Index

32 page 67

1 a) $4 = 2^2$, $9 = 3^2$, $16 = 2^4$, $25 = 5^2$, $36 = 2^2\times3^2$, $49 = 7^2$, $64 = 2^6$, $81 = 3^4$, $100 = 2^2\times5^2$.

b) les exposants sont pairs.

c) Un nombre entier est un carré parfait si et seulement si tous les exposants sont pairs.

En effet : Soit un carré parfait $A = a^2$

Soit $a = \prod_{i=1}^{i=k} p_i^{\alpha_i}$ où tous les p_i $(1 \leqslant i \leqslant k)$ sont des nombres premiers et α_i un entier indiquant le nombre de facteurs égaux à p_i dans la décomposition de a.

On a alors : $A = \left(\prod_{i=1}^{i=k} p_i^{\alpha_i}\right)^2 = \prod_{i=1}^{i=k} p_i^{2\alpha_i}$ Les exposants sont pairs.

Réciproquement : Soit une décomposition où tous les exposants des facteurs premiers sont pairs.

$\prod_{i=1}^{i=k} p_i^{2\alpha_i} = \left(\prod_{i=1}^{i=k} p_i^{\alpha_i}\right)^2$ est donc un carré parfait.

2) On pose $\sqrt{2} = \dfrac{a}{b}$ où a, b entiers et $b \geqslant 2$.

a) On a donc : $2 = \left(\dfrac{a}{b}\right)^2 = \dfrac{a^2}{b^2}$, soit : $a^2 = 2b^2$.

b) Puisque b^2 est un carré, les exposants sont des nombres pairs.

L'exposant de 2 dans la décomposition de b^2 est soit 0, soit $2n$.

L'exposant de 2 dans la décomposition de $2b^2$ est soit 1, soit $2n + 1$.

On a donc : l'exposant de 2 dans la décomposition de a^2 est impair.

c) Or, d'après 1c), l'exposant de 2 est pair dans la décomposition d'un carré parfait.

Il y a donc une contradiction due à l'hypothèse introduite au 2).

On ne peut pas poser : $\sqrt{2} = \dfrac{a}{b}$ où a, b entiers et $b \geqslant 2$.

$\sqrt{2}$ est un irrationnel.

---

36 page 67

$a = 3^{\alpha}\times7^{\beta}$ et $(\alpha + 1)(\beta + 1) = 21$

On ne peut pas avoir $\alpha + 1 = 1$ ou $\beta + 1 = 1$, car, il y a au moins un 3 et un 7 d'après le texte.

Deux cas : $\begin{cases}\alpha+1=3\\ \beta+1=7\end{cases}$ ou $\begin{cases}\alpha+1=7\\ \beta+1=3\end{cases}$.

$a = 3^2\times7^6$ ou $a = 3^6\times7^2$

---

29 page 103

1. a. D'après les données, a (arête du cube) est un entier positif qui divise l et L.
$l = 882$ et $L = 945$
Les diviseurs communs de 882 et 945 sont les diviseurs de leur PGCD.
Algorithme d'Euclide :
$945 = 1\times882 + 63$
$882 = 63\times 14 + 0$
Les diviseurs communs de 882 et 945 sont : 1 ; 3 ; 7 ; 9 ; 21 ; 63

b. le volume $v = 77\,760$
$l = 12l'$ et $L = 12L'$, $v = l^2\times L = (12\,l')^2\times(12\,L') = 12^3\, l'^2\times L'$ (l' et L' sont premiers entre eux)
et $77\,760 = 2^6\times3^5\times5 = 12^3\times45$.
On peut donc mettre 45 cubes d'arêtes 12.
Comme $45 = 1^2\times45 = 3^2\times5$ (la base de la boîte B est carrée),
on peut faire : 1 cube à la base et 45 cubes en hauteur, d'où,
la boîte B a pour dimensions : $l = 12$ et $L = 45\times12 = 540$ B a pour dimensions : $12\times12\times540$
ou
3 cubes à la base et 5 cubes en hauteur,
d'où, la boîte B a pour dimensions : $l = 3\times12 = 36$ et $L = 5\times12 = 60$ B a pour dimensions : $36\times36\times60$

2. La boîte cubique C d'arête c contient des boîtes B sans laisser de vide lorsque c est un multiple commun à l et L.
a) $l = 882$ et $L = 945$
Les arêtes c possibles sont les multiples du PPCM(882 ; 945)
PPCM(882 ; 945)×PGCD(882 ; 945) = 882×945
PPCM(882 ; 945) = $\dfrac{882\times945}{63}$ = 13 230
$c = \{13230\times k \mid k\in\mathbb{N}^*\}$

b. Comme $c = 105$, alors, le volume de la caisse C est 105^3 = = 1 157 625.

Il y a donc : $\dfrac{1157625}{15435}$ = 75 boîtes B.

Comme $75 = 3\times5^2$, on a 5 fois la dimension l de B qui vaut 105, d'où, $l = \dfrac{105}{5} = 21$

et 3 fois la dimension L qui vaut 105, d'où, $L = \dfrac{105}{3} = 35$,

B a pour dimensions : $21\times21\times35$
