Index

19 page 67

Marie-Sophie Germain (1776- 1831).

*Mathématicienne qui publia avec les plus grands mathématiciens de son époque en publiant les premiers travaux sous un nom d'emprunt masculin***.**

$n \in \mathbb{N}$, $N = n^4 + 4$.

1 a) Soit $n = 10k$ avec $k \in \mathbb{N}$.

$N = (10k)^4 + 4 = 2^4 \times 5^4 \times k^4 + 4 = 4(2^2 \times 5^4 \times k^4 + 1)$.

Comme $2^2 \times 5^4 \times k^4 + 1 \in \mathbb{N}$, N est un multiple de 4

Autre méthode :

pour montrer que N est un multiple de 4, il suffit de montrer que $N \equiv 0\ (4)$

On sait : $10 \equiv 2\ (4)$, d'où, $10^4 \equiv 2^4\ (4)$. Or, $2^4 = 16$, d'où, $10^4 \equiv 0\ (4)$.

On a alors : $10^4 .k^4 + 4 \equiv 0 \times k^4 + 0$ …..................... CQFD

b) soit a, le dernier chiffre de n

On peut écrire : $n = 10^k + a$ avec $0 \leqslant a \leqslant 9$ ou encore : $n \equiv a\ [10]$ avec $0 \leqslant a \leqslant 9$

D'après les propriétés des congruences, $n^4 \equiv a^4 \equiv b\ [10]$, avec $0 \leqslant b \leqslant 9$

puis $n^4 + 4 \equiv b + 4\ [10]$, avec $0 \leqslant b \leqslant 9$

$2^4 = 16 = 1 \times 10 + 6$ $\quad 2^4 \equiv 6\ [10]$, $\quad 4^4 = \left(2^2\right)^4 = \left(2^4\right)^2$, d'où, $4^4 \equiv 6^2 \equiv 6\ [10]$

et $8^4 = \left(2 \times 4\right)^4$, d'où, $8^4 \equiv 6 \times 6 \equiv 6\ [10]$

$3^4 = 81 = 8 \times 10 + 1$ $\quad 3^4 \equiv 1\ [10]$, comme $6^4 = \left(2 \times 3\right)^4$, on a : $6^4 \equiv 6 \times 1 \equiv 6\ [10]$

et $9^4 \equiv 1 \times 1 \equiv 1\ [10]$

$5^4 = 625 = 62 \times 10 + 5$ $\quad 5^4 \equiv 5\ [10]$

$7^4 = 49 \times 49$ d'où, $7^4 \equiv 9 \times 9 \equiv 1\ [10]$

Dans ce tableau, a est le chiffre des unités de n et b celui de n^4

$b + 4$ donne le nombre d'unités de N.

a	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**
b	0	1	6	1	6	5	6	1	6	1
$b + 4$	4	5	10	5	10	9	10	5	10	5

N est un multiple de 5 si et seulement si le dernier chiffre est 0 ou 5

N est un multiple de 5 si et seulement si le dernier chiffre de n est 1 ou 2 ou 3 ou 6 ou 8 ou 9.

N n'est pas un multiple de 5 si et seulement si le dernier chiffre de n est 0 ou 5.

Commentaire : (pour préparer la question d))

On a montré toutes les implications suivantes :

(Condition suffisante) implique (Condition nécessaire)

On traduit dans une recherche par : Il suffit d'avoir (CS)

il faut avoir (CN)

(I_1) : Si N n'est pas multiple de 5 alors n est un multiple de 5.
(I_2) (réciproque de (I_1)) : Si n est un multiple de 5 alors N n'est pas un multiple de 5
(I_3) (contraposée de (I_1)) : Si n n'est pas multiple de 5 alors N est un multiple de 5.
(I_4) (contraposée de (I_2) ou réciproque de (I_3)) : Si N est un multiple de 5 alors n n'est pas multiple de 5.

