Index

La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements, la cohérence globale des réponses sont valorisées.
Le recours à des tableaux et graphiques pour soutenir une argumentation ou présenter des résultats est valorisé, sous réserve qu'un commentaire en précise clairement la signification.
Extrait du B.O. concernant la notation de l'épreuve au baccalauréat.

Amérique du Sud novembre 2013

Le gestionnaire d'un site web, composé de trois pages web numérotées de 1 à 3 et reliées entre elles par des liens hypertextes, désire prévoir la fréquence de connexion sur chacune de ses pages web.
Des études statistiques lui ont permis de s'apercevoir que :

• *Si un internaute est sur la page n° 1, alors il ira, soit sur la page n° 2 avec la probabilité* $\frac{1}{4}$, *soit sur la page n° 3 avec la probabilité* $\frac{3}{4}$.

Traduction avec les notations données ensuite : $P_{A_n}(A_{n+1}) = 0$, $P_{A_n}(B_{n+1}) = \frac{1}{4}$, $P_{A_n}(C_{n+1}) = \frac{3}{4}$.

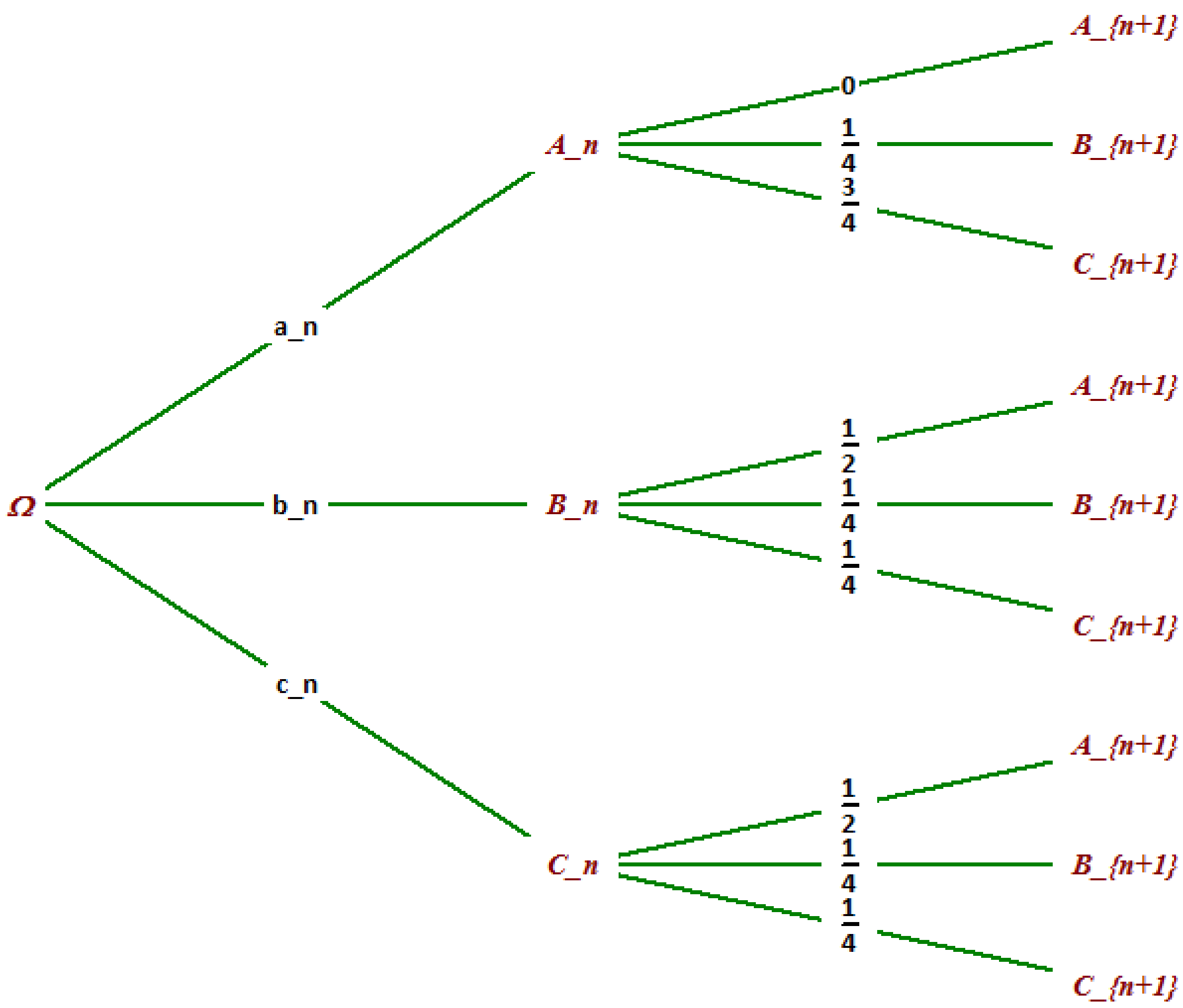
• *Si un internaute est sur la page n° 2, alors, soit il ira sur la page n° 1 avec la probabilité* $\frac{1}{2}$, *soit il restera sur la page n° 2 avec la probabilité* $\frac{1}{4}$, *soit il ira sur la page n° 3 avec la probabilité* $\frac{1}{4}$.

Traduction avec les notations données ensuite : $P_{B_n}(A_{n+1}) = \frac{1}{2}$, $P_{B_n}(B_{n+1}) = \frac{1}{4}$, $P_{B_n}(C_{n+1}) = \frac{1}{4}$.

• *Si un internaute est sur la page n° 3, alors, soit il ira sur la page n° 1 avec la probabilité* $\frac{1}{2}$, *soit il ira sur la page n° 2 avec la probabilité* $\frac{1}{4}$ *,soit il restera sur la page n° 3 avec la probabilité* $\frac{1}{4}$.

Traduction avec les notations données ensuite : $P_{C_n}(A_{n+1}) = \frac{1}{2}$, $P_{C_n}(B_{n+1}) = \frac{1}{4}$, $P_{C_n}(C_{n+1}) = \frac{1}{4}$.

