Matrices

Exercice 1 : Opérations sur les matrices.

1) Soit la matrice ligne U (Format 1×2) et la matrice colonne V (Format 2×1).

$U\begin{pmatrix}2 & 5\end{pmatrix}$ et $V\begin{pmatrix}4\\-1{,}6\end{pmatrix}$.

Effectuer le produit $\boldsymbol{U\times V}$**.**

$$U\times V = \begin{pmatrix}2 & 5\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}4\\-1{,}6\end{pmatrix} = 2\times 4 + 5\times(-1{,}6) = 0.$$

Interpréter ce résultat en géométrie vectorielle.

Soit dans un repère orthonormal les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ de coordonnées respectives $\begin{pmatrix}2\\5\end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix}4\\-1{,}6\end{pmatrix}$.

Le produit scalaire $\vec{u}\cdot\vec{v} = 0$.

les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux.

2) **Effectuer en donnant le détail des calculs, les opérations suivantes :**

$A + B$, $A\times B$, $B\times A$ et $C\times D$.

$A = \begin{pmatrix}2 & 1\\4 & 7\end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix}3 & -2\\4 & -4\end{pmatrix}$; $C = \begin{pmatrix}-1 & 1\\2 & -2\end{pmatrix}$ et $D = \begin{pmatrix}3 & 1\\3 & 1\end{pmatrix}$

$$A + B = \begin{pmatrix}2+3 & 1-2\\4+4 & 7-4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}5 & -1\\8 & 3\end{pmatrix}.$$

$$AB = \begin{pmatrix}2\times 3+1\times 4 & 2\times(-2)+1\times(-4)\\4\times 3+7\times 4 & 4\times(-2)+7\times(-4)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}10 & -8\\40 & -36\end{pmatrix}$$

$$BA = \begin{pmatrix}3\times 2+(-2)\times 4 & 3\times 1+(-2)\times 7\\4\times 2+4\times(-4) & 4\times 1+(-4)\times 7\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-2 & -11\\-8 & -24\end{pmatrix}$$

$$CD = \begin{pmatrix}-1\times 3+1\times 3 & -1\times 1+1\times 1\\2\times 3+(-2)\times 3 & 2\times 1+(-2)+1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0 & 0\\0 & 0\end{pmatrix}.$$

Exercice 2 : système linéaire

Partie ***A*/**

x et y étant deux réels, on considère le système Σ $\begin{cases}2x+3y=1\\-3x-4y=2\end{cases}$

1) **Écrire ce système sous la forme** $\boldsymbol{AX = B}$ **où** $\boldsymbol{A}$ **est une matrice carrée d'ordre 2, et,** $\boldsymbol{X}$ **et** $\boldsymbol{B}$ **deux matrices colonnes.**

$A = \begin{pmatrix}2 & 3\\-3 & -4\end{pmatrix}$; $X = \begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix}2 & 3\\-3 & -4\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$ équivaut à $\begin{cases}2x+3y=1\\-3x-4y=2\end{cases}$

2) **Justifier que la matrice A est inversible et déterminer la matrice inverse A^{-1}.**
À partir des connaissances du cours :
Le déterminant de A est : $2\times(-4)-(3)\times(-3) = -8 + 9 = 1$

Comme le déterminant est non nul, la matrice A est inversible, et, on a : $A^{-1} = \frac{1}{1}\begin{pmatrix}-4 & -3\\ 3 & 2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-4 & -3\\ 3 & 2\end{pmatrix}$

En revenant aux définitions :
On cherche une matrice $B = \begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}$ telle que $AB = BA = I_2$.

$AB = \begin{pmatrix}2a+3c & 2b+3d\\ -3a-4c & -3b-4d\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$.

On en déduit les deux systèmes : (1) $\begin{cases}2a+3c=1\\ -3a-4c=0\end{cases}$ et (2) $\begin{cases}2b+3d=0\\ -3b-4d=1\end{cases}$.

Par combinaison linéaire des lignes :
Pour (1), 3L1 + 2L2 :
(1) équivaut à $\begin{cases}2a+3c=1\\ 6a+9c-6a-8c=3-0\end{cases}$ équivaut à $\begin{cases}2a+3c=1\\ c=3\end{cases}$ équivaut à $\begin{cases}a=-4\\ c=3\end{cases}$

Pour (2), 3L1 + 2L2 :
(2) équivaut à $\begin{cases}2b+3d=0\\ 6b+9d-6b-8d=0+2\end{cases}$ équivaut à $\begin{cases}2b+3d=0\\ d=2\end{cases}$ équivaut à $\begin{cases}b=-3\\ d=2\end{cases}$

Soit $B = \begin{pmatrix}-4 & -3\\ 3 & 2\end{pmatrix}$.

Calculons BA

$BA = \begin{pmatrix}-4\times2-3\times(-3) & -4\times3-3\times(-4)\\ -3\times2+2\times(-3) & 3\times3+2\times(-4)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$.