c) $n = 5$ $N = 629 = 17\times37$
$n = 15$ $N = 50\,629 = 197\times257$
$n = 25$ $N = 390\,629 = 577\times677$
Ces nombres N ne sont pas premiers.

d) **Le seul cas où une implication est fausse est**
le cas où la condition nécessaire est fausse quand la condition suffisante est vraie.
Dans tous les autres cas, l'implication est vraie.
Table de vérité d'une implication :

Condition suffisante : (CS)	**Condition nécessaire : (CN)**	**Implication : (CS) ⇒ (CN)**
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

(1) : si n est multiple de 5 alors on ne peut pas savoir s'il est premier ou non.
(on sait que si n est multiple de 10 alors N n'est pas premier puisqu'il est divisible par 4).
(2) FAUX: si n n'est pas multiple de 5 alors N n'est pas premier puisqu'il est divisible par 5. (d 'après b/) (I_3)
(3) On ne peut pas savoir : pour que N soit premier, il faut que n ne soit pas multiple de 5
La contraposée de cette proposition commence par : Il suffit que n soit multiple de 5 ....
(il faut que) " n n'est pas multiple de 5 " est une condition nécessaire de " N est premier "
(4) FAUX : pour que N soit premier, il suffit que n ne soit pas multiple de 5
" n n'est pas multiple de 5 " est une condition nécessaire de " N est premier "
la condition" n n'est pas multiple de 5 " n'est pas suffisante.
La phrase : Si n n'est pas multiple de 5 " alors " N est premier " est fausse d'après b/

2 a) Afin de démontrer cette égalité : $n^4 + 4m^4 = (n^2 + 2m^2 + 2mn)(n^2 + 2m^2 - 2mn)$,
on développe $(n^2 + 2m^2 + 2mn)(n^2 + 2m^2 - 2mn) = ... = n^4 + 4m^4$
Remarquer : $(n^2 + 2m^2 + 2mn)(n^2 + 2m^2 - 2mn) = (n^2 + 2m^2)^2 - (2mn)^2$
$= n^4 + 2\times n^2\times2m^2 + (2m)^2 - (2mn)^2 = n^4 + 4m^4$

b) La factorisation de $5^4 + 4$ s'obtient en faisant : $n = 5$ et $m = 1$
$n^2 + 2m^2 + 2mn = 25 + 2 + 10 = 37$
$n^2 + 2m^2 - 2mn = 25 + 2 - 10 = 17$

Celle de $15^4 + 4$ en faisant $n = 15$ et $m = 1$,
la factorisation de N pour $n = 35$ est : $35^2 + 2\times1\times1 + 2\times35\times1 = 1\,297$ par $35^2 + 2\times1\times1 - 2\times35\times1 = 1\,157$
$1157\times1297 = 1\,500\,629$
$35^4 + 4 = 1\,500\,629$

3) Les nombres de la forme $n^4 + 4$ ne sont jamais premiers.

Le 2a) prouve que $n^4 + 4\times1^4 = (n^2 + 2 + 2n)(n^2 + 2 - 2n)$

64 page 70

1) $1000 = 3\times333 + 1$ d'où $1000 \equiv 1\ (3)$

$2000 = 2\times1000$ d'où $2000 \equiv 2\ (3)$

2) Soit p un entier.

Disjonction des cas :

$p \equiv 0\ [3]$, $p + 1000 \equiv 1\ [3]$, $p + 2000 \equiv 2\ [3]$,

$p \equiv 1\ [3]$, $p + 1000 \equiv 2\ [3]$, $p + 2000 \equiv 0\ [3]$,

$p \equiv 2\ [3]$, $p + 1000 \equiv 0\ [3]$, $p + 2000 \equiv 1\ [3]$,

Dans tous les cas, un des entiers p, $p + 1\ 000$, $p + 2\ 000$ est divisible par 3.