Un arbre :



Pour tout entier naturel n, on définit les événements et les probabilités suivants :
A_n : « Après la n-ième navigation, l'internaute est sur la page n° 1 » et on note $a_n = P(A_n)$.
B_n : « Après la n-ième navigation, l'internaute est sur la page n° 2 » et on note $b_n = P(B_n)$.
C_n : « Après la n-ième navigation, l'internaute est sur la page n° 3 » et on note $c_n = P(C_n)$.

1. Montrer que, pour tout entier naturel n, on a $a_{n+1} = \frac{1}{2} b_n + \frac{1}{2} c_n$.

$a_{n+1} = P(A_{n+1})$.

Or, $A_{n+1} = A_{n+1} \cap A_n \cup A_{n+1} \cap B_n \cup A_{n+1} \cap C_n$

les événements A_n , B_n , C_n forment une partition de l'univers,

D'après la formule des probabilités totales :

$$P(A_{n+1}) = P(A_{n+1} \cap A_n) + P(A_{n+1} \cap B_n) + P(A_{n+1} \cap C_n)$$
$$= P(A_n) \times P_{A_n}(A_{n+1}) + P(B_n) \times P_{B_n}(A_{n+1}) + P(C_n) \times P_{C_n}(A_{n+1}) .$$
$$a_{n+1} = a_n \times 0 + b_n \times \frac{1}{2} + c_n \times \frac{1}{2}$$

Conclusion : pour tout entier naturel n, on a $a_{n+1} = \frac{1}{2} b_n + \frac{1}{2} c_n$.

On admet que, de même, $b_{n+1} = \frac{1}{4} a_n + \frac{1}{4} b_n + \frac{1}{4} c_n$ et $c_{n+1} = \frac{3}{4} a_n + \frac{1}{4} b_n + \frac{1}{4} c_n$.

Ainsi : $\begin{cases} a_{n+1}=\frac{1}{2}b_n+\frac{1}{2}c_n \\ b_{n+1}=\frac{1}{4}a_n+\frac{1}{4}b_n+\frac{1}{4}c_n \\ c_{n+1}=\frac{3}{4}a_n+\frac{1}{4}b_n+\frac{1}{4}c_n \end{cases}$.

2. Pour tout entier naturel n, on pose $U_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix}$.

$U_0 = \begin{pmatrix} a_0 \\ b_0 \\ c_0 \end{pmatrix}$ *représente la situation initiale, avec* $a_0 + b_0 + c_0 = 1$.

Montrer que, pour tout entier naturel n, $U_{n+1} = MU_n$ *où M est une matrice* 3×3 *que l'on précisera.*

On pose $M = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$.

Ainsi :

$$U_{n+1} = \begin{pmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \\ c_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} a_{n+1}=0\times a_n+\frac{1}{2}b_n+\frac{1}{2}c_n \\ b_{n+1}=\frac{1}{4}a_n+\frac{1}{4}b_n+\frac{1}{4}c_n \\ c_{n+1}=\frac{3}{4}a_n+\frac{1}{4}b_n+\frac{1}{4}c_n \end{cases}.$$

En déduire que, pour tout entier naturel n, $U_n = M^nU_0$.

On note $\mathcal{P}(n)$ la propriété : $U_n = M^nU_0$.

Initialisation : $n = 0$, Comme $M^0 = I_3$ (matrice identité d'ordre 3), la propriété $\mathcal{P}(0)$ est vérifiée ;

Hérédité : on suppose la propriété vraie au rang k avec $k \geqslant 0$.

On a donc : $U_k = M^kU_0$. ($\mathcal{P}(k)$)

Comme $U_{k+1} = MU_k$ (d'après ce qui précède), on obtient : $U_{k+1} = MM^kU_0 = M^{k+1}U_0$ ($\mathcal{P}(k+1)$)

Conclusion :

On a montré : $\mathcal{P}(k) \Rightarrow \mathcal{P}(k+1)$, et, la propriété étant vraie en 0, elle est vraie pour tout entier naturel d'après l'axiome de récurrence.

3. Montrer qu'il existe une seule matrice colonne $U = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ *telle que* $x + y + z = 1$ *et* $MU = U$.

$MU = U \Leftrightarrow \begin{cases} x=\frac{1}{2}y+\frac{1}{2}z \\ y=\frac{1}{4}x+\frac{1}{4}y+\frac{1}{4}z \\ z=\frac{3}{4}x+\frac{1}{4}y+\frac{1}{4}z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x-y-z=0 \\ x-3y+z=0 \\ 3x+y-3z=0 \end{cases}$ (en multipliant la première ligne par 2 et les deux suivantes par 4).

On résout alors le système : $\begin{cases} x+y+z=1 \\ 2x-y-z=0 \\ x-3y+z=0 \\ 3x+y-3z=0 \end{cases} \begin{pmatrix} L1 \\ L2 \\ L3 \\ L4 \end{pmatrix}$

Par somme de L1 et L2, on obtient : $3x = 1$, soit : $x = \frac{1}{3}$.

Par différence de L1 et L3, on obtient : $4y = 1$, soit : $y = \frac{1}{4}$.

On en déduit par L4 : $3z = 3\times\frac{1}{3} + \frac{1}{4} = \frac{5}{4}$, d'où, $z = \frac{5}{12}$.

IMPORTANT : Il est obligatoire de vérifier le système car on n'a pas procédé par équivalences.

$\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{5}{12} = \frac{4+3+5}{12} = 1$ et $2\times\frac{1}{3}-\frac{1}{4}-\frac{5}{12} = \frac{2\times4-3-5}{12} = 0$ et $\frac{1}{3}-3\times\frac{1}{4}+\frac{5}{12} = \frac{4-9+5}{12} = 0$.

(L4 est vérifiée par la recherche de z).

Conclusion : la matrice U est $U = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{1}{4} \\ \frac{5}{12} \end{pmatrix}$.

4. Un logiciel de calcul formel a permis d'obtenir l'expression de M^n, n étant un entier naturel non nul :

$$M^n = \begin{pmatrix} \frac{1}{3}+\frac{\left(\frac{-1}{2}\right)^n\times2}{3} & \frac{1}{3}+\frac{\left(\frac{-1}{2}\right)^n}{-3} & \frac{1}{3}+\frac{\left(\frac{-1}{2}\right)^n}{-3} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{5}{12}+\frac{\left(-\left(\frac{-1}{2}\right)^n\right)\times2}{3} & \frac{5}{12}+\frac{-\left(\frac{-1}{2}\right)^n}{-3} & \frac{5}{12}+\frac{-\left(\frac{-1}{2}\right)^n}{-3} \end{pmatrix}$$

Pour tout entier naturel n non nul, exprimer a_n, b_n et c_n en fonction de n. En déduire que les suites (a_n), (b_n) et (c_n) convergent vers des limites que l'on précisera.

