Exercice 1

Déterminer un entier x dans chaque cas :

a) $x \equiv 2\,731\ (6)$ et $0 \leqslant x < 6$
$2\,731 = 6\times 455 + 1$, donc : $x = 1$

b) $x \equiv -237\ (4)$ et $0 \leqslant x < 4$
$-237 = 4\times(-60) + 3$, donc, $x = 3$

c) $x \equiv 2\,013\ (11)$ et $-33 < x \leqslant -22$
$2\,013 = 11\times 183$, d'où, $x = -22$ (le seul entier dans l'intervalle $]-33\ ;\ -22]$ divisible par 11.

d) $2x \equiv 42\ (4)$ et $12 \leqslant x < 14$
$42 \equiv 2\ (4)$, d'où,
il existe un entier k tel que $2x = 4k + 2$ et $24 \leqslant 4k + 2 < 28$
Soit : $22 \leqslant 4k < 26$.
Le seul multiple de 4 est 24, d'où, $k = 6$
$2x = 26$ et $x = 13$
Attention : on ne peut pas diviser les congruences :
$2x \equiv 42\ (4)$ ne mène pas à $x \equiv 21\ (4)$
mais $x \equiv 21\ (4)$ ou $x \equiv 23\ (4)$
En effet, le reste de 2×23 dans la division par 4 est le même que celui de 2×21

Exercice 2

Démontrer la proposition suivante :
Pour tout entier naturel n, $5^{6n+1} + 2^{3n+1}$ est divisible par 7.

Remarquer :
$5 \equiv -2\ (7)$
$5^2 \equiv 4\ (7)$
$5^4 \equiv 2\ (7)$
$5^6 \equiv 1\ (7)$ — $2^3 = 8$, d'où, $2^3 \equiv 1\ (7)$
$(5^6)^n \equiv 1\ (7)$ — $(2^3)^n \equiv 1\ (7)$
$5^{6n+1} = (5^6)^n \times 5$, d'où, $5^{6n+1} \equiv 5\ (7)$ — $2^{3n+1} = (2^3)^n \times 2$, d'où, $2^{3n+1} \equiv 2\ (7)$

$2^3 \equiv 1(7)$
$(2^3)^n \equiv 1\ (7)$, d'où, $2^{3n+1} \equiv 2\ (7)$
La somme : $5^{6n+1} + 2^{3n+1} \equiv 7\ (7)$

Méthode : par récurrence
La proposition à démontrer.
P(n) : Pour tout entier naturel n, $5^{6n+1} + 2^{3n+1}$ est divisible par 7.

Initialisation :
$n = 0$ $5 + 2 = 7$ et 7 est divisible par 7 P(0) est vraie

Hérédité :
(sans les congruences)
Soit un entier n tel que $5^{6n+1} + 2^{3n+1}$ est divisible par 7. (Hypothèse de récurrence : P(n) est vraie)
Il existe un entier q tel que $5^{6n+1} + 2^{3n+1} = 7q$, d'où, $5^{6n+1} = 7q - 2^{3n+1}$
On étudie alors la divisibilité de : $5^{6(n+1)+1} + 2^{3(n+1)+1}$ (On veut en conclusion P(n+1) est vraie)

$5^{6(n+1)+1} + 2^{3(n+1)+1} = 5^{6n+1} \times 5^6 + 2^{3n+1} \times 2^3$

$= (7q - 2^{3n+1}) \times 5^6 + 2^{3n+1} \times 2^3 = 7q \times 5^6 + 2^{3n+1} \times (2^3 - 5^6)$

Or, $2^3 - 5^6 = 8 - 15625 = -15\,617 = 7 \times (-2\,231)$

On en déduit : $5^{6(n+1)+1} + 2^{3(n+1)+1} = 7(q \times 5^6 + 2^{3n+1} \times (-2\,231)$

On a montré : $P(n) \Rightarrow P(n+1)$

Conclusion :

D'après l'axiome de récurrence la proposition est vraie pour tout entier naturel *n*.

Hérédité (avec les congruences)

L'utilisation des congruences allège la rédaction, puisque " divisible par 7 " se traduit par " $\equiv 0$ (7) "

Soit un entier *n* tel que $5^{6n+1} + 2^{3n+1}$ est divisible par 7.