En résumé :

p		**3*k***	**3*k* + 1**	**3*k* + 2**
reste dans la division euclidienne par 3	de p	0	1	2
	de $p + 1000$	1	2	0
	de $p + 2000$	2	0	1
commentaire			$p + 2000$ est divisible par 3	$p + 1000$ est divisible par 3

Il reste un seul cas à étudier :

le seul multiple de 3 qui est un nombre premier est 3,

3, 1 003 et 2 003.

1 003 n'est pas dans la liste des nombres premiers. $1\ 003 = 17\times59$

Dans tous les cas, au moins un des trois nombres p, $p + 1\ 000$, $p + 2\ 000$ n'est pas un nombre premier.

3) 11, 1511 et 3011 sont premiers.

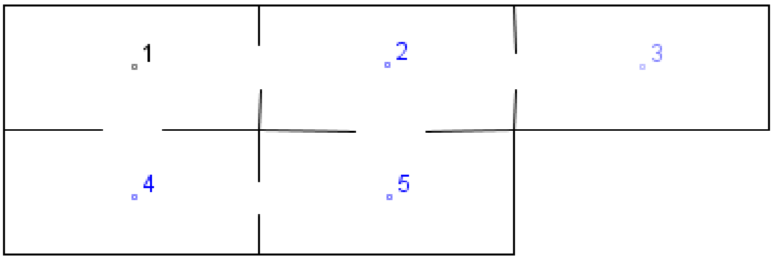
Il existe au moins un p premier tel que p, $p + 1\ 500$, $p + 3\ 000$ sont tous les trois des nombres premiers.

(En prenant la liste des nombres premiers, on peut trouver aussi : (67 ; 1567 ; 3067) et (79 ; 1579 ; 3079)

6 page 122 une histoire de labyrinthe

Partie A : Description

le labyrinthe :



De 1 à 2, et, de 1 à 4, la probabilité est $\frac{1}{2}$.

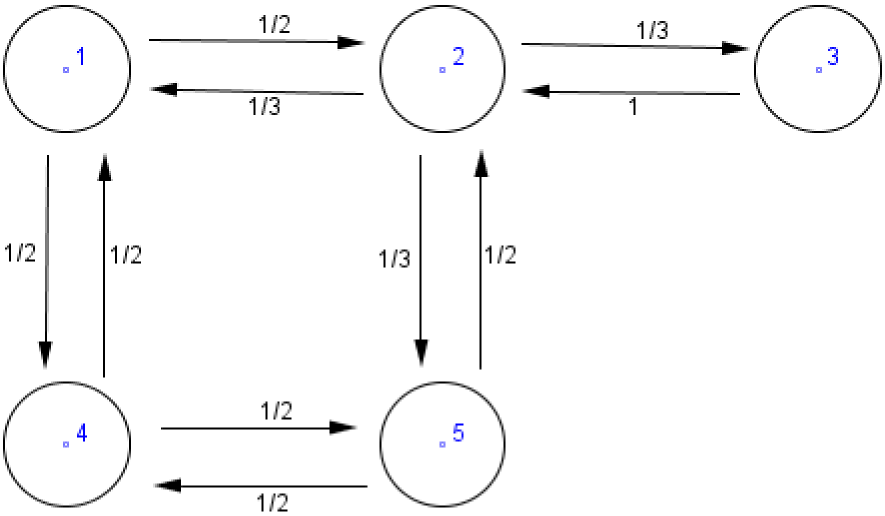
de 2 à 3, et, de 2 à 5, et, de 2 à 1, la probabilité est $\frac{1}{3}$.

de 3 à 2, la probabilité est 1.

de 4 à 1, et, de 4 à 5 la probabilité est $\frac{1}{2}$.

de 5 à 2, et, de 5 à 4, la probabilité est $\frac{1}{2}$.

Le graphe :



La matrice de transition : $T = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$.