D'après la question 2/, $\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix} = M^n \begin{pmatrix} a_0 \\ b_0 \\ c_0 \end{pmatrix}$ avec $a_0+b_0+c_0 = 1$

On a donc : $a_n=\left(\frac{1}{3}+\frac{\left(\frac{-1}{2}\right)^n\times 2}{3}\right)a_0+\left(\frac{1}{3}+\frac{\left(\frac{-1}{2}\right)^n}{-3}\right)b_0+\left(\frac{1}{3}+\frac{\left(\frac{-1}{2}\right)^n}{-3}\right)c_0$

$b_n=\frac{1}{4}a_0+\frac{1}{4}b_0+\frac{1}{4}c_0 = \frac{1}{4}(a_0+b_0+c_0)$

$c_n=\left(\frac{5}{12}+\frac{\left(-\left(\frac{-1}{2}\right)^n\right)\times 2}{3}\right)a_0+\left(\frac{5}{12}+\frac{-\left(\frac{-1}{2}\right)^n}{-3}\right)b_0+\left(\frac{5}{12}+\frac{-\left(\frac{-1}{2}\right)^n}{-3}\right)c_0$

comme $a_0+b_0+c_0=1$,

$b_n = \frac{1}{4}$,

$a_n=\frac{1}{3}(a_0+b_0+c_0)+\left(\frac{\left(\frac{-1}{2}\right)^n\times 2}{3}\right)a_0+\left(\frac{\left(\frac{-1}{2}\right)^n}{-3}\right)b_0+\left(\frac{\left(\frac{-1}{2}\right)^n}{-3}\right)c_0$

$a_n=\frac{1}{3}+\left(\frac{\left(\frac{-1}{2}\right)^n\times 2}{3}\right)a_0+\left(\frac{\left(\frac{-1}{2}\right)^n}{-3}\right)b_0+\left(\frac{\left(\frac{-1}{2}\right)^n}{-3}\right)c_0$

et

$c_n=\frac{5}{12}(a_0+b_0+c_0)+\left(\frac{\left(-\left(\frac{-1}{2}\right)^n\right)\times 2}{3}\right)a_0+\left(\frac{-\left(\frac{-1}{2}\right)^n}{-3}\right)b_0+\left(\frac{-\left(\frac{-1}{2}\right)^n}{-3}\right)c_0$

$c_n=\frac{5}{12}+\left(\frac{\left(-\left(\frac{-1}{2}\right)^n\right)\times 2}{3}\right)a_0+\left(\frac{-\left(\frac{-1}{2}\right)^n}{-3}\right)b_0+\left(\frac{-\left(\frac{-1}{2}\right)^n}{-3}\right)c_0$

D'autre part, comme $-1 < -\frac{1}{2} < 1$, la suite géométrique $\left(\left(\frac{-1}{2}\right)^n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ de raison $\frac{-1}{2}$ converge vers 0, d'où,

$\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{-1}{2}\right)n\times\frac{2}{3} = 0$ et $\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{-1}{2}\right)n\times\frac{-1}{3} = 0$.

Conclusion :

$\lim_{n\to+\infty} a_n = \frac{1}{3}$;

$\lim_{n\to+\infty} b_n = \frac{1}{4}$;

$\lim_{n\to+\infty} c_n = \frac{5}{12}$.

5. Interpréter les résultats obtenus et donner une estimation des pourcentages de fréquentation du site à long terme.

Interprétation des résultats :

À long terme, comme $\lim_{n\to+\infty} a_n = \frac{1}{3}$, la page 1 sera consultée $\frac{1}{3}$ du temps de fréquentation du site, soit environ 33 % du temps.

la page 2 sera consultée $\frac{1}{4}$ du temps, soit : 25 % du temps et

la page 3 sera consultée $\frac{5}{12}$ du temps, soit environ 42 % du temps.

Antilles-Guyane septembre 2013

Partie A

On considère l'algorithme suivant :

```
A et X sont des nombres entiers
Saisir un entier positif A
Affecter à X la valeur de A
Tant que X supérieur ou égal à 26
        Affecter à X la valeur X - 26
Fin du tant que
Afficher X
```

1. Qu'affiche cet algorithme quand on saisit le nombre 3 ?

En saisissant 3, l'algorithme affiche 3 puisque 3 < 26, on n'entre pas dans la boucle " tant que "

2. Qu'affiche cet algorithme quand on saisit le nombre 55 ?

En saisissant 55, on obtient : 3 puisque $55 \geqslant 26$, on fait : $55 - 26 = 29$

$29 \geqslant 26$, on fait $29 - 26 = 3$,

on effectue deux fois la boucle " tant que" .

3. Pour un nombre entier saisi quelconque, que représente le résultat fourni par cet algorithme ?

Cet algorithme fourni le reste dans la division euclidienne de A par 26 par la méthode des différences successives .

On retranche 26 autant de fois que nécessaires pour obtenir une entier X tel que $0 \leqslant X < 26$.

On a donc : $A = 26\times q + X$ où q est le nombre de boucles effectuées.

