: arg$(Z) = \alpha - \beta = \dfrac{2\pi}{3} - \dfrac{\pi}{4} = \dfrac{5\pi}{12}$

L'écriture trigonométrique de Z est: $Z = \sqrt{2}\left(\cos\dfrac{5\pi}{12} + \mathrm{i}\sin\dfrac{5\pi}{12}\right)$

b) On a donc: $Z = \frac{-1+\sqrt{3}}{2} + \mathrm{i}\,\frac{\sqrt{3}+1}{2}$ et $Z = \sqrt{2}\,(\cos\frac{5\pi}{12} + \mathrm{i}\sin\frac{5\pi}{12})$

En comparant les deux écritures de Z, il vient:

$\frac{-1+\sqrt{3}}{2} = \sqrt{2}\cos\frac{5\pi}{12}$ (partie réelle)

$\frac{\sqrt{3}+1}{2} = \sqrt{2}\sin\frac{5\pi}{12}$ (partie imaginaire)

On peut conclure: $\cos\frac{5\pi}{12} = \frac{-1+\sqrt{3}}{2} \times \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$

$\sin\frac{5\pi}{12} = \frac{\sqrt{3}+1}{2} \times \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$

---

92 page 282

1) z est un nombre complexe. On peut écrire $z = x + \mathrm{i}y$ avec x et y réels.

$$\frac{z}{1-\mathrm{i}} = \frac{x+iy}{1-\mathrm{i}} = \frac{(x+iy)(1+\mathrm{i})}{(1-\mathrm{i})(1+\mathrm{i})} = \frac{x-y}{2} + \mathrm{i}\left(\frac{x+y}{2}\right)$$

a) $\frac{z}{1-\mathrm{i}}$ est un réel si et seulement si $x + y = 0$ si et seulement si $y = -x$

b) $\frac{z}{1-\mathrm{i}}$ est un imaginaire pur si et seulement si $x - y = 0$ si et seulement si $y = x$

2) L'ensemble des points M d'affixe z vérifiant la condition du 1a) est donc la droite d'équation $y = -x$ et, l'ensemble des points M d'affixe z vérifiant la condition du 1b) est donc la droite d'équation $y = x$. Index

---

93 page 282

On pose: $z = x + \mathrm{i}y$ où x et y sont des réels.

$$\frac{z}{1+2\mathrm{i}} = \frac{(x+iy)(1-2\mathrm{i})}{5} = \frac{x+2y}{5} + \mathrm{i}\,\frac{y-2x}{5}$$

1) a) $\frac{z}{1+2\mathrm{i}}$ est un réel si et seulement si $\frac{y-2x}{5} = 0$ si et seulement si $y = 2x$

b) $\frac{z}{1+2\mathrm{i}}$ est un imaginaire pur si et seulement si $\frac{x+2y}{5} = 0$ si et seulement si $y = -\frac{x}{2}$

2) a) Tracer la droite d'équation $y = 2x$

b) Tracer la droite d'équation $y = -\frac{x}{2}$ Index

---

95 page 282

$S(n) = 1 + \mathrm{i} + \mathrm{i}^2 + \ldots + \mathrm{i}^n$

a) $S(10) = 1 + \mathrm{i} + \mathrm{i}^2 + \mathrm{i}^3 + \mathrm{i}^4 + \mathrm{i}^5 + \mathrm{i}^6 + \mathrm{i}^7 + \mathrm{i}^8 + \mathrm{i}^9 + \mathrm{i}^{10}$

$= 1 + i - 1 - i + 1 + i - 1 - i + 1 + i - 1 = i$

$S(11) = S(10) + i^{11} = i - i = 0$

$S(12) = S(11) + i^{12} = 0 + 1 = 1$

$S(13) = S(12) + i^{13} = 1 + i$

Analyse des résultats: Si on poursuit, on voit réapparaître un cycle de 4 résultats:

Pour *n* =	10	11	12	13
	14	15	16	17
	18	19	20	21
	...	...	...	...
S(*n*) =	i	0	1	1 + i

On a donc dans chaque colonne pour *n* des suites arithmétiques de raison 4 et de premier terme à déterminer, ce qui mène à *n* = 4*k* + (premier terme)

Autre méthode:

Soit la suite géométrique de premier terme 1 et de raison i.

On a: S(*n*) = 1 + i + ... + i^n est la somme de (*n* + 1) termes consécutifs de cette suite géométrique.

d'où, S(*n*) = $1\times\frac{1-i^{n+1}}{1-i}$, or, $i^{n+1} = \begin{cases} i \text{ si } n=4k \\ -1 \text{ si } n=4k+1 \\ -i \text{ si } n=4k+2 \\ 1 \text{ si } n=4k+3 \end{cases}$

b) Avec la première analyse

n	***S(n)***	***Cas particuliers du a)***
4*k*	1	S(12)
4*k* + 1	1 + i	S(13)
4*k* + 2	i	S(10)
4*k* + 3	0	S(11)

Preuve:

Pour *n* = 0, on a S(0) = 1

Soit *n* = 4*k*

Supposons S(4*k*) = 1

alors $S(4k + 1) = S(4k) + i^{4k+1} = 1 + (i^4)^k\times i = 1 + 1^k\times i = 1 + i$

$S(4k + 2) = S(4k + 1) + i^{4k+2} = 1 + i + (i^4)^k\times i^2 = 1 + i + 1^k\times(-1) = 1 + i - 1 = i$

$S(4k + 3) = S(4k + 2) + i^{4k+3} = i + (i^4)^k\times i^3 = i + 1^k\times(-i) = i - i = 0$

Avec la somme ses termes d'une suite géométrique:

$S(4k) = \frac{1-i}{1-i} = 1$, $S(4k + 1) = \frac{2}{1-i} = \frac{2(1+i)}{2} = 1 + i$, $S(4k + 2) = \frac{1+i}{1-i} = \frac{(1+i)^2}{2} = \frac{2i}{2} = i$,

$S(4k + 3) = \frac{0}{1-i} = 0$ Index

96 page 282

$2z\bar{z} = 3(z + \bar{z})$

On pose $z = x + iy$ où $(x, y) \in \mathbb{R}^2$

$2z\bar{z} = 3(z + \bar{z}) \Leftrightarrow 2(x^2+y^2) = 3(2x) \Leftrightarrow x^2+y^2 - 3x = 0 \Leftrightarrow \left(x-\frac{3}{2}\right)^2+y^2 = \frac{9}{4}$

L'ensemble des points $M(z)$ est le cercle de centre Ω d'affixe $\frac{3}{2}$ et de rayon $\frac{3}{2}$

99 page 282

$z \neq -3$

$Z = \frac{2-\bar{z}}{3+z}$

Une méthode:

On pose $z = x + iy$ où $(x, y) \in \mathbb{R}^2$

$Z = \frac{2-(x-iy)}{3+x+iy} = \frac{(2-x+iy)(3+x-iy)}{(3+x)^2+y^2} = \frac{(2-x)(3+x)+iy(3+x-2+x)}{(3+x)^2+y^2}$

Z est un réel si et seulement si $z \neq -3$ et $y(1 + 2x) = 0$

Z est un réel si et seulement si $z \neq -3$ et ($y = 0$ ou $1 + 2x = 0$)

L'ensemble des points $M(z)$ tels que Z est un réel est la réunion des droites: $x = -\frac{1}{2}$ et $y = 0$ (axe des abscisses) privée du point A d'affixe -3.

Une autre méthode.

Z est un réel si et seulement si $Z = \bar{Z}$

$\frac{2-\bar{z}}{3+z} = \overline{\frac{2-\bar{z}}{3+z}} = \frac{\overline{2-\bar{z}}}{\overline{3+z}} = \frac{2-z}{3+\bar{z}}$

On a alors: $z \neq -3$ et $(2-\bar{z})(3+\bar{z}) = (3+z)(2-z)$

$6-\bar{z}-\bar{z}^2 = 6-z-z^2$

$z-\bar{z}+z^2-\bar{z}^2 = 0$

$(z-\bar{z})(1+z+\bar{z}) = 0$

Or $z-\bar{z} = 2iy$ et $z + \bar{z} = 2x$ On retrouve les résultats de la méthode précédente

Une autre méthode.

