Exercice 1 (définition des congruences ...)

Déterminer un entier x dans chaque cas :

Une méthode : on peut commencer par la division euclidienne pour déterminer le reste, puis chercher l'entier x qui convient.

I- a) $x \equiv 2\,731\ (6)$ et $0 \leqslant x < 6$
$2\,731 = 6\times455 + 1$, donc : $x = 1$.

b) $x \equiv -237\ (4)$ et $0 \leqslant x < 4$
$-237 = 4\times(-60) + 3$, donc, $x = 3$.

c) $x \equiv 2\,013\ (11)$ et $-33 < x \leqslant -22$
$2\,013 = 11\times183$, d'où, $x = -22$. (le seul entier dans l'intervalle $]-33\ ;\ -22]$ divisible par 11.

II- a) Dresser la table de multiplication des congruences modulo 4.

$\times$	**0**	**1**	**2**	**3**
0	0	0	0	0
1	0	1	2	3
2	0	2	0	2
3	0	3	2	1

b) En déduire la résolution de l'équation $3x \equiv 1\ (4)$
D'après la table, on a : $3\times3 \equiv 1\ (4)$ et c'est la seule possibilité.
L'ensemble des solutions est l'ensemble des réels $x \equiv 3\ (4)$, soit : $x = 4k + 3$ où $k \in \mathbb{Z}$.
Remarque importante *: ce résultat est celui qui permet de résoudre les équations du type* $3x \equiv b\ (4)$
En effet, en multipliant par 3 les deux membres, on a : $x \equiv 3b\ (4)$.
Plus généralement : soit une équation de la forme $ax \equiv b\ (c)$, *et on sait que* $ka \equiv 1\ (c)$
en multipliant par k les deux membres, on a : $x \equiv kb\ (c)$.

c) Déterminer un entier x tel que $3x \equiv 42\ (4)$ et $12 \leqslant x < 14$
Comme $42 = 4\times10 + 2$, on a : $3x \equiv 2\ (4)$
En multipliant par 3 chacun des membres de la congruence, on a : $3\times3x \equiv 3\times2\ (4)$
soit : $x \equiv 2\ (4)$
L'ensemble des solutions est l'ensemble des réels $x \equiv 2\ (4)$, soit : $x = 4k + 2$ où $k \in \mathbb{Z}$.
On veut : $12 \leqslant x < 14$, soit : $12 \leqslant 4k + 2 < 14$

$$10 \leqslant 4k < 12$$

Il n'existe pas de multiple de 4 vérifiant cet encadrement.

L'équation $3x \equiv 42\ (4)$ et $12 \leqslant x < 14$ n'a pas de solution.

Attention : on ne peut pas diviser les congruences.

Exercice 2

Remarquer :
$5 \equiv -2\ (7)$
$5^2 \equiv 4\ (7)$

$5^4 \equiv 2$ (7)
$5^6 \equiv 1$ (7) $2^3 = 8$, d'où, $2^3 \equiv 1$ (7)
$(5^6)^n \equiv 1$ (7) $(2^3)^n \equiv 1$ (7)
$5^{6n+1} = (5^6)^n \times 5$, d'où, $5^{6n+1} \equiv 5$ (7) $2^{3n+1} = (2^3)^n \times 2$, d'où, $2^{3n+1} \equiv 2$ (7)

$2^3 \equiv 1(7)$
$(2^3)^n \equiv 1$ (7), d'où, $2^{3n+1} \equiv 2$ (7)

1) Donner les restes de 5^6 et 2^3 dans la division euclidienne par 7.
$5 \equiv 5$ (7) $2^3 = 8$ et $8 \equiv 1$ (7)
$5^2 \equiv 25 \equiv 4$ (7)
$5^4 \equiv 16 \equiv 2(7)$
$5^4 \times 5^2 \equiv 4\times 2 \equiv 8 \equiv 1$ (7)
Les restes sont égaux à 1.

2) Démontrer la proposition suivante :
Pour tout entier naturel n, $5^{6n+1} + 2^{3n+1}$ est divisible par 7.

(On peut remplacer par des équivalences :
" Pour tout entier naturel n, $5^{6n+1} + 2^{3n+1}$ est divisible par 7 "
équivaut à
" Pour tout entier naturel n, $5^{6n+1} + 2^{3n+1} \equiv 0$ (7) ")

Plusieurs méthodes possibles :

Une méthode : par récurrence et sans les congruences
La proposition à démontrer.
P(n) : Pour tout entier naturel n, $5^{6n+1} + 2^{3n+1}$ est divisible par 7.
Initialisation :
$n = 0$ 5 + 2 = 7 et 7 est divisible par 7 P(0) est vraie
Hérédité :
(sans les congruences)
Soit un entier n tel que $5^{6n+1} + 2^{3n+1}$ est divisible par 7. (Hypothèse de récurrence : P(n) est vraie)
Il existe un entier q tel que $5^{6n+1} + 2^{3n+1} = 7q$, d'où, $5^{6n+1} = 7q - 2^{3n+1}$
On étudie alors la divisibilité de : $5^{6(n+1)+1} + 2^{3(n+1)+1}$ (On veut en conclusion P(n+1) est vraie)
$5^{6(n+1)+1} + 2^{3(n+1)+1} = 5^{6n+1} \times 5^6 + 2^{3n+1} \times 2^3$
$= (7q - 2^{3n+1})\times 5^6 + 2^{3n+1} \times 2^3 = 7q\times 5^6 + 2^{3n+1}\times(2^3 - 5^6)$
Or, $2^3 - 5^6 = 8 - 15625 = -15\,617 = 7\times(-2\,231)$
On en déduit : $5^{6(n+1)+1} + 2^{3(n+1)+1} = 7(q\times 5^6 + 2^{3n+1}\times(-2\,231)$
On a montré : P(n) $\Rightarrow$ P(n+1)
Conclusion :
D'après l'axiome de récurrence la proposition est vraie pour tout entier naturel n.