Partie B

On veut coder un bloc de deux lettres selon la procédure suivante (détaillée en quatre étapes) :

• ***Étape 1*** *: chaque lettre du bloc est remplacée par un entier en utilisant le tableau ci-dessous :*

A	*B*	*C*	*D*	*E*	*F*	*G*	*H*	*I*	*J*	*K*	*L*	*M*	*N*	*O*	*P*	*Q*	*R*	*S*	*T*	*U*	*V*	*W*	*X*	*Y*	*Z*
0	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*	*7*	*8*	*9*	*10*	*11*	*12*	*13*	*14*	*15*	*16*	*17*	*18*	*19*	*20*	*21*	*22*	*23*	*24*	*25*

On obtient une matrice colonne $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ *où* x_1 *correspond à la première lettre du mot et* x_2 *correspond à la deuxième lettre du mot.*

• ***Étape 2*** *:* $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ *est transformé en* $\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$ *tel que* $\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$

La matrice C = $\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$ *est appelée la matrice de codage.*

• ***Étape 3*** *:* $\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$ *est transformé en* $\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}$ *tel que* $\begin{cases} z_1 \equiv y_1 \ (26) \text{ avec } 0 \leqslant z_1 \leqslant 25 \\ z_2 \equiv y_2 \ (26) \text{ avec } 0 \leqslant z_2 \leqslant 25 \end{cases}$

• ***Étape 4*** *:* $\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}$ *est transformé en un bloc de deux lettres en utilisant le tableau de correspondance donné dans l'étape 1.*

Exemple :

$$RE \to \begin{pmatrix} 17 \\ 4 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 55 \\ 93 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 3 \\ 15 \end{pmatrix} \to DP$$

Le bloc RE est donc codé en DP

Justifier le passage de $\begin{pmatrix} 17 \\ 4 \end{pmatrix}$ *à* $\begin{pmatrix} 55 \\ 93 \end{pmatrix}$ *puis à* $\begin{pmatrix} 3 \\ 15 \end{pmatrix}$.

$\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 17 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3\times 17+1\times 4 \\ 5\times 17+2\times 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 55 \\ 93 \end{pmatrix}$

55= 26×2 + 3, d'où, $55 \equiv 3$ (26) et $0 \leqslant 3 \leqslant 25$

93 = 26×3 + 15, d'où, $93 \equiv 15$ (26) et $0 \leqslant 15 \leqslant 25$

$\begin{pmatrix} 55 \\ 93 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 3 \\ 15 \end{pmatrix}$ (modulo 26)

1. Soient x_1 , x_2 , x'_1, x'_2 *quatre nombres entiers compris entre 0 et 25 tels que* $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ *et* $\begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \end{pmatrix}$ *sont transformés lors du procédé de codage en* $\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}$.

a. Montrer que

$\begin{cases} 3x_1+x_2 \equiv 3x'_1+x'_2 \ (26) \\ 5x_1+2x_2 \equiv 5x'_1+2x'_2 \ (26) \end{cases}$.

On applique la matrice de codage à $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ pour obtenir $\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$, soit : $\begin{cases} y_1 = 3x_1+x_2 \\ y_2 = 5x_1+2y_2 \end{cases}$

De même, $\begin{cases} y'_1 = 3x'_1+x'_2 \\ y'_2 = 5x'_1+2x'_2 \end{cases}$

D'après l'énoncé z_1 est le reste dans la division euclidienne de $3x_1+x_2$ et de $3x'_1+x'_2$ par 26, ce qui est équivalent à : $3x_1+x_2 \equiv 3x'_1+x'_2$ (modulo 26) par définition des congruences.

Pour la même raison, $5x_1+2x_2 \equiv 5x'_1+2x'_2$ (26) puisque ces deux entiers ont le même reste z_2 dans la division euclidienne par 26.

b. En déduire que $x_1 \equiv x'_1$ *(26) et* $x_2 \equiv x'_2$ *(26) puis que* $x_1 = x'_1$ *et* $x_2 = x'_2$.

On doit résoudre le système $\begin{cases} 3x_1+x_2 \equiv 3x'_1+x'_2 \ (26) \\ 5x_1+2x_2 \equiv 5x'_1+2x'_2 \ (26) \end{cases} \begin{pmatrix} L1 \\ L2 \end{pmatrix}$

En faisant 2L1 – L2 : $x_1 \equiv x'_1$ (26), ou encore ; $x_1 - x'_1 \equiv 0$ (26)

En faisant 3L2 – 5L1 : $x_2 \equiv x'_2$ (26)

Comme x_1 et x'_1 sont compris entre 0 et 25, $-25 \leqslant x_1 - x'_1 \leqslant 25$

le seul entier congru à 0 entre –25 et 25 est 0.

On a donc : $x_1 = x'_1$

De même, $x_2 = x'_2$.

Réciproquement :

Si $x_1 = x'_1$ et $x_2 = x'_2$, on a : $\begin{cases} 3x_1+x_2 \equiv 3x'_1+x'_2 \ (26) \\ 5x_1+2x_2 \equiv 5x'_1+2x'_2 \ (26) \end{cases}$ par compatibilité des multiplications et additions avec les congruences.

2. On souhaite trouver une méthode de décodage pour le bloc DP :

a. Vérifier que la matrice C' = $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -5 & 3 \end{pmatrix}$ *est la matrice inverse de C .*

On calcule le produit $C'C = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -5 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\times3-1\times5 & 2\times1-1\times2 \\ -5\times3+3\times5 & -5\times1+3\times2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2$.

Or, si $C'C = I_2$ alors $CC' = I_2$ et la matrice C' est l'inverse de C.
(On peut aussi calculer C'C, CC' et montrer que les deux produits donne l'identité,
ou encore, calculer le déterminant de C ($dét(C) = 3\times2 - 5\times1 = 1$) et appliquer le cours …)

b. Calculer $\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$ *tels que* $\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -5 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 15 \end{pmatrix}$.

On obtient : $\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\times3-1\times15 \\ -5\times3+3\times15 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -9 \\ 30 \end{pmatrix}$

c. Calculer $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ *tels que* $\begin{cases} x_1 \equiv y_1 \ (26) \text{ avec } 0 \leqslant x_1 \leqslant 25 \\ x_2 \equiv y_2 \ (26) \text{ avec } 0 \leqslant x_2 \leqslant 25 \end{cases}$

On a donc : $y_1 = -9$ et comme $-9 + 26 = 17$, $-9 \equiv 17\ (26)$
et $y_2 = 30$ et comme $30 = 26 + 4$, $30 \equiv 4\ (26)$

La matrice $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ est la matrice $\begin{pmatrix} 17 \\ 4 \end{pmatrix}$.

Or, $\begin{pmatrix} 17 \\ 4 \end{pmatrix}$ est la matrice associée à RE qui était codé par DP associé à la matrice $\begin{pmatrix} 3 \\ 15 \end{pmatrix}$.

d. Quel procédé général de décodage peut-on conjecturer ?