On considère le point M' symétrique de M par rapport à l'axe des abscisses.

L'affixe de M' est $\bar{z}$

On note A le point d'affixe -3 et B le point d'affixe 2.

Z est un réel si et seulement si $z \neq -3$ et, $z = 2$ ou $\arg(Z) = 0\ [\pi]$

Or $\arg(Z) = \arg(2-\bar{z}) - \arg(3+z) = (\vec{u}, \overrightarrow{M'B}) - (\vec{u}, \overrightarrow{MA}) = (\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{M'B})\ [\pi]$

Z est un réel si et seulement si $M \neq A$ et, $M = B$ ou $(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{M'B}) = 0\ [\pi]$

$\overrightarrow{MA}$ et $\overrightarrow{M'B}$ sont donc colinéaires.

Or, A et B étant sur l'axe des abscisses, (AB) est la médiatrice de $[MM']$

On a donc: $\begin{cases} AM = AM' \\ BM = BM' \\ (AM) \parallel (AM') \end{cases}$ (M et M' de part et d'autre de (AB))

On a alors: Soit M (et M') sur (AB), soit, $AMBM'$ losange et (MM') est donc la médiatrice de $[AB]$ Index

---

103 page 283

a) $z = \dfrac{1+\mathrm{i}}{\sqrt{3}-\mathrm{i}}$

$|z| = \left|\dfrac{1+\mathrm{i}}{\sqrt{3}-\mathrm{i}}\right| = \dfrac{|1+\mathrm{i}|}{|\sqrt{3}-\mathrm{i}|} = \dfrac{\sqrt{1^2+1^2}}{\sqrt{(\sqrt{3})^2+1^2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

$1 + \mathrm{i} = \sqrt{2}\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2} + \mathrm{i}\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$. Comme $\cos\dfrac{\pi}{4} = \sin\dfrac{\pi}{4} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$, un argument de $1 + \mathrm{i}$ est $\dfrac{\pi}{4}$

$\sqrt{3} - \mathrm{i} = 2\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2} - \dfrac{1}{2}\mathrm{i}\right)$. Comme $\cos\left(-\dfrac{\pi}{6}\right) = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ et $\sin\left(-\dfrac{\pi}{6}\right) = -\dfrac{1}{2}$, un argument de $\sqrt{3} - \mathrm{i}$ est $-\dfrac{\pi}{6}$

$\arg(z) = \arg(1 + \mathrm{i}) - \arg(\sqrt{3} - \mathrm{i}) = \dfrac{\pi}{4} + \dfrac{\pi}{6} = \dfrac{5\pi}{12}\ [2\pi]$

$z = \dfrac{\sqrt{2}}{2}\left(\cos\dfrac{5\pi}{12} + \mathrm{i}\sin\dfrac{5\pi}{12}\right)$

b) n, entier naturel non nul, tel que z^n est réel.

Comme $\arg(z^n) = n\arg(z)$, on cherche les entiers n tels que $n\times\dfrac{5\pi}{12} = 0 + k\pi$; $k \in \mathbb{Z}$

ou encore, n tel que $\dfrac{5n}{12} = k$ avec $k \in \mathbb{Z}$

n est donc un multiple de 12.

Le premier entier non nul est 12

z^{12} est donc le nombre complexe de module $|z|^{12}$ et d'argument $12\times\dfrac{5\pi}{12} = \pi$

$|z|^{12} = \left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)^{12} = \left(\dfrac{1}{2}\right)^6 = \dfrac{1}{64}$

$z^{12} = -\dfrac{1}{64}$

---

105 page 283

$arg(z+2\mathrm{i})=-\dfrac{\pi}{4}+k\pi \quad (k\in\mathbb{Z})$ équivaut à $(\vec{u},\overrightarrow{CM})=-\dfrac{\pi}{4}+k\pi \quad (k\in\mathbb{Z})$ avec l'affixe de *C:* $z_C=-2\mathrm{i}$

l'ensemble des points *M* d'affixe *z* vérifiant $arg(z+2\mathrm{i})=-\dfrac{\pi}{4}+k\pi \quad (k\in\mathbb{Z})$ est la droite passant par *C* (*C* exclu) faisant un angle de $-\dfrac{\pi}{4}$ avec l'axe des abscisses. C'est la droite d'équation $y=-x-2$ dans le repère orthonormé direct avec le point $C(-2;0)$ exclu.

106 page 283

M_1, M_2 et M_3 d'affixes respectives $z_1 = \sqrt{3} + \mathrm{i}$, $z_2 = \sqrt{3} - \mathrm{i}$ et $z_3 = -2\mathrm{i}$

Remarque: $z_2 = \overline{z_1}$, d'où, M_1, M_2 sont symétriques par rapport à l'axe des abscisses et $OM_1 = OM_2$

a) $OM_1 = OM_2 = |z_2| = |z_1| = \sqrt{(\sqrt{3})^2+1^2} = 2$ et $OM_3 = |z_3| = |-2\mathrm{i}| = 2$

Les points M_1, M_2 et M_3 sont donc sur le cercle de centre *O* et e rayon 2.

Remarque: On peut à partir de cette information construire facilement les points M_1 et M_2 en traçant le cercle de centre *O* et de rayon 2et en plaçant leurs ordonnées 1 et –1.

b) $z_2 - z_1 = \sqrt{3} - \mathrm{i} - \sqrt{3} - \mathrm{i} = -2\mathrm{i} = z_3$

On a donc: $\overrightarrow{M_1M_2} = \overrightarrow{OM_3}$

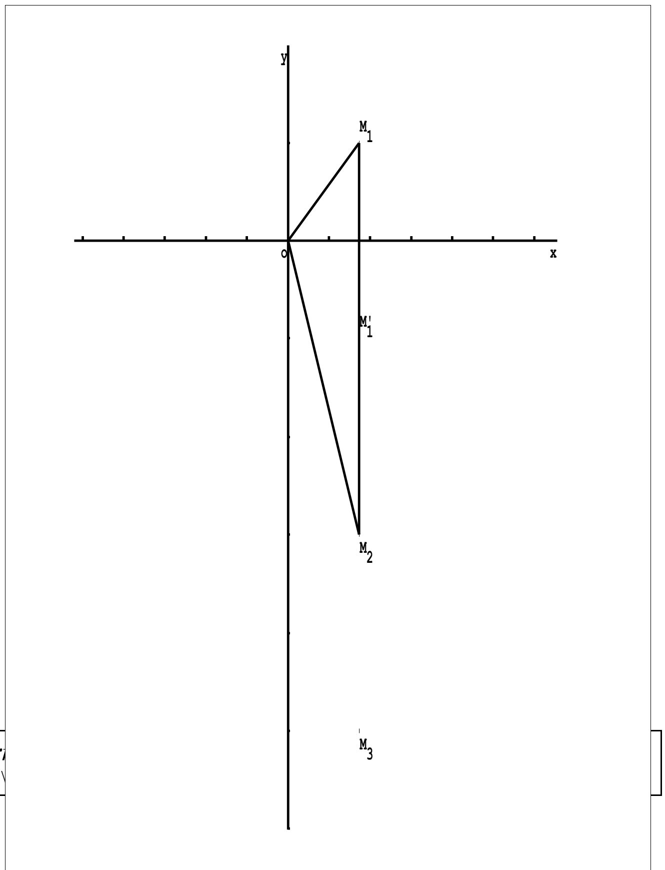
On en déduit:

Le quadrilatère $OM_1M_2M_3$ est un parallélogramme et comme il a deux côtés consécutifs $[OM_1]$ et $[OM_3]$ de même longueur, ce parallélogramme $OM_1M_2M_3$ est un losange.