Une méthode : par récurrence et avec les congruences
La proposition à démontrer.
P(n) : Pour tout entier naturel n, $5^{6n+1} + 2^{3n+1}$ est divisible par 7.
Initialisation :
$n = 0$ 5 + 2 = 7 et 7 est divisible par 7 P(0) est vraie
Hérédité (avec les congruences)

L'utilisation des congruences allège la rédaction, puisque " divisible par 7 " se traduit par " $\equiv 0\ (7)$ "
Soit un entier *n* tel que $5^{6n+1} + 2^{3n+1}$ est divisible par 7.
On a donc : $5^{6n+1} + 2^{3n+1} \equiv 0\ (7)$
Comme $5^{6(n+1)+1} + 2^{3(n+1)+1} = 5^{6n+1} \times 5^6 + 2^{3n+1} \times 2^3$
et $5^2 \equiv 4\ (7)$, d"où, $5^6 \equiv 4^3\ (7)$, soit : $5^6 \equiv 1\ (7)$
$2^3 \equiv 1\ (7)$
$5^{6(n+1)+1} + 2^{3(n+1)+1} \equiv 5^{6n+1} + 2^{3n+1}$
Finalement : $5^{6(n+1)+1} + 2^{3(n+1)+1} \equiv 0\ (7)$

Une méthode directe : (avec congruences)
Pour tout $n\in\mathbb{N}$, $5^{6n+1} + 2^{3n+1} = (5^6)^n\times 5 + (2^3)^n\times 2$
Or, $5^6 \equiv 1\ (7)$ et $2^3 \equiv 1\ (7)$, (calculs faits en remarque au début de la rédaction)
d'où, $5^{6n+1} + 2^{3n+1} \equiv 1^n\times 5 + 1^n\times 2\ (7)$
Conclusion : : $5^{6n+1} + 2^{3n+1} \equiv 0\ (7)$ pour tout $n\in\mathbb{N}$.

Exercice 3

d et *n* sont des entiers naturels.

a) Montrer la propriété suivante :

n étant un entier naturel,

si *d* est un diviseur commun à $2n + 1$ et $6n + 8$ alors *d* est égal à 1 ou à 5.

Soit *d* un diviseur commun à $2n + 1$ et $6n + 8$.

d divise donc toute combinaison linéaire à coefficients entiers de $2n + 1$ et $6n + 8$.

En particulier : *d* divise $-3\times(2n + 1) + 1\times(6n + 8) = 5$

Soit *d* divise 5

Les entiers naturels divisant 5 sont 1 et 5.

On a montré :

si *d* est un diviseur commun à $2n + 1$ et $6n + 8$ alors d est égal à 1 ou à 5.

b) **Démontrer l'équivalence** :

5 est un diviseur de $2n + 1$ si et seulement si *n* se termine par 2 ou par 7.

Sens direct :

5 divise $2n + 1$ d'où, il existe un entier *q* tel que $2n + 1 = 5q$.

Les multiples de 5 s'écrivent : $10x$ ou $10x + 5$ où $x \in \mathbb{Z}$.

On a donc : $2n + 1 = 10x$ ou $2n + 1 = 10x + 5$

$2n + 1 = 10x$ est impossible (nombre impair $\neq$ nombre pair)

$2n + 1 = 10x + 5$ implique $2n = 10x + 4$

Si $2n$ se termine par 4 alors *n* se termine par 2 ou par 7.

Sens réciproque :

n se termine par 2 ou n se termine par 7, d'où, $n = 10x + 2$ ou $n = 10x + 7$ avec $x \in \mathbb{Z}$.

Par conséquent : $2n + 1 = 2(10x + 2) + 1$ ou $2n + 1 = 2(10x + 7) + 1$

et, $2n + 1 = 2(10x + 2) + 1$ ou $2n + 1 = 2(10x + 7) + 1$

On a donc : $2n + 1 = 5(4x + 1)$ ou $2n + 1 = 5(4x + 3)$ $4x + 1$ et $4x + 3$ sont des entiers.

si n se termine par 2 ou par 7 alors 5 est un diviseur de $2n + 1$

L'équivalence est démontrée.

Autre méthode :

On étudie **tous les cas** et on relève les seul cas possibles ...

Un nombre entier est divisible par 5 si et seulement si ce nombre entier se termine par 0 ou 5.

***n* se termine par :**	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**
2*n* +1 se termine par :	1	3	5	7	9	1	3	5	7	9

Les seuls cas où $2n + 1$ est divisible par 5 sont : n se termine par 2 ou 7.

L'équivalence est ainsi démontrée.

commentaires :

Ce tableau montre : si n se termine par 2 ou par 7 alors n est divisible par 5.

Pour l'équivalence, il faut aussi prouver la réciproque.

La réciproque est : si 5 est un diviseur de $2n + 1$ alors n se termine par 2 ou par 7.

La contraposée de la réciproque est : si n ne se termine ni par 2, ni par 7 alors n n'est pas divisible par 5.

Une proposition et sa contraposée sont équivalentes.

Or, le tableau montre aussi : si n ne se termine ni par 2, ni par 7 alors n n'est pas divisible par 5.

On a donc montré : si 5 est un diviseur de $2n + 1$ alors n se termine par 2 ou par 7.