Partie B : puissance d'une matrice

1) La calculatrice donne pour T^4 : $T^4 = \begin{pmatrix} \frac{29}{72} & 0 & \frac{7}{36} & 0 & \frac{29}{72} \\ 0 & \frac{11}{18} & 0 & \frac{7}{18} & 0 \\ \frac{7}{18} & 0 & \frac{2}{9} & 0 & \frac{7}{18} \\ 0 & \frac{7}{12} & 0 & \frac{5}{12} & 0 \\ \frac{29}{72} & 0 & \frac{7}{36} & 0 & \frac{29}{72} \end{pmatrix}$

2 a) $P_1(i)$ est la probabilité pour qu'en partant du compartiment 1, la souris à l'issue de 4 étapes se situe en i :

$P_1(1) = \frac{29}{72}$; $P_1(2) = 0$, $P_1(3) = \frac{7}{36}$; $P_1(4) = 0$; $P_1(5) = \frac{29}{72}$.

b) $P_4(i)$ est la probabilité pour qu'en partant du compartiment 4, la souris à l'issue de 4 étapes se situe en i :

$P_4(1) = 0$; $P_4(2) = \frac{7}{12}$, $P_4(3) = 0$; $P_4(4) = \frac{5}{12}$; $P_4(5) = 0$.

c) La souris est dans le compartiment 5 après 4 étapes :

en partant du compartiment 1 avec une probabilité égale à : $\frac{29}{72}$

en partant du compartiment 3 avec une probabilité égale à : $\frac{7}{18}$

en partant du compartiment 5 avec une probabilité égale à : $\frac{29}{72}$

Partie C : un exemple d'état probabiliste stable

La souris est lâchée de façon aléatoire dans un compartiment :

$(X = k)$ est l'événement : la souris est dans le compartiment k.

La variable aléatoire X suit la loi de probabilité suivante :

k	1	2	3	4	5
$P(X = k)$	0,2	0,3	0,1	0,2	0,2

1) $V_0 = (0{,}2 \;\; 0{,}3 \;\; 0{,}1 \;\; 0{,}2 \;\; 0{,}2)$ est la matrice ligne représentant l'état probabiliste au départ

$V_1 = V_0T = (0{,}2 \;\; 0{,}3 \;\; 0{,}1 \;\; 0{,}2 \;\; 0{,}2)$ L'état probabiliste après une étape est identique à l'état initial .

2) après 2013 étapes, l'état probabiliste est identique, d'où :

$P_{2013}(1) = 0{,}2$; $P_{2013}(2) = 0{,}3$; $P_{2013}(3) = 0{,}1$; $P_{2013}(4) = 0{,}2$; $P_{2013}(5) = 0{,}2$

Petite récurrence :

Montrons : pour tout $n \geqslant 1$, $V_0\,T^n = V_0$

Initialisation :

$V_1 = V_0T = V_0$ d'où, pour $n = 1$, on a : $V_0\,T^n = V_0$

Hérédité :

Soit un entier $n \geqslant 1$, tel que $V_0\, T^n = V_0$ (Hypothèse de récurrence)

Évaluons : $V_0\, T^{n+1}$

Comme $V_0\, T^{n+1} = V_0\, T^n \times T$

on a : $V_0\, T^{n+1} = V_0 \times T = V_0$......

Conclusion : ….

---

50 page 148

A et B sont deux matrices inversibles, c'est-à-dire :

il existe une et une seule matrice notée A^{-1} et une et une seule matrice notée B^{-1} telles que

$A^{-1}A = AA^{-1} = I_n$ et $B^{-1}B = BB^{-1} = I_n$

Comme le produit des matrices est associatif, on a : $ABB^{-1}A^{-1} = A(BB^{-1})A^{-1} = AI_nA^{-1}$

$= (AI_n)A^{-1}$.

Comme $AI_n = A$, on obtient : $ABB^{-1}A^{-1} = AA^{-1} = I_n$.

De même, $B^{-1}A^{-1}AB = B^{-1}(A^{-1}A)B = B^{-1}I_nB = B^{-1}B = I_n$.

On en déduit que la matrice produit $P = AB$ est inversible et que $P^{-1} = (AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$