108 page 283

$z_1 = \dfrac{\sqrt{3}+\mathrm{i}}{4}$, $z_2=z_1-\mathrm{i}$ et $z_3=\overline{z_1}-\mathrm{i}$

M_1 , M_2 et M_3 sont les images respectives des complexes z_1 , z_2 et z_3 dans $(O;\vec{u},\vec{v})$



1 a) $z_2 = z_1-\mathrm{i} = \dfrac{\sqrt{3}+\mathrm{i}}{4}-\mathrm{i} = \dfrac{\sqrt{3}-3\mathrm{i}}{4}$

$z_3 = \overline{z_1}-\mathrm{i} = \overline{\dfrac{\sqrt{3}+\mathrm{i}}{4}}-\mathrm{i} = \dfrac{\sqrt{3}-\mathrm{i}}{4}-\mathrm{i} = \dfrac{\sqrt{3}-5\mathrm{i}}{4}$

b) $|z_3-z_1| = \left|\dfrac{\sqrt{3}-5\mathrm{i}}{4}-\dfrac{\sqrt{3}+\mathrm{i}}{4}\right| = \left|-\dfrac{3}{2}\mathrm{i}\right| = \dfrac{3}{2}$

$|z_3-z_2| = \left|\dfrac{\sqrt{3}-5\mathrm{i}}{4}-\dfrac{\sqrt{3}-3\mathrm{i}}{4}\right| = \left|-\dfrac{1}{2}\mathrm{i}\right| = \dfrac{1}{2}$

$|z_2-z_1| = |-\mathrm{i}| = 1$. Comme $1+\dfrac{1}{2} = \dfrac{3}{2}$, on a donc:

$|z_3-z_1| = |z_3-z_2| + |z_2-z_1|$

Ce qui donne $M_1M_3 = M_1M_2 + M_2M_3$.

Le point $M_2 \in [M_1M_3]$

2a) $|z_1| = \left|\frac{\sqrt{3}+\mathrm{i}}{4}\right| = \sqrt{\frac{3+1}{16}} = \frac{1}{2}$

Posons $\theta_1 = \arg(z_1)$, on a: $\begin{cases} \cos\theta_1 = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \sin\theta_1 = \frac{1}{2} \end{cases}$, d'où, $\theta_1 = \frac{\pi}{6}\quad [2\pi]$ $\qquad z_1 = \frac{1}{2}\mathrm{e}^{i\frac{\pi}{6}}$

$|z_2| = \left|\frac{\sqrt{3}-3\mathrm{i}}{4}\right| = \sqrt{\frac{3+9}{16}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

Posons $\theta_2 = \arg(z_2)$, on a: $\begin{cases} \cos\theta_2 = \frac{1}{2} \\ \sin\theta_2 = \frac{-\sqrt{3}}{2} \end{cases}$, d'où, $\theta_2 = \frac{-\pi}{3}\quad [2\pi]$ $\qquad z_2 = \frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{e}^{i\frac{-\pi}{3}}$

b) $|z_2 - z_1| = |-\mathrm{i}| = 1$

c) D'après 2a) $(\widehat{\vec{u};\overrightarrow{OM}_1}) = \frac{\pi}{6}\quad [2\pi]$

et $(\widehat{\vec{u};\overrightarrow{OM}_2}) = \frac{-\pi}{3}\quad [2\pi]$

$(\widehat{\overrightarrow{OM}_1;\overrightarrow{OM}_2}) = (\widehat{\vec{u};\overrightarrow{OM}_2}) - (\widehat{\vec{u};\overrightarrow{OM}_1}) = \frac{-\pi}{2}\quad [2\pi]$

Le triangle OM_1M_2 est donc un triangle rectangle (indirect) en *O*.

Ou Pythagore: d'après 2 a), $OM_1 = \frac{1}{2}$, $OM_2 = \frac{\sqrt{3}}{2}$ et $M_1M_2 = 1$

Comme $1^2 = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2$, d'après la réciproque de Pythagore....

Ou calcul de l'angle orienté $(\widehat{\overrightarrow{OM}_1;\overrightarrow{OM}_2}) = \arg\frac{z_2}{z_1}$ en déterminant d'abord le quotient $\frac{z_2}{z_1}$

$\frac{z_2}{z_1} = \frac{\sqrt{3}-3\mathrm{i}}{\sqrt{3}+i} = \frac{\sqrt{3}-3\mathrm{i}\times\sqrt{3}-\mathrm{i}}{4} = ... = -\sqrt{3}\mathrm{i}$

ou en utilisant les écritures exponentielles: $\frac{z_2}{z_1} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{e}^{i\frac{-\pi}{3}}}{\frac{1}{2}\mathrm{e}^{i\frac{\pi}{6}}} = \sqrt{3}\,\mathrm{e}^{i\frac{-\pi}{2}} = \sqrt{3}(-\mathrm{i})$ =...

Comme $\frac{z_2}{z_1}$ est un imaginaire pur avec la partie imaginaire strictement négative, on a: $(\widehat{\overrightarrow{OM}_1;\overrightarrow{OM}_2}) = \frac{-\pi}{2}$

Index

---

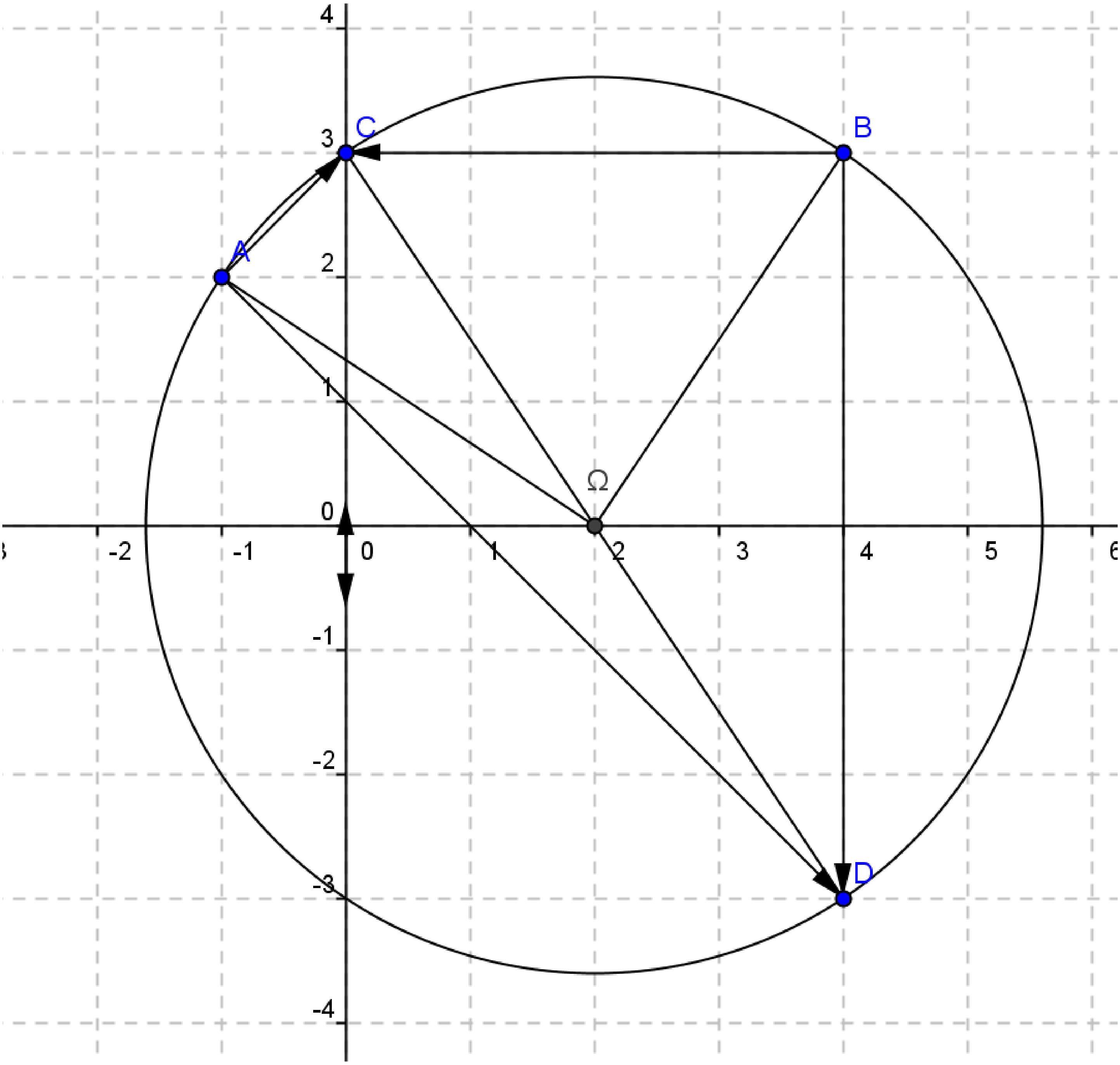
110 page 283

$z_A = -1 + 2\mathrm{i}$, $z_B = 4 + 3\mathrm{i}$, $z_C = 3\mathrm{i}$ et $z_D = 4 - 3\mathrm{i}$