RE était codé par DP, et, en appliquant à DP le procédé identique du codage en remplaçant C par son inverse C', il semble qu'on peut décoder

3. Dans cette question nous allons généraliser ce procédé de décodage.
On considère un bloc de deux lettres et on appelle z_1 *et* z_2 *les deux entiers compris entre 0 et 25 associés à ces lettres à l'étape 3. On cherche à trouver deux entiers* x_1 *et* x_2 *compris entre 0 et 25 qui donnent la matrice colonne* $\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}$ *par les étapes 2 et 3 du procédé de codage.*

Soient y'_1 *et* y'_2 *tels que* $\begin{pmatrix} y'_1 \\ y'_2 \end{pmatrix} = C' \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}$ *où* $C' = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -5 & 3 \end{pmatrix}$.

Soient x_1 *et* x_2 *, les nombres entiers tels que* $\begin{cases} x_1 \equiv y'_1 \ (26) \text{ avec } 0 \leqslant x_1 \leqslant 25 \\ x_2 \equiv y'_2 \ (26) \text{ avec } 0 \leqslant x_2 \leqslant 25 \end{cases}$.

Montrer que
$\begin{cases} 3x_1 + x_2 \equiv z_1 (26) \\ 5x_1 + 2x_2 \equiv z_2 (26) \end{cases}$.

Conclure.

$\begin{pmatrix} y'_1 \\ y'_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -5 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}$ équivaut à $\begin{cases} y'_1 = 2z_1 - z_2 \\ y'_2 = -5z_1 + 3z_2 \end{cases}$

Évaluons $3x_1+x_2$.

$3x_1+x_2 \equiv 3y'_1+y'_2$ (26)

$3x_1+x_2 \equiv 3(2z_1-z_2)+(-5z_1+3z_2)$ (26)

$3x_1+x_2 \equiv z_1$ (26

et $5x_1+2x_2 \equiv 5y'_1+2y'_2$ (26)

$5x_1+2x_2 \equiv 5(2z_1-z_2)+2(-5z_1+3z_2)$ (26)

$5x_1+2x_2 \equiv z_2$ (26)

On a ainsi la méthode pour décoder, puisque les entiers x_1 et x_2 sont bien les entiers codés par z_1 et z_2 du début de l'énoncé.

Méthode de décodage :

Étape 1 : on associe aux deux lettres à décoder les entiers z_1 et z_2 compris entre 0 et 25 du tableau donné au départ. On forme la matrice $\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}$

Étape 2 : On applique la matrice C′ à la matrice colonne obtenue pour calculer une matrice $\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$.

Étape 3 : On cherche les restes de y_1 et y_2 dans la division euclidienne par 26.
On obtient ainsi deux entiers x_1 et x_2 compris entre 0 et 25.
Étape 4 : On lit les lettres associés à ces deux entiers.

4. Décoder QC.

QC est associé à $\begin{pmatrix} 16 \\ 2 \end{pmatrix}$.

$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -5 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 16 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 30 \\ -74 \end{pmatrix}$. $30 = 26 + 4$ et $-74 + 3\times 26 = 4$

d'où, $\begin{pmatrix} 30 \\ -74 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \end{pmatrix}$ (26).

QC est décodé en EE.

Métropole septembre 2013

Les parties A et B peuvent être traitées indépendamment l'une de l'autre.

Dans un village imaginaire isolé, une nouvelle maladie contagieuse mais non mortelle a fait son apparition.

Rapidement les scientifiques ont découvert qu'un individu pouvait être dans l'un des trois états suivants :

S : « l'individu est sain, c'est-à-dire non malade et non infecté »,

I : « l'individu est porteur sain, c'est-à-dire non malade mais infecté »,

M : « l'individu est malade et infecté ».

Partie A

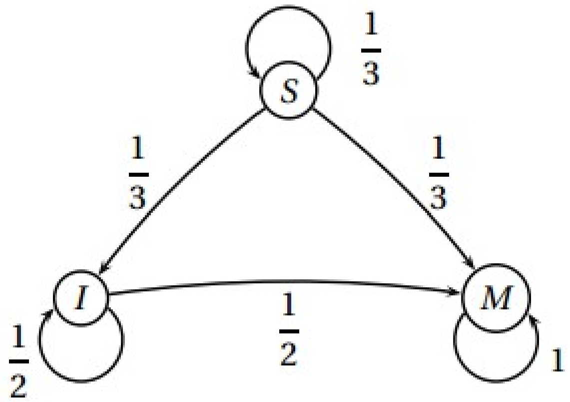
Les scientifiques estiment qu'un seul individu est à l'origine de la maladie sur les 100 personnes que compte la population et que, d'une semaine à la suivante, un individu change d'état suivant le processus suivant :

— parmi les individus sains, la proportion de ceux qui deviennent porteurs sains est égale à $\frac{1}{3}$ *et la*

proportion de ceux qui deviennent malades est égale à $\frac{1}{3}$,

— parmi les individus porteurs sains, la proportion de ceux qui deviennent malades est égale à $\frac{1}{2}$.

La situation peut être représentée par un graphe probabiliste comme ci-dessous.



On note $P_n = \begin{pmatrix} s_n & \mathrm{i}_n & m_n \end{pmatrix}$ *la matrice ligne donnant l'état probabiliste au bout de n semaines où* s_n, i_n *et* m_n *désignent respectivement la probabilité que l'individu soit sain, porteur sain ou malade la n-ième semaine.*

On a alors P_0 *= (0,99 0 0,01) et pour tout entier naturel n,* $\begin{cases} s_{n+1}=\frac{1}{3}s_n \\ \mathrm{i}_{n+1}=\frac{1}{3}s_n+\frac{1}{2}\mathrm{i}_n \\ m_{n+1}=\frac{1}{3}s_n+\frac{1}{2}\mathrm{i}_n+m_n \end{cases}$

Remarque : Si P_0 n'est pas donnée, traduire " un seul individu est à l'origine de la maladie sur les 100 personnes que compte la population " $m_0 = \frac{1}{100}$, $s_0 = 1 - \frac{1}{100} = \frac{99}{100}$ et $\mathrm{i}_0 = 0$

1. Écrire la matrice A appelée matrice de transition, telle que pour tout entier naturel n, $P_{n+1} = P_n \times A$.