On a donc : $5^{6n+1} + 2^{3n+1} \equiv 0$ (7)

Comme $5^{6(n+1)+1} + 2^{3(n+1)+1} = 5^{6n+1} \times 5^6 + 2^{3n+1} \times 2^3$

et $5^2 \equiv 4$ (7), d''où, $5^6 \equiv 4^3$ (7), soit : $5^6 \equiv 1$ (7)

$2^3 \equiv 1$ (7)

$5^{6(n+1)+1} + 2^{3(n+1)+1} \equiv 5^{6n+1} + 2^{3n+1}$

Finalement : $5^{6(n+1)+1} + 2^{3(n+1)+1} \equiv 0$ (7)

Méthode directe : (avec congruences)

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $5^{6n+1} + 2^{3n+1} = (5^6)^n \times 5 + (2^3)^n \times 2$

Or, $5^6 \equiv 1$ (7) et $2^3 \equiv 1$ (7), (calculs faits en remarque au début de la rédaction)

d'où, $5^{6n+1} + 2^{3n+1} \equiv 1^n \times 5 + 1^n \times 2$ (7)

Conclusion : : $5^{6n+1} + 2^{3n+1} \equiv 0$ (7) pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 3

d et *n* sont des entiers naturels.

a) Montrer la propriété suivante :

n étant un entier naturel,

si *d* est un diviseur commun à $2n + 1$ et $6n + 8$ alors *d* est égal à 1 ou à 5.

Soit *d* un diviseur commun à $2n + 1$ et $6n + 8$.

d divise donc toute combinaison linéaire à coefficients entiers de $2n + 1$ et $6n + 8$.

En particulier : *d* divise $-3 \times (2n + 1) + 1 \times (6n + 8) = 5$

Soit *d* divise 5

Les entiers naturels divisant 5 sont 1 et 5.

On a montré :

si *d* est un diviseur commun à $2n + 1$ et $6n + 8$ alors d est égal à 1 ou à 5.

b) **Démontrer l'équivalence** :

5 est un diviseur de $2n + 1$ si et seulement si *n* se termine par 2 ou par 7.

Sens direct :

5 divise $2n + 1$ d'où, il existe un entier q tel que $2n + 1 = 5q$.

Les multiples de 5 s'écrivent : $10x$ ou $10x + 5$ où $x \in \mathbb{Z}$.

On a donc : $2n + 1 = 10x$ ou $2n + 1 = 10x + 5$

$2n + 1 = 10x$ est impossible (nombre impair $\neq$ nombre pair)

$2n + 1 = 10x + 5$ implique $2n = 10x + 4$

Si $2n$ se termine par 4 alors n se termine par 2 ou par 7.

Sens réciproque :

n se termine par 2 ou n se termine par 7, d'où, $n = 10x + 2$ ou $n = 10x + 7$ avec $x \in \mathbb{Z}$.

Par conséquent : $2n + 1 = 2(10x + 2) + 1$ ou $2n + 1 = 2(10x + 7) + 1$

et, $2n + 1 = 2(10x + 2) + 1$ ou $2n + 1 = 2(10x + 7) + 1$

On a donc : $2n + 1 = 5(4x + 1)$ ou $2n + 1 = 5(4x + 3)$ $\quad$ $4x + 1$ et $4x + 3$ sont des entiers.

si n se termine par 2 ou par 7 alors 5 est un diviseur de $2n + 1$

L'équivalence est démontrée.

Autre méthode :

On étudie **tous les cas** et on relève les seul cas possibles ...

Un nombre entier est divisible par 5 si et seulement si ce nombre entier se termine par 0 ou 5.

***n* se termine par :**	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**
2*n* +1 se termine par :	1	3	5	7	9	1	3	5	7	9

Les seuls cas où $2n + 1$ est divisible par 5 sont : n se termine par 2 ou 7.

L'équivalence est ainsi démontrée.

commentaires :

Ce tableau montre : si n se termine par 2 ou par 7 alors n est divisible par 5.

Pour l'équivalence, il faut aussi prouver la réciproque.

La réciproque est : si 5 est un diviseur de $2n + 1$ alors n se termine par 2 ou par 7.

La contraposée de la réciproque est : si n ne se termine ni par 2, ni par 7 alors n n'est pas divisible par 5.

Une proposition et sa contraposée sont équivalentes.

Or, le tableau montre aussi : si n ne se termine ni par 2, ni par 7 alors n n'est pas divisible par 5.

On a donc montré : si 5 est un diviseur de $2n + 1$ alors n se termine par 2 ou par 7.