a) $\dfrac{z_C - z_A}{z_D - z_A} = \dfrac{1+\mathrm{i}}{5(1-\mathrm{i})} = \dfrac{1}{5}\,\mathrm{i}$

$\dfrac{z_C - z_B}{z_D - z_B} = \dfrac{4}{-6\mathrm{i}} = \dfrac{2}{3}\,\mathrm{i}$

b) La question précédente prouve que les deux triangles *ACD* et *BCD*sont rectangles respectivement en *A* et *B* et non isocèles.



c) L'hypoténuse [*AD*] de ces deux triangles rectangles est le diamètre du cercle circonscrit à chacun. Ce résultat prouve que *A*, *B*, *C*, *D* sont sur le cercle de diamètre [*BD*].

Le centre est donc le point Ω d'affixe $z_\Omega = \dfrac{z_C + z_D}{2} = 2$ et de rayon $r = \dfrac{CD}{2} = \dfrac{|z_D - z_C|}{2} = \dfrac{|4+6\mathrm{i}|}{2} = \sqrt{13}$

111 page 283

Dans le plan complexe $(O\,;\vec{u},\vec{v})$, $A(-3)$, $B(1+\mathrm{i})$, $M(z)$, $M'(z')$ avec $z' = \dfrac{z+3}{z-1-\mathrm{i}}$

Remarques importantes: $z+3$ est l'affixe de $\overrightarrow{AM}$, et, $z-1-\mathrm{i}$ est celle de $\overrightarrow{BM}$.

ce qui veut dire: $|z+3| = AM$ et $|z-1-\mathrm{i}| = BM$.

$$\arg(z+3) = (\vec{u}\,,\overrightarrow{AM}) + 2k\pi\ ;\ k \in \mathbb{Z} \text{ et } \arg(z-1-\mathrm{i}) = (\vec{u}\,,\overrightarrow{BM}) + 2k\pi\ ;\ k \in \mathbb{Z}$$

a) Ensemble des points M tels que $OM' = 1$

$OM' = 1$ si et seulement si $z \neq 1+\mathrm{i}$ et $|z'| = 1$

si et seulement si $z \neq 1+\mathrm{i}$ et $\left|\dfrac{z+3}{z-1-\mathrm{i}}\right| = 1$

si et seulement si $z \neq 1+\mathrm{i}$ et $\dfrac{|z+3|}{|z-1-\mathrm{i}|} = 1$

si et seulement si $M \neq B$ et $\dfrac{AM}{BM} = 1$

si et seulement si $M \neq B$ et $AM = BM$

Conclusion: L'ensemble des points M tels que $OM' = 1$ est la médiatrice de $[AB]$.

b) Ensemble des points M tels que M' est sur l'axe des réels

Autrement dit: $M' = O$ ou $(\vec{u}\,,\overrightarrow{OM'}) = 0 + k\pi\ ;\ k \in \mathbb{Z}$

M' est sur l'axe des réels si et seulement si $[(z \neq 1+\mathrm{i})$ et $(z' = 0$ ou $\arg(z') = 0 + k\pi\ ;\ k \in \mathbb{Z})]$

si et seulement si $[(z \neq 1+\mathrm{i})$ et $(z = -3$ ou $\arg\left(\dfrac{z+3}{z-1-\mathrm{i}}\right) = 0 + k\pi\ ;\ k \in \mathbb{Z})]$

si et seulement si $[(z \neq 1+\mathrm{i})$ et $(z = -3$ ou $\arg(z+3) - \arg(z-1-\mathrm{i}) = 0 + k\pi\ ;\ k \in \mathbb{Z})]$

si et seulement si $[(M \neq B)$ et $(M = A$ ou $(\vec{u}\,,\overrightarrow{AM}) - (\vec{u}\,,\overrightarrow{BM}) = 0 + k\pi\ ;\ k \in \mathbb{Z})]$

si et seulement si $[(M \neq B)$ et $(M = A$ ou $(\overrightarrow{BM}\,,\overrightarrow{AM}) = 0 + k\pi\ ;\ k \in \mathbb{Z})]$

De $(\overrightarrow{BM}\,,\overrightarrow{AM}) = 0 + k\pi\ ;\ k \in \mathbb{Z})$, on déduit que les vecteurs $\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{BM}$ sont colinéaires, donc, que les points A, B, M sont alignés.

Conclusion: L'ensemble des points M tels que M' est sur l'axe des réels est la droite (AB) privée de B.

c) Ensemble des points M tels que M' est sur l'axe des imaginaires purs

Autrement dit: $M' = O$ ou $(\vec{u}\,,\overrightarrow{OM'}) = \dfrac{\pi}{2} + k\pi\ ;\ k \in \mathbb{Z}$

M' est sur l'axe des imaginaires purs si et seulement si $[(z \neq 1+\mathrm{i})$ et $(z' = 0$ ou $\arg(z') = \dfrac{\pi}{2} + k\pi\ ;\ k \in \mathbb{Z})]$

si et seulement si $[(z \neq 1+\mathrm{i})$ et $(z = -3$ ou $\arg\left(\dfrac{z+3}{z-1-\mathrm{i}}\right) = \dfrac{\pi}{2} + k\pi\ ;\ k \in \mathbb{Z})]$

si et seulement si [($z \neq 1 + \mathrm{i}$) et ($z = -3$ ou $\arg(z+3) - \arg(z-1-\mathrm{i}) = \dfrac{\pi}{2} + k\pi$; $k \in \mathbb{Z}$)]

si et seulement si [($M \neq B$) et ($M = A$ ou $(\vec{u}, \overrightarrow{AM}) - (\vec{u}, \overrightarrow{BM}) = \dfrac{\pi}{2} + k\pi$; $k \in \mathbb{Z}$)]

si et seulement si [($M \neq B$) et ($M = A$ ou $(\overrightarrow{BM}, \overrightarrow{AM}) = \dfrac{\pi}{2} + k\pi$; $k \in \mathbb{Z}$)]

De $(\overrightarrow{BM}, \overrightarrow{AM}) = \dfrac{\pi}{2} + k\pi$; $k \in \mathbb{Z}$), on déduit que les vecteurs $\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{BM}$ sont orthogonaux, donc, que les points M sont sur un demi-cercle de diamètre [AB]

Conclusion: L'ensemble des points M tels que M' est sur l'axe des imaginaires purs est le cercle de diamètre [AB] privé de B.

---

117 page 285

Analyse de l'énoncé

z est l'affixe d'un point M.

On cherche l'**<u>ensemble</u>** $\mathcal{E}$ des points M tels que leurs affixes vérifient la propriété: $z\ \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}$ est un imaginaire pur.

(Lorsque l'ensemble sera déterminé, il faut que

- si un point appartient à cet ensemble $\mathcal{E}$, son affixe vérifie la propriété.

- si un point n'appartient pas à cet ensemble $\mathcal{E}$, son affixe ne vérifie pas la propriété.

On procède lorsque c'est possible par équivalence.