***Remarquer** :* les matrices P_n sont de format : 1×3 en multipliant par une matrice carrée 3×3 à droite, on obtient bien une matrice de format 1×3.

$$\begin{cases} s_{n+1}=\frac{1}{3}s_n \\ \mathrm{i}_{n+1}=\frac{1}{3}s_n+\frac{1}{2}\mathrm{i}_n \\ m_{n+1}=\frac{1}{3}s_n+\frac{1}{2}\mathrm{i}_n+m_n \end{cases} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} s_{n+1} & \mathrm{i}_{n+1} & m_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s_n & \mathrm{i}_n & m_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

La matrice de transition A est A = $\begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

2. Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n non nul, $P_n = P_0 \times A^n$.

n non nul, la proposition à démontrer : $P_n = P_0 \times A^n$.

Initialisation : *n* = 1, $P_1 = P_0 \times A$ et $P_0 \times A^1 = P_0 \times A$

La proposition est donc vérifiée pour *n* = 1.

Hérédité : Soit un entier naturel *n* tel que $P_n = P_0 \times A^n$

Comme $P_{n+1} = P_n \times A$, on a : $P_{n+1} = (P_0 \times A^n) \times A = P_0 \times (A^n \times A) = P_0 \times A^{n+1}$ par associativité du produit de matrices

On a montré l'implication suivante : si la proposition est vraie au rang *n* alors elle est vraie au rang *n* + 1.

Conclusion :

D'après l'axiome de récurrence, la proposition est vraie pour tout entier naturel *n* ⩾ 1.

3. Déterminer l'état probabiliste P_4 *au bout de quatre semaines. On pourra arrondir les valeurs à* 10^{-2} .

Quelle est la probabilité qu'un individu soit sain au bout de quatre semaines ?

On calcule $P_4 = P_0 \times A^4 = (0{,}99 \quad 0 \quad 0{,}01) \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^4$

Calcul de $A^4 = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^4$, pour faire le calcul à la main on peut remarque que A = $\frac{1}{6} \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 0 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$

On aura donc : $A^4 = \left(\frac{1}{6}\right)^4$

On peut calculer $\begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 0 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 0 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 0 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 10 & 22 \\ 0 & 9 & 27 \\ 0 & 0 & 36 \end{pmatrix}$

puis, $\begin{pmatrix} 4 & 10 & 22 \\ 0 & 9 & 27 \\ 0 & 0 & 36 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 4 & 10 & 22 \\ 0 & 9 & 27 \\ 0 & 0 & 36 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 10 & 22 \\ 0 & 9 & 27 \\ 0 & 0 & 36 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 16 & 130 & 1150 \\ 0 & 81 & 1215 \\ 0 & 0 & 1296 \end{pmatrix}$.

Donc, $A^4 = \frac{1}{6^4} \begin{pmatrix} 16 & 130 & 1150 \\ 0 & 81 & 1215 \\ 0 & 0 & 1296 \end{pmatrix}$.

$(0{,}99 \quad 0 \quad 0{,}01) = \frac{1}{100} (99 \quad 0 \quad 1)$

On calcule : $(99\quad 0\quad 1)\begin{pmatrix}16 & 130 & 1150\\ 0 & 81 & 1215\\ 0 & 0 & 1296\end{pmatrix} = (1584\quad 12870\quad 115\,146)$

Finalement : $P_4 = \dfrac{1}{100}\times\dfrac{1}{6^4}\times(1584\quad 12870\quad 115\,146) = \begin{pmatrix}\dfrac{1584}{129600} & \dfrac{12870}{129600} & \dfrac{115146}{129600}\end{pmatrix}$

Valeurs approchées à 10^{-2} : $P_4 \approx \begin{pmatrix}\dfrac{1{,}22}{100} & \dfrac{9{,}93}{100} & \dfrac{88{,}85}{100}\end{pmatrix} \approx (0{,}01\quad 0{,}10\quad 0{,}89)$

La probabilité qu'une personne soit saine au bout de quatre semaines est d'environ $\dfrac{1}{100}$.

Partie B

La maladie n'évolue en réalité pas selon le modèle précédent puisqu'au bout de 4 semaines de recherche, les scientifiques découvrent un vaccin qui permet d'enrayer l'endémie et traitent immédiatement l'ensemble de la population.

L'évolution hebdomadaire de la maladie après vaccination est donnée par la matrice de transition :

$$B = \begin{pmatrix}\dfrac{5}{12} & \dfrac{1}{4} & \dfrac{1}{3}\\ \dfrac{5}{12} & \dfrac{1}{4} & \dfrac{1}{3}\\ \dfrac{1}{6} & \dfrac{1}{2} & \dfrac{1}{3}\end{pmatrix}.$$

On note Q_n la matrice ligne donnant l'état probabiliste au bout de n semaines après la mise en place de ces nouvelles mesures de vaccination. Ainsi, $Q_n = \begin{pmatrix}S_n & I_n & M_n\end{pmatrix}$ où S_n, I_n et M_n désignent respectivement la probabilité que l'individu soit sain, porteur sain et malade la n-ième semaine après la vaccination.

Pour tout entier naturel n, on a alors $Q_{n+1} = Q_n \times B$.

D'après la partie A, $Q_0 = P_4$.

Pour la suite, on prend Q_0 = (0,01 0,10 0,89) où les coefficients ont été arrondis à 10^{-2}.

Ouf ! c'est bien le résultat obtenu à la fin de la partie A.