La matrice A est donc inversible et $A^{-1} = \begin{pmatrix}-4 & -3\\ 3 & 2\end{pmatrix}$

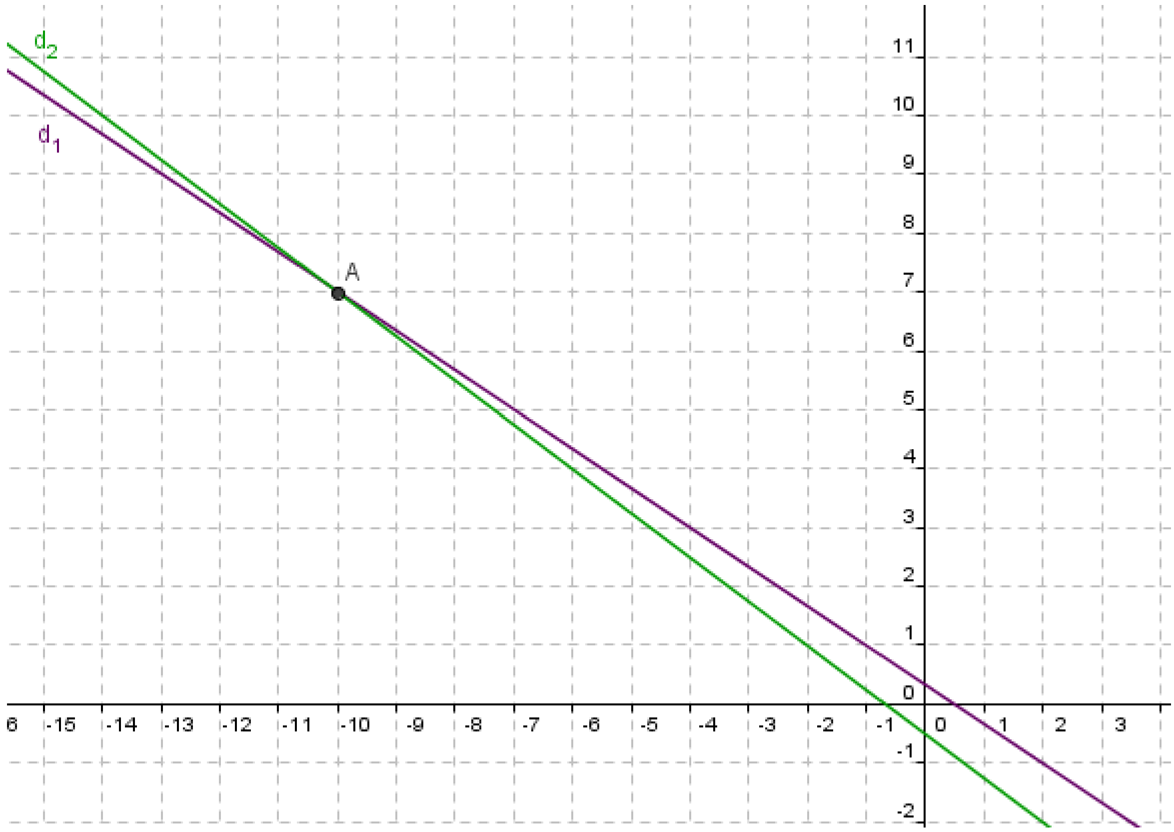
3) **Résoudre le système Σ. On note S l'ensemble solution de ce système Σ.**
Avec les matrices :
Comme $AX = B$, on obtient : $X = A^{-1}B$, soit : $X = \begin{pmatrix}-4 & -3\\ 3 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\ 2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-4\times1-3\times2\\ 3\times1+2\times2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-10\\ 7\end{pmatrix}$.

L'ensemble solution est le couple (–10 ; 7).
$S = \{(-10\ ;\ 7)\}$
Sans les matrices :
$\begin{cases}2x+3y=1\\ -3x-4y=2\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}6x+9y=3\\ -6x-8y=4\end{cases}$, on en déduit par somme : $y = 7$

$\begin{cases}2x+3y=1\\ -3x-4y=2\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}8x+12y=4\\ -9x-12y=6\end{cases}$, on en déduit par somme : $-x = 10$, soit : $x = -10$

Vérification : $2\times(-10)+3\times7 = -20 + 21 = 1$ et $-3\times(-10)-4\times7 = 30 - 28 = 2$

Partie B/
Dans un repère du plan, représenter les droites d_1 et d_2 d'équations respectives $2x + 3y = 1$ et $-3x - 4y = 2$. Interpréter géométriquement le résultat de la partie A/3).



Les droites d_1 et d_2 sont sécantes et le point d'intersection est le point $I(-10\ ;\ 7)$

Arithmétique

Exercice 3

x et y étant deux *entiers relatifs*, résoudre l'équation $x^2 - y^2 = 7$ (Aide : $x^2 - y^2 =$ (........)(.........)

$x^2 - y^2 = 7 \Leftrightarrow (x-y)(x+y) = 7$

$x - y$ et $x + y$ sont donc les diviseurs associés de 7. $-1\ ;\ -7\ ;\ 1\ ;\ 7$

$\begin{cases} x-y=-1 \\ x+y=-7 \end{cases}$ ou $\begin{cases} x-y=-7 \\ x+y=-1 \end{cases}$ ou $\begin{cases} x-y=1 \\ x+y=7 \end{cases}$ ou $\begin{cases} x-y=7 \\ x+y=1 \end{cases}$.