Analyse de la méthode:

" $M(z) \in \mathcal{E}$ " si et seulement si " $z\ \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}$ est un imaginaire pur ". *(Traduction de ce qui précède)*

" $M(z) \in \mathcal{E}$ " si et seulement si " $z\ \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}} = 0$ ou $\arg(z\ \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}) = \dfrac{\pi}{2} + k\pi$; $k \in \mathbb{Z}$ " .

(On caractérise " être un imaginaire pur " par une équivalence qui permet une " traduction géométrique " d'où le passage aux arguments. Mais, comme 0 n'a pas d'argument, il ne faut pas oublier de traiter ce cas)

" $M(z) \in \mathcal{E}$ " si et seulement si " $z = 0$ ou $\arg(z) + \arg(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}) = \dfrac{\pi}{2} + k\pi$; $k \in \mathbb{Z}$ "

($\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}} \neq 0$,et, on se souvient qu'un argument du produit de … et de … est la somme des arguments de … et de …)

" $M(z) \in \mathcal{E}$ " si et seulement si " $z = 0$ ou $\arg(z) + \dfrac{\pi}{4} = \dfrac{\pi}{2} + k\pi$; $k \in \mathbb{Z}$ "

(Par définition du nombre $\mathrm{e}^{i\theta}$, on a: $\arg(\mathrm{e}^{i\theta}) = \theta + 2k\pi$; $k \in \mathbb{Z}$)

" $M(z) \in \mathcal{E}$ " si et seulement si " $z = 0$ ou $\arg(z) = \dfrac{\pi}{4} + k\pi$; $k \in \mathbb{Z}$ " *(un petit calcul immédiat)*

" $M(z) \in \mathcal{E}$ " si et seulement si " $M = O$ ou $(\vec{u}, \overrightarrow{OM}) = \dfrac{\pi}{4} + k\pi$; $k \in \mathbb{Z}$ " (retour à la géométrie …, car, vous n'avez pas oublié qu'il s'agissait de déterminer un ensemble géométrique).

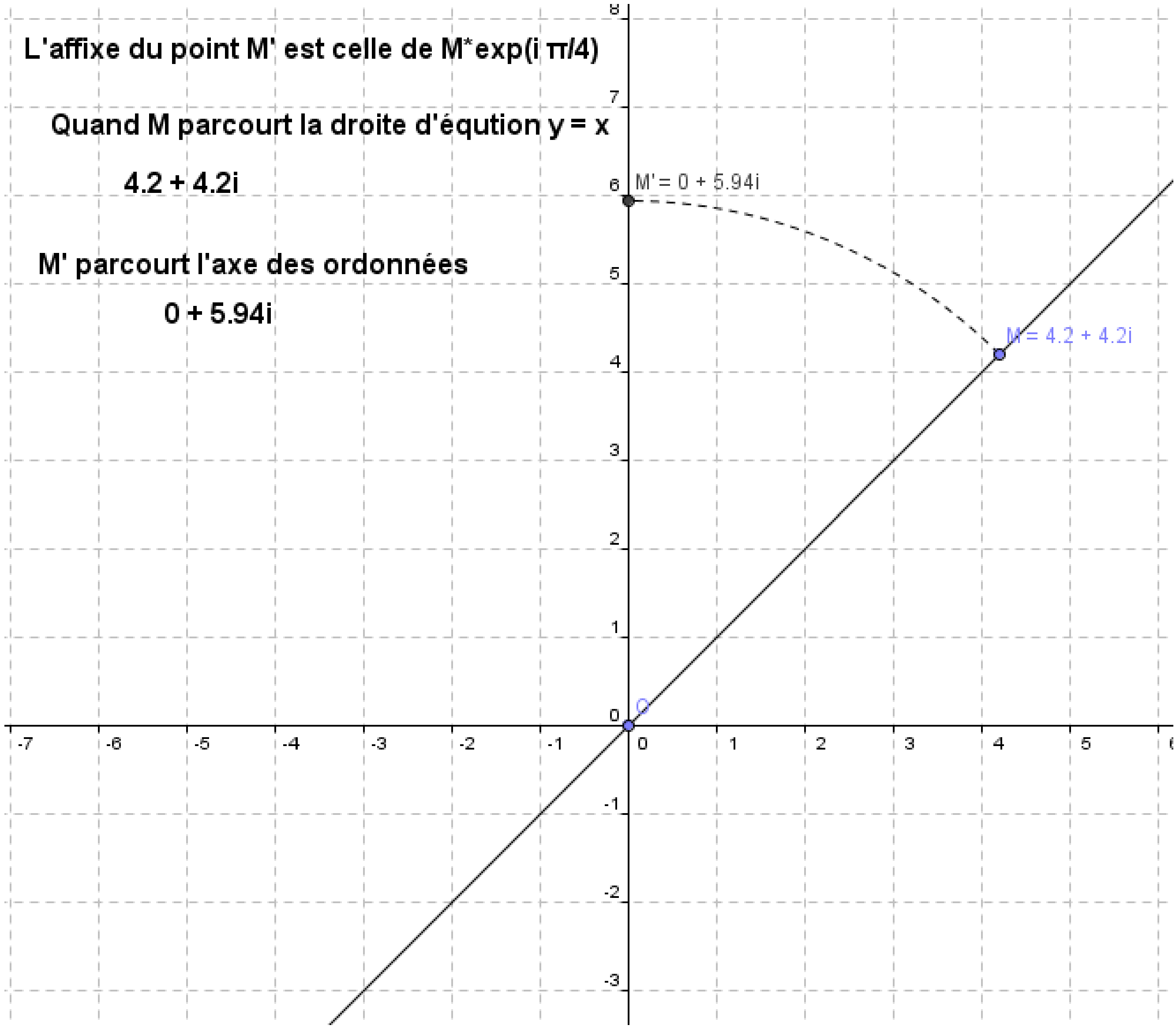
Conclusion:

$\mathcal{E}$ est la droite passant par O et faisant un angle de $\dfrac{\pi}{4}$ avec l'axe des abscisses.

$\mathcal{E}$ est donc la droite d'équation $y = x$.

(Lorsque le cours sera terminé, on aura une méthode plus rapide en utilisant une transformation dans le plan …)

Il suffira de faire une rotation de centre O d'angle $-\dfrac{\pi}{4}$ *et l'image de l'axe des ordonnées est la droite d'équation y = x)*



118 page 285

Analyse de l'énoncé

z est l'affixe d'un point M.

On cherche l'**ensemble** $\mathcal{E}$ des points M tels que leurs affixes vérifient la propriété: $\bar{z}\ e^{-i\frac{\pi}{3}}$ est un réel.

(Lorsque l'ensemble sera déterminé, il faut que

- si un point appartient à cet ensemble $\mathcal{E}$, son affixe vérifie la propriété.
- si un point n'appartient pas à cet ensemble $\mathcal{E}$, son affixe ne vérifie pas la propriété.

On procède lorsque c'est possible par équivalence.

Analyse de la méthode:

" $M(z) \in \mathcal{E}$ " si et seulement si " $\bar{z}\ e^{-i\frac{\pi}{3}}$ est un réel ". *(Traduction de ce qui précède)*

" $M(z) \in \mathcal{E}$ " si et seulement si " $\bar{z}\ e^{-i\frac{\pi}{3}} = 0$ ou $\arg(\bar{z}\ e^{-i\frac{\pi}{3}}) = 0 + k\pi$; $k \in \mathbb{Z}$ " .

(On caractérise " être un réel " par une équivalence qui permet une " traduction géométrique " d'où le passage aux arguments. Mais, comme 0 n'a pas d'argument, il ne faut pas oublier de traiter ce cas)

" $M(z) \in \mathcal{E}$ " si et seulement si " $\bar{z} = 0$ ou $\arg(\bar{z}) + \arg(\ e^{-i\frac{\pi}{3}}) = 0 + k\pi$; $k \in \mathbb{Z}$ "

($e^{-i\frac{\pi}{3}} \neq 0$,et, on se souvient qu'un argument du produit de ... et de ... est la somme des arguments de ... et de ...)