1. Exprimer S_{n+1}, I_{n+1} et M_{n+1} en fonction de S_n, I_n et M_n.

Comme $Q_{n+1} = \begin{pmatrix}S_{n+1} & I_{n+1} & M_{n+1}\end{pmatrix}$

$$Q_{n+1} = \begin{pmatrix}S_n & I_n & M_n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\dfrac{5}{12} & \dfrac{1}{4} & \dfrac{1}{3}\\ \dfrac{5}{12} & \dfrac{1}{4} & \dfrac{1}{3}\\ \dfrac{1}{6} & \dfrac{1}{2} & \dfrac{1}{3}\end{pmatrix}$$

$$Q_{n+1} = \begin{pmatrix}\dfrac{5}{12}S_n+\dfrac{5}{12}I_n+\dfrac{1}{6}M_n & \dfrac{1}{4}S_n+\dfrac{1}{4}I_n+\dfrac{1}{2}M_n & \dfrac{1}{3}S_n+\dfrac{1}{3}I_n+\dfrac{1}{3}M_n\end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} S_{n+1}=\frac{5}{12}S_n+\frac{5}{12}I_n+\frac{1}{6}M_n \\ I_{n+1}=\frac{1}{4}S_n+\frac{1}{4}I_n+\frac{1}{2}M_n \\ M_{n+1}=\frac{1}{3}S_n+\frac{1}{3}I_n+\frac{1}{3}M_n \end{cases}$$

2. Déterminer la constante réelle k telle que B² = k J où J est la matrice carrée d'ordre 3 dont tous les coefficients sont égaux à 1.

$$B^2 = \begin{pmatrix} \frac{5}{12} & \frac{1}{4} & \frac{1}{3} \\ \frac{5}{12} & \frac{1}{4} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{5}{12} & \frac{1}{4} & \frac{1}{3} \\ \frac{5}{12} & \frac{1}{4} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} \left(\frac{5}{12}\right)^2+\left(\frac{1}{4}\right)\left(\frac{5}{12}\right)+\left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{1}{6}\right) & \left(\frac{5}{12}\right)\left(\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{4}\right)^2+\left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{1}{2}\right) & \left(\frac{5}{12}\right)\left(\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{4}\right)\left(\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}\right)^2 \\ \left(\frac{5}{12}\right)^2+\left(\frac{1}{4}\right)\left(\frac{5}{12}\right)+\left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{1}{6}\right) & \left(\frac{5}{12}\right)\left(\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{4}\right)^2+\left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{1}{2}\right) & \left(\frac{5}{12}\right)\left(\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{4}\right)\left(\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}\right)^2 \\ \left(\frac{1}{6}\right)\left(\frac{5}{12}\right)+\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{5}{12}\right)+\left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{1}{6}\right) & \left(\frac{1}{6}\right)\left(\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{1}{2}\right) & \left(\frac{1}{6}\right)\left(\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}\right)^2 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} \frac{25+15+8}{144} & \frac{5+3+8}{48} & \frac{5+3+4}{36} \\ \frac{25+15+8}{144} & \frac{5+3+8}{48} & \frac{5+3+4}{36} \\ \frac{5+15+4}{72} & \frac{1+3+4}{24} & \frac{1+3+2}{18} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

En posant $k = \frac{1}{3}$ et $J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, on a : $B^2 = kJ$.

Remarque : on peut commencer par factoriser $\frac{1}{12}$ dans B pour avoir une matrice C à coefficients entiers :

$B = \frac{1}{12}\begin{pmatrix} 5 & 3 & 4 \\ 5 & 3 & 4 \\ 2 & 6 & 4 \end{pmatrix}$, puis calculer $C^2 = \begin{pmatrix} 5 & 3 & 4 \\ 5 & 3 & 4 \\ 2 & 6 & 4 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 48 & 48 & 48 \\ 48 & 48 & 48 \\ 48 & 48 & 48 \end{pmatrix}$, donc, $B^2 = \frac{1}{144}\begin{pmatrix} 48 & 48 & 48 \\ 48 & 48 & 48 \\ 48 & 48 & 48 \end{pmatrix}$

et comme $144 = 3\times48$, on retrouve le résultat demandé.

On en déduit que pour tout entier n supérieur ou égal à 2, $B^n = B^2$.

Commentaires :

Une petite récurrence serait la bienvenue ….

$B^3 = \text{B}\times\text{B}^2 = \dfrac{1}{3}\times\begin{pmatrix}\frac{5}{12} & \frac{1}{4} & \frac{1}{3}\\ \frac{5}{12} & \frac{1}{4} & \frac{1}{3}\\ \frac{1}{6} & \frac{1}{2} & \frac{1}{3}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1&1\\1&1&1\\1&1&1\end{pmatrix} = \dfrac{1}{3}\begin{pmatrix}1&1&1\\1&1&1\\1&1&1\end{pmatrix}$, puisque la somme de chaque ligne vaut 1 (somme des probabilités de toutes les éventualités).

donc, $B^3 = B^2$.

Supposons que pour un entier $n \geqslant 2$, $B^n = B^2$.

On a alors : $B^{n+1} = B.B^n = B.B^2 = B^2$...

3. a. Démontrer que pour tout entier n supérieur ou égal à 2, $Q_n = \begin{pmatrix}\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3}\end{pmatrix}$

On sait : Pour tout entier naturel *n*, on a $Q_{n+1} = Q_n \times B$.

d'où, par récurrence, on montre : $Q_n = Q_0\times B^n$ (Voir la partie A/ $P_n = P_0\times A^n$)

Initialisation : immédiate (voir partie A)

Hérédité :

Hypothèse de récurrence : $Q_n = Q_0\times B^n$

d'où, $Q_{n+1} = Q_n \times B = Q_0\times B^n \times B = Q_0\times B^{n+1}$

Conclusion : ...

Comme $B^n = B^2 = \dfrac{1}{3}J$, on calcule :

$$Q_n = Q_0 \times \frac{1}{3}J = \frac{1}{3}\ (0{,}01\ \ 0{,}10\ \ 0{,}89)\begin{pmatrix}1&1&1\\1&1&1\\1&1&1\end{pmatrix} = \frac{1}{3}(1\ \ 1\ \ 1) = \begin{pmatrix}\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3}\end{pmatrix}$$

Remarquer :

la somme 0,01 + 0,10 + 0,89 = 1 puisque c'est l'état probabiliste au bout d'un mois dans la partie A/.

b. Interpréter ce résultat en terme d'évolution de la maladie.

Peut-on espérer éradiquer la maladie grâce au vaccin ?

À log terme, la population se répartit en trois sous-groupes de même effectif :
$\dfrac{1}{3}$ des individus sont sains, $\dfrac{1}{3}$ sont des porteurs sains, $\dfrac{1}{3}$ sont malades.

Le vaccin ne va pas éradiquer la maladie.

Remarquer : mais sans vaccin, tous seront malades … car P_n converge vers (0 0 1).

Nouvelle-Calédonie novembre 2013

On note *E* l'ensemble des vingt-sept nombres entiers compris entre 0 et 26.