$\begin{cases} 2x=-8 \\ 2y=-6 \end{cases}$ ou $\begin{cases} 2x=-8 \\ 2y=6 \end{cases}$ ou $\begin{cases} 2x=8 \\ 2y=6 \end{cases}$ ou $\begin{cases} 2x=8 \\ 2y=-6 \end{cases}$.

Les solutions sont donc les couples $(x\ ;\ y)$ suivants : $(-4\ ;\ -3)\ ;\ (-4\ ;\ 3)\ ;\ (4\ ;\ 3)\ ;\ (4\ ;\ -3)$

Exercice 4

Soit $n \in \mathbb{N}$.

1) Quels sont les restes possibles dans la division euclidienne de n par 9 ?

En déduire le reste de la division euclidienne de n^6 par 9.

On peut faire un tableau.

Cela revient à écrire $n \equiv r\ [9]$ avec r entier et $r \in [0\ ;\ 8]$

puis $n^6 \equiv r^6 \equiv a\ [9]$ en appliquant les propriétés des congruences. (a entier et $a \in [0\ ;\ 8]$)

r	0	1	2	3	4	5	6	7	8
a	0	1	1	0	1	1	0	1	1

$2^6 = 64 = 9\times7 + 1$; 3^6 et 6^6 sont divisibles par 9

$4^6 = (2\times2)^6 = 2^6 \times 2^6$ d'où $4^6 \equiv 1$ [9]

$8^6 = (2\times4)^6 = 2^6 \times 4^6$ d'où $8^6 \equiv 1$ [9]

$5^6 = (5^2)^3 = 25^3$ $25 = 9\times3 - 2$ d'où : $5^6 \equiv (-2)^3 \equiv -8 \equiv 1$ [9]

$7^6 = (7^2)^3 = 49^3$ $49 = 9\times5 + 4$ d'où : $7^6 \equiv 4^3 \equiv 64 \equiv 1$ [9]

Sans les congruences : (à éviter ici, mais permet de revenir aux définitions et de comprendre sur quoi on travaille avec les congruences)

D'après la définition de la division euclidienne : $n = 9\times q + r$ où q et r **entiers** et $0 \leqslant r < 9$.

donc $r \in \{0 ; 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6 ; 7 ; 8\}$

$n^6 = (9q+r)^6 = (9q + r)(9q + r)(9q + r)(9q + r)(9q + r)(9q + r)$

En développant, on aura avant réduction 64 termes.

Chaque terme où intervient au moins une fois le facteur $9q$ est un multiple de 9.

Le seul terme où le facteur $9q$ n'apparaît pas est : r^6.

On a alors : $n^6 = 9k + r^6$ après factorisation du facteur 9.

k est un entier puisque k est la somme de produits de facteurs entiers.

Il reste à étudier r^6 :

les calculs donnent : si $r = 1$ alors $r^6 = 1$

si $r = 2$ alors $r^6 = 64 = 9\times7 + 1$

si $r = 3$ alors $r^6 = 3^{(2+4)} = 9\times 3^4 + 0$

si $r = 4$ alors $r^6 = 4\,096 = 9\times455 + 1$

si $r = 5$ alors $r^6 = 15\,625 = 9\times1\,736 + 1$

si $r = 6$ alors $r^6 = (3\times2)^{(2+4)} = 9\times 3^4\times2^6 + 0$

si $r = 7$ alors $r^6 = 117\,649 = 9\times13\,072 + 1$

si $r = 8$ alors $r^6 = 262\,144 = 9\times29\,127 + 1$

Finalement : $n^6 = 9q' + 0$ lorsque $n = 9q$ ou $n = 9q + 3$ ou $n = 9q + 6$.

$n^6 = 9q' + 1$ lorsque $n = 9q + 1$ ou $n = 9q + 2$ ou $n = 9q + 4$ ou $n = 9q + 5$ ou $n = 9q + 7$ ou $n = 9q + 8$.

2) Démontrer que $n^6 - 1$ est divisible par 9 si et seulement si n n'est pas divisible par 3.

Avec les notations du 1)

$n^6 - 1$ est divisible par 9 si et seulement si $a - 1 \equiv 0$ [9] si et seulement si $a \equiv 1$ [9]

La lecture du tableau montre :

$a \equiv 1\ \ [9]$ lorsque $r \in \{1 ; 2 ; 5 ; 7 ; 8\}$

Les nombres de la forme $9q + r$ avec $r \in \{1 ; 2 ; 5 ; 7 ; 8\}$ ne sont pas multiples de 3.

$a \equiv 0\ \ [9]$ lorsque $r \in \{0 ; 3 ; 6\}$

Les nombres de la forme $9q + r$ avec $r \in \{0 ; 3 ; 6\}$ sont multiples de 3.

Ce qui prouve l'équivalence.