" $M(z) \in \mathcal{E}$ " si et seulement si " $z = 0$ ou $-\arg(z) - \dfrac{\pi}{3} = 0 + k\pi$; $k \in \mathbb{Z}$ "

(On sait: $\bar{z} = 0$ si et seulement si $z = 0$,

$\arg(\bar{z}) = -\arg(z)$

Par définition du nombre $e^{i\theta}$, on a: $\arg(e^{i\theta}) = \theta + 2k\pi$; $k \in \mathbb{Z}$)

" $M(z) \in \mathcal{E}$ " si et seulement si " $z = 0$ ou $\arg(z) = -\dfrac{\pi}{3} + k\pi$; $k \in \mathbb{Z}$ " *(un petit calcul immédiat)*

" $M(z) \in \mathcal{E}$ " si et seulement si " $M = O$ ou $(\vec{u}, \overrightarrow{OM}) = -\dfrac{\pi}{3} + k\pi$; $k \in \mathbb{Z}$ " (retour à la géométrie …, car, vous n'avez pas oublié qu'il s'agissait de déterminer un ensemble géométrique).

Conclusion:

$\mathcal{E}$ est la droite passant par O et faisant un angle de $-\dfrac{\pi}{3}$ avec l'axe des abscisses.

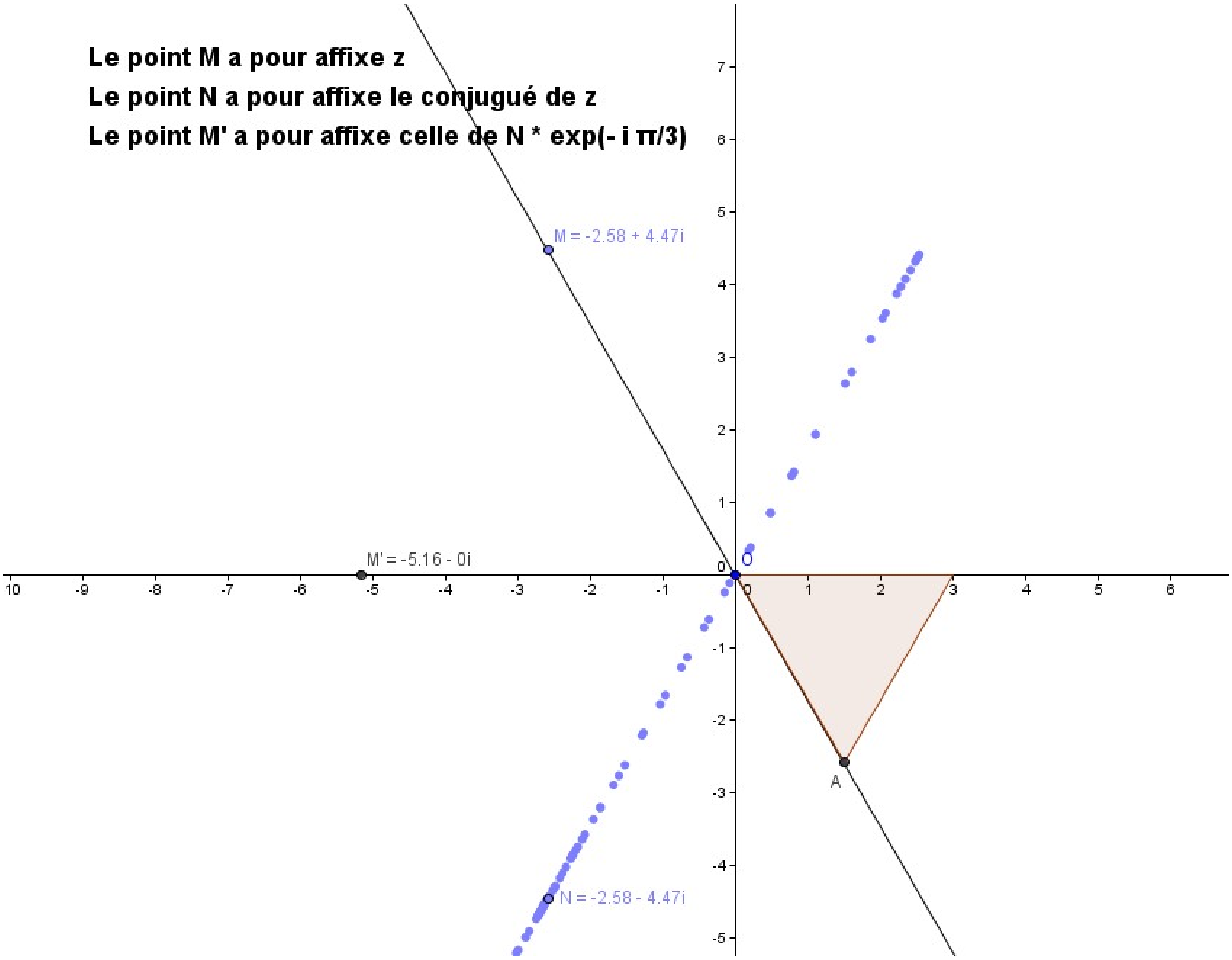
Il suffit de construire un point A tel que l'angle avec l'axe des abscisses et (OA) fasse $-\dfrac{\pi}{3}$ et de construire la droite (OA).

$\mathcal{E}$ est donc la droite d'équation $y = -\sqrt{3}\ x$.

(Lorsque le cours sera terminé, on aura une méthode plus rapide en utilisant une transformation dans le plan ...)

Il suffira de faire une rotation de centre O d'angle $\dfrac{\pi}{3}$, suivie d'une symétrie d'axe $(O, \vec{u})$

et l'image de l'axe des abscisses est la droite d'équation $y = -\sqrt{3}\ x$)



121 page 285

L'énoncé se traduit par:

résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation d'inconnue z: $z^4 = \overline{z^2}$

La méthode consistant à poser $z = x + \mathrm{i}y$ est très, très, très, …, maladroite.

z est soit le complexe nul, soit un complexe de module r et d'argument θ.

On remarque que $z = 0$ est une solution de l'équation.

On pose $z = r\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$ où $r > 0$ et $\theta \in \mathbb{R}$.

L'équation devient: $(r\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})^4 = \overline{(r\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})^2}$ (le conjugué d'un produit est le produit des conjugués)

(un argument du conjugué est l'opposé de l'argument)

Soit $r^4\mathrm{e}^{4\mathrm{i}\theta} = r^2\,\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}\theta}$

L'égalité a lieu si et seulement si les modules sont égaux et les arguments égaux **modulo 2π**.

On obtient le système: $\begin{cases} r^4 = r^2 \\ 4\theta = -2\theta + 2k\pi \end{cases} \begin{pmatrix} r > 0 \\ k \in \mathbb{Z} \end{pmatrix}$

qui équivaut à $\begin{cases} r^2(r^2-1)=0 \\ \theta = \dfrac{k\pi}{3} \end{cases} \begin{pmatrix} r > 0 \\ k \in \mathbb{Z} \end{pmatrix}$