On note A l'ensemble dont les éléments sont les vingt-six lettres de l'alphabet et un séparateur entre deux mots, noté « ⋆ » considéré comme un caractère.

Pour coder les éléments de A, on procède de la façon suivante :

• Premièrement : On associe à chacune des lettres de l'alphabet, rangées par ordre alphabétique, un nombre entier naturel compris entre 0 et 25, rangés par ordre croissant. On a donc $a \to 0$, $b \to 1$,... $z \to 25$.

On associe au séparateur « ⋆ »le nombre 26.

a	*b*	*c*	*d*	*e*	*f*	*g*	*h*	*i*	*j*	*k*	*l*	*m*	*n*
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13

o	*p*	*q*	*r*	*s*	*t*	*u*	*v*	*w*	*x*	*y*	*z*	⋆
14	15	13	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26

On dit que a a pour rang 0, b a pour rang 1, ... , z a pour rang 25 et le séparateur « ⋆ » a pour rang 26.

• Deuxièmement : à chaque élément x de E , l'application g associe le reste de la division euclidienne de $4x + 3$ par 27.

On remarquera que pour tout x de E , $g(x)$ appartient à E .

• Troisièmement : Le caractère initial est alors remplacé par le caractère de rang $g(x)$.

Exemple :

$s \to 18$, $g(18) = 21$ et $21 \to v$. Donc la lettre s est remplacée lors du codage par la lettre v .

1. Trouver tous les entiers x de E tels que g (x) = x, c'est-à-dire invariants par g .

En déduire les caractères invariants dans ce codage.

$g(x) = x$ équivaut à $\begin{cases} 4x+3 \equiv x \ (27) \\ 0 \leqslant x \leqslant 26 \end{cases}$ équivaut à $\begin{cases} 3x \equiv -3 \ (27) \\ 0 \leqslant x \leqslant 26 \end{cases}$ équivaut à $\begin{cases} 3x \equiv 24 \ (27) \\ 0 \leqslant x \leqslant 26 \end{cases}$

remarquer : 3 et 27 n'étant pas premiers entre eux, ne pas chercher un inverse de 3 modulo 27.
On cherche tous les entiers entre 0 et 26 vérifiant ces conditions

k	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
3*k*	3	6	9	12	15	18	21	24	27	30	33	36	39
reste	3	6	9	12	15	18	21	24	0	3	6	9	12

k	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26
3*k*	42	45	48	51	54	57	60	63	66	69	72	75	78
reste	15	18	21	24	0	3	6	9	12	15	18	21	24

$x = 8$ ou $x = 17$ ou $x = 26$

Autre méthode : $3x \equiv -3 \ (27)$ équivaut à $3x = -3 + 27q$ avec $q \in \mathbb{Z}$.
$x \in$ E équivaut à $0 \leqslant x \leqslant 26$, d'où, $0 \leqslant 3x \leqslant 78$
On veut $q \in \mathbb{Z}$ et $0 \leqslant -3 + 27q \leqslant 78$

soit : $3 \leqslant 27q \leqslant 81$ équivaut à $\frac{3}{27} \leqslant q \leqslant 3$.

Les **entiers** possibles : $q = 1$ ou $q = 2$ ou $q = 3$
Si $q = 1$ alors $3x = -3 + 27 = 24$, soit : $x = 8$
Si $q = 2$ alors $3x = -3 + 54 = 51$, soit : $x = 17$
Si $q = 3$ alors $3x = -3 + 81 = 78$, soit : $x = 26$
On retrouve le résultat précédent.

Les caractères invariants dans ce codage sont donc : i , r et ⋆.

2. Démontrer que, pour tout entier naturel x appartenant à E et tout entier naturel y appartenant à E ,

si y ≡ 4x + 3 modulo 27 alors x ≡ 7y + 6 modulo 27.

En déduire que deux caractères distincts sont codés par deux caractères distincts.

On pose les conditions suffisantes : $x \in E$, $y \in E$ et $y \equiv 4x + 3$ modulo 27.

Soit : $\begin{cases} 0 \leqslant x \leqslant 26 \\ 0 \leqslant y \leqslant 26 \\ y \equiv 4x+3 \ (27) \end{cases}$

En multipliant par 7 les deux membres de la dernière équation :

$7y \equiv 28x + 21$ modulo 27 où $y \in E$,

comme $28 \equiv 1$ (27) et $21 \equiv -6$ modulo 27, on obtient : $7y \equiv x - 6$ (27)

on en déduit : $x \equiv 7y + 6$ (27) où x est le reste dans la division euclidienne par 27, donc, $x \in E$.

L'implication : si $y \equiv 4x + 3$ modulo 27 alors $x \equiv 7y + 6$ modulo 27 où $x \in E$ et $y \in E$ est démontrée.

Supposons deux caractères x_1 et x_2 distincts codés par le même y.

on a alors : $x_1 \equiv 7y + 6$ (27) et $x_2 \equiv 7y + 6$ (27)

donc : $x_1 \equiv x_2$ (27) et $0 \leqslant x_1 \leqslant 26$ et $0 \leqslant x_2 \leqslant 26$.

On a donc : $-26 \leqslant x_1 - x_2 \leqslant 26$ et $x_1 - x_2 \equiv 0$ (27).

le seul reste dans la division euclidienne compris entre –26 et 26 est 0, d'où, $x_1 = x_2$ ce qui est contradictoire avec s x_1 et x_2 distincts.

Remarque : c 'est un résultat démontré en cours lors des congruences.

Deux éléments distincts sont donc codés par des éléments distincts.

3. Proposer une méthode de décodage.

La question 2/ nous fournit la méthode de décodage.

Soit la lettre codée, on cherche l'entier correspondant y, on multiplie par 7, on ajoute 6 et on prend le reste x dans la division euclidienne par 27.

Le caractère associé à x est la lettre initiale codée

4. Décoder le mot « v f v ».

$v \to 21 \to 147 + 6 = 153 = 27\times 5 + 18 \quad 153 \equiv 18\ (27)$ et $18 \to s$

$f \to 5 \to 35 + 6 = 41 = 27\times 1 + 14 \quad 41 \equiv 14\ (27)$ et $14 \to o$

Le mot *« v f v »* est décodé par *« s o s »*.

On peut apprécier ou non ce genre d'humour lors de l'épreuve du bac !