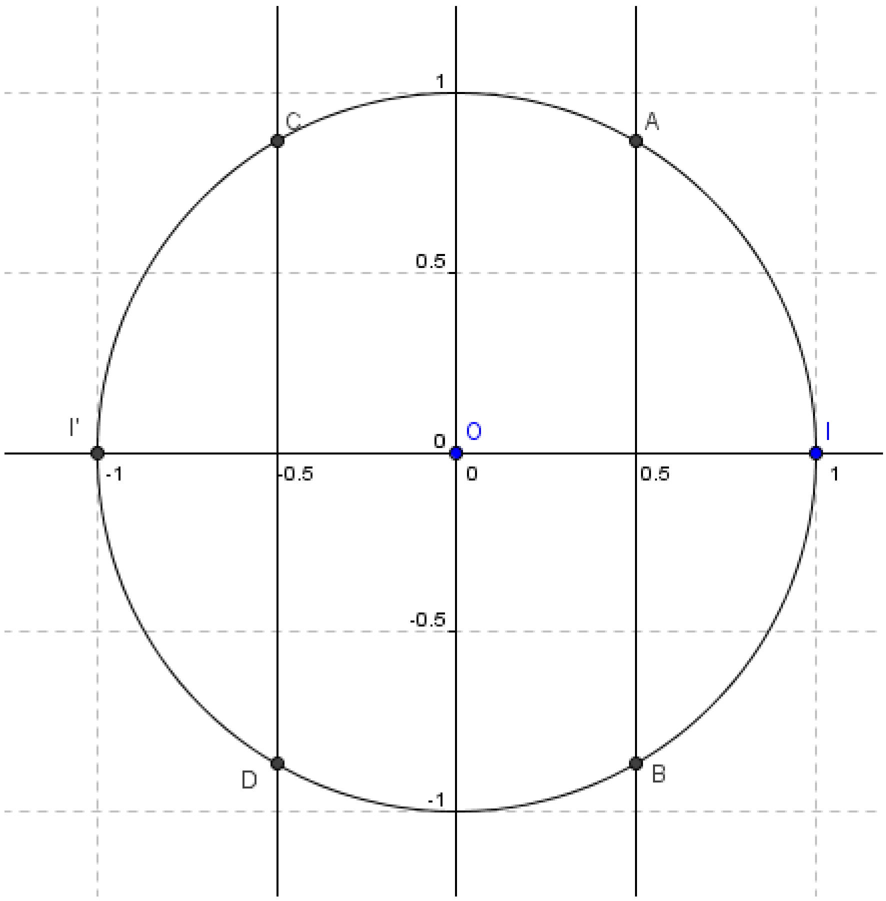
On a donc: $r = 1$, et, $\theta = 0$ ou $\theta = \dfrac{\pi}{3}$ ou $\theta = \pi$ ou $\theta = \dfrac{4\pi}{3}$ ou $\theta = \dfrac{5\pi}{3}$ (ensuite on retrouve les mêmes points du cercle trigo)

Finalement, les solutions sont: (écriture exponentielle et écriture algébrique)

0 (ne pas l'oublier)

$\mathrm{e}^{\mathrm{i}0} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}2\pi} = 1$; $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}} = \dfrac{1}{2} + \mathrm{i}\dfrac{\sqrt{3}}{2}$, $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi} = -1$; $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{4\pi}{3}} = -\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}} = -\dfrac{1}{2} - \mathrm{i}\dfrac{\sqrt{3}}{2}$; $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{5\pi}{3}} = \overline{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}} = \dfrac{1}{2} - \mathrm{i}\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

Représentation graphique des solutions: Les points O, I, A, C, I', D, B.



Exercice B page 288

Soit f la fonction qui, à tout complexe z différent de $-2\mathrm{i}$ associe: $Z = f(z) = \dfrac{z-2+\mathrm{i}}{z+2i}$

A et B sont les points d'affixes $z_A = 2 - \mathrm{i}$ et $z_B = -2\mathrm{i}$

On a alors: $Z = \dfrac{z - z_A}{z - z_B}$

a) L'ensemble E des points M d'affixe z, tels que Z soit réel

" Z réel " équivaut à " $\{z \neq z_B$ et ($Z = 0$ ou $\arg(Z) = 0 + k\pi$; $k \in \mathbb{Z}$) } "

Or, $\arg(Z) = \arg \dfrac{z - z_A}{z - z_B} = \arg(z - z_A) - \arg(z - z_B) = \widehat{(\vec{u}\,;\overrightarrow{AM})} - \widehat{(\vec{u}\,;\overrightarrow{BM})} = \widehat{(\overrightarrow{BM}\,;\overrightarrow{AM})}$ $[2\pi]$

Par conséquent: " Z réel " équivaut à " $\{M \neq B$ et ($M = A$ ou $\widehat{(\overrightarrow{BM}\,;\overrightarrow{AM})} = 0 + k\pi$; $k \in \mathbb{Z}$)} "

Les vecteurs $\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{BM}$ sont donc colinéaires.

L'ensemble E est la droite (AB) privée de B.

b) L'ensemble F des points M d'affixe z, tels que Z soit imaginaire pur

" Z imaginaire pur " équivaut à " $\{z \neq z_B$ et ($Z = 0$ ou $\arg(Z) = \dfrac{\pi}{2} + k\pi$; $k \in \mathbb{Z}$) } "

Par conséquent: " Z imaginaire pur " équivaut à " $\{M \neq B$ et ($M = A$ ou $\widehat{(\overrightarrow{BM}\,;\overrightarrow{AM})} = \dfrac{\pi}{2} + k\pi$; $k \in \mathbb{Z}$)} "

Les vecteurs $\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{BM}$ sont donc orthogonaux

L'ensemble F est le cercle de diamètre [AB] privé de B.

c) $$|f(z)-1| \times |z+2\,\mathrm{i}| = \left|\left(\frac{z-2+\mathrm{i}}{z+2\,\mathrm{i}} - 1\right)\right| \times |z+2\,i| \quad \text{avec } z \neq -2\mathrm{i}$$

$$= \left|\frac{-2-\mathrm{i}}{z+2\,\mathrm{i}}\right| \times |z+2\,i|$$

$$= \frac{|-2-\mathrm{i}|}{|z+2\,\mathrm{i}|} \times |z+2\,i|$$

$$= |-2-\mathrm{i}|$$

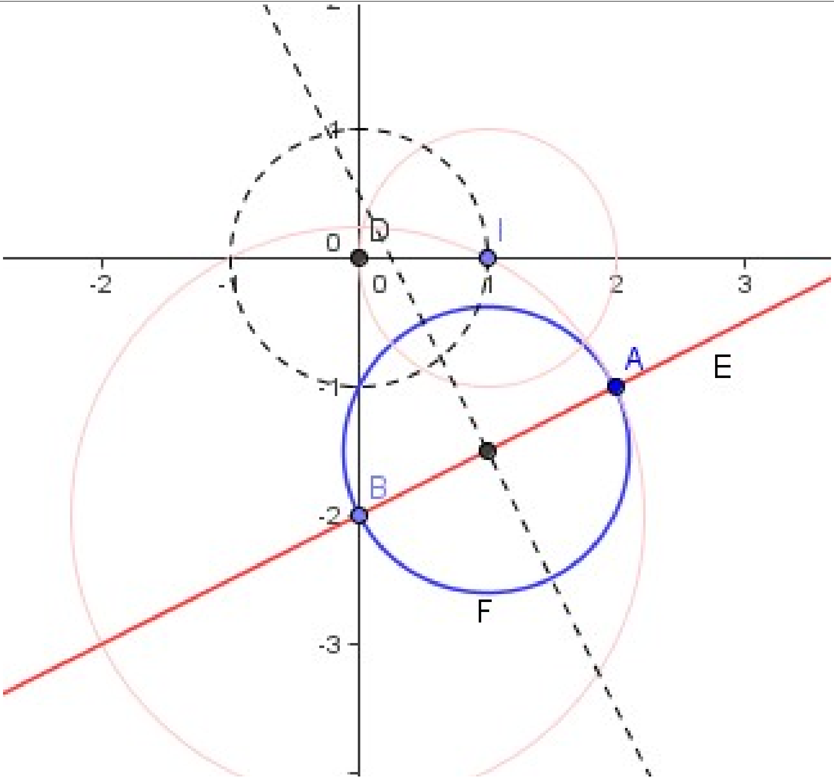
$$= \sqrt{(-2)^2+(-1)^2} = \sqrt{5}$$

Or, $|f(z)-1| = IM'$ où I est le point d'affixe 1 et $|z+2\,\mathrm{i}| = BM$

On a donc: $IM' \times BM = \sqrt{5}$

Si M parcourt le cercle de centre B et de rayon $\sqrt{5}$, on a: $BM = \sqrt{5}$ et par conséquent, $IM' = 1$

Les points M' sont sur le cercle de centre I (d'affixe 1) et de rayon 1.



Si un point $M(z)$ décrit la droite (AB) privée de B (ensemble E) son image par la transformation T est un point de l'axe des réels.

Si un point $M(z)$ décrit le cercle de diamètre $[AB]$ privé de B (ensemble F) son image par la transformation T est un point de l'axe des imaginaires purs.

le cercle de centre B et de rayon $\sqrt{5}$ a pour image par T le cercle de centre I et de rayon 1
la médiatrice de $[AB]$ a pour image par T le cercle de centre O et de rayon 1

COMPLÉMENTS
Pour l'entraînement aux calculs, mais, méthode extrêmement maladroite dans le contexte de l'exercice:
On pose $z = x + \mathrm{i}\, y$ avec x et y réels.

On a donc: $Z = \dfrac{x+\mathrm{i}\,y-2+\mathrm{i}}{x+\mathrm{i}\,y+2\mathrm{i}} = \dfrac{(x-2+\mathrm{i}(y+1))(x-\mathrm{i}(y+2))}{x^2+(y+2)^2} = X+\mathrm{i}\,Y$

avec $Re(Z)=X=\dfrac{x^2-2x+y^2+3y+2}{x^2+(y+2)^2}$ et $Im(Z)=Y=\dfrac{-x+2y+4}{x^2+(y+2)^2}$

Z est un réel si et seulement si $z \neq z_B$ et $-x+2y+4=0$
On retrouve l'équation de la droite (AB) avec B exclu

Z est un imaginaire pur si et seulement si $z \neq z_B$ et $x^2-2x+y^2+3y+2=0$
On retrouve l'équation du cercle de diamètre $[AB]$ avec B exclu

Pour la dernière question, l'interprétation géométrique est:

Si M décrit un cercle de centre B et de rayon R alors M' décrit un cercle de centre I et de rayon $R' = \dfrac{\sqrt{5}}{R}$

On peut aussi interpréter $|Z|$ avec $|Z|=\dfrac{AM}{BM}$ et donc, par exemple, l'ensemble des points M du plan d'affixes z tels que $|Z|=1$ (C'est-à-dire les points M' sont sur le cercle de centre O et de rayon 1) est la médiatrice de $[AB]$. Les points images M' des points de la médiatrice de $[AB]$ sont sur le cercle de centre O et de rayon 1.
De façon générale, ayez le réflexe d'interpréter les modules en termes de longueurs et les arguments en termes d'angles orientés.

f est une fonction définie sur $\mathbb{C}\backslash\{-2\mathrm{i}\}$. f: $z \mapsto Z$
on associe à f une transformation géométrique T qui agit sur les points du plan privé de B.
$T : M \mapsto M'$ et, on trouve
au a) que la droite (AB) privée de B a pour image par T l'axe des réels
au b) que le cercle de diamètre $[AB]$ privé de B a pour image par T l'axe des imaginaires
au c) que le cercle de centre B et de rayon $\sqrt{5}$ a pour image par T le cercle de centre I et de rayon 1
au d) que la médiatrice de $[AB]$ a pour image par T le cercle de centre O et de rayon 1

---

exercice C page 288

À tout $z \neq -\mathrm{i}$, on associe $f(z) = \dfrac{\mathrm{i}z}{z+\mathrm{i}}$.
M est le point d'affixe z.
1) Résolution de $\dfrac{\mathrm{i}z}{z+\mathrm{i}} = 1 + 2\mathrm{i}$
Pour $z \neq -\mathrm{i}$, $\dfrac{\mathrm{i}z}{z+\mathrm{i}} = 1 + 2\mathrm{i}$ équivaut à $\mathrm{i}z = (1 + 2\mathrm{i})(z + \mathrm{i})$
Après développement, réduction, réorganisation des calculs, il vient: $(1 + \mathrm{i})z = 2 - \mathrm{i}$
$z = \dfrac{2-\mathrm{i}}{1+\mathrm{i}} = \dfrac{(2-\mathrm{i})(1-\mathrm{i})}{2} = ... = \dfrac{1}{2} - \dfrac{3}{2}\mathrm{i}$
Le point B d'affixe $z_0 = \dfrac{1}{2} - \dfrac{3}{2}\mathrm{i}$ vérifie $f(z_0) = 1 + 2\mathrm{i}$

2) $r = |z+\mathrm{i}|$ et $\alpha = \arg(z + \mathrm{i})$
Remarquer: $r > 0$ puisque $z \neq -\mathrm{i}$
$f(z) - \mathrm{i} = \dfrac{\mathrm{i}z}{z+\mathrm{i}} - \mathrm{i} = \dfrac{\mathrm{i}z-\mathrm{i}z+1}{z+\mathrm{i}} = \dfrac{1}{z+\mathrm{i}}$
Il s'en déduit: $|f(z)-\mathrm{i}| = \left|\left(\dfrac{1}{z+\mathrm{i}}\right)\right| = \dfrac{1}{|z+\mathrm{i}|} = \dfrac{1}{r}$

$\arg(f(z) - \mathrm{i}) = \arg\left(\dfrac{1}{z+\mathrm{i}}\right) = \arg(1) - \arg(z + \mathrm{i}) = 0 - \alpha = -\alpha\ [2\pi]$.

3) A d'affixe $-\mathrm{i}$
a) L'ensemble $\mathscr{C}$ des points M vérifiant la condition: $|f(z)-\mathrm{i}| = \sqrt{2}$ est d'après la question 2), l'ensemble des points M d'affixe z telle que $|z+\mathrm{i}| = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$
Or, $|z+\mathrm{i}| = AM$.
Conclusion: $\mathscr{C}$ est le cercle de centre A et de rayon $\dfrac{1}{\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

b) L'ensemble $\mathscr{D}$ des points M vérifiant la condition: arg($f(z)$ – i) = $\dfrac{\pi}{4}$ est d'après la question 2), l'ensemble des points M d'affixe z telle que arg(z + i) = $-\dfrac{\pi}{4}$ [2π].

Or, arg(z + i) = $(\vec{u}, \overrightarrow{AM})$ [2π]

Conclusion: $\mathscr{D}$ est la demi-droite ouverte d'origine A et faisant un angle de $-\dfrac{\pi}{4}$ avec $\vec{u}$.

Pour la construire, on peut faire un triangle ADE rectangle isocèle indirect en D. La demi-droite]AE) convient.

c) B d'affixe z_0 est tel que $f(z_0)$ = 1 + 2i

On a donc: $|f(z_0)-\mathrm{i}|$ = $|1+\mathrm{i}|$ = $\sqrt{2}$. Ce qui prouve que $B \in \mathscr{C}$. *(Ce qui permet de construire $\mathscr{C}$)*

$\arg(f(z_0)-\mathrm{i})$ = arg(1 + i) = $\dfrac{\pi}{4}$ [2π]. Ce qui prouve que $B \in \mathscr{D}$. *(Ce qui permet de construire $\mathscr{D}$)*

On peut aussi faire:

$z_0 + \mathrm{i} = \dfrac{1}{2} - \dfrac{3}{2}\mathrm{i} + \mathrm{i} = \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{2}\mathrm{i}$

$|z_0+\mathrm{i}| = \left|\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{2}\mathrm{i}\right| = \dfrac{1}{2}\sqrt{2} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$. Ce qui prouve que $B \in \mathscr{C}$.

$\arg(z_0+\mathrm{i})$ = arg($\dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{2}$ i) = arg(1 – i) = $-\dfrac{\pi}{4}$ [2π].. Ce qui prouve que $B \in \mathscr{D}$.

Remarque et complément:

Comme à l'exercice précédent, les résultats s'interprètent en termes de transformation géométrique T.

À tout point $M(z)$ distinct du point A(–i), on associe un point $M'(z')$ avec $z' = f(z)$. $M' = T(M)$

Vous pouvez essayer d'interpréter les autres questions de façon identique

Au 1), on montre que $T(B) = B'$ d'affixe 1 + 2i