Matrices

Exercice 1 : Donner du sens à une matrice, aux coefficients ….

La matrice suivante donne la répartition des fréquences pour les choix de LV1 dans un lycée pour les filles et les garçons.

Ligne 1 pour les filles, ligne 2 pour les garçons.

Colonne 1 pour l'anglais, colonne 2 pour l'espagnol, colonne 3 pour l'allemand.

$$A = \begin{pmatrix} 0{,}7 & 0{,}2 & 0{,}1 \\ 0{,}8 & 0{,}15 & 0{,}05 \end{pmatrix}$$

Le lycée compte 800 filles et 700 garçons.

1) Donner l'effectif de garçons étudiant l'espagnol.

d'après la colonne 2 et la ligne 2, on a : $0{,}15 \times 700 = 105$ garçons étudiant l'espagnol.

2) Que représente la somme des coefficients de la ligne 1?

La somme des coefficients de la première ligne vaut 1.

Toutes les élèves (*filles*) ont obligatoirement une langue vivante 1 suivie dans ce lycée.

3***) Donner la matrice de dimension 2×3 correspondant aux effectifs d'élèves répartis par langue et sexe.***

$$\begin{pmatrix} 560 & 160 & 80 \\ 560 & 105 & 35 \end{pmatrix} \text{ c'est-à-dire : } \begin{pmatrix} & \textit{anglais} & \textit{espagnol} & \textit{allemand} & \textit{total} \\ \textbf{\textit{Filles}} & 560 & 160 & 80 & \textit{800} \\ \textbf{\textit{garçons}} & 560 & 105 & 35 & \textit{700} \\ \textbf{\textit{total}} & \textit{1120} & \textit{265} & \textit{115} & \textit{1500} \end{pmatrix}$$

4) Donner la matrice ligne à trois colonnes donnant les fréquences d'élèves dans ce lycée pour chacune des langues.

En anglais : $\dfrac{1120}{1500} = \dfrac{56}{75}$, en espagnol : $\dfrac{265}{1500} = \dfrac{53}{300}$, en allemand : $\dfrac{115}{1500} = \dfrac{23}{300}$

la matrice ligne demandée : $\begin{pmatrix} \dfrac{56}{75} & \dfrac{53}{300} & \dfrac{23}{300} \end{pmatrix}$

Exercice 2 : Opérations sur les matrices.

1) Soit la matrice ligne U (Format 1×2) et la matrice colonne V (Format 2×1).

$U \begin{pmatrix} 2 & 5 \end{pmatrix}$ ***et*** $V \begin{pmatrix} 4 \\ -1{,}6 \end{pmatrix}$.

Effectuer le produit $U \times V$**.**

$$U \times V = \begin{pmatrix} 2 & 5 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 4 \\ -1{,}6 \end{pmatrix} = 2 \times 4 + 5 \times (-1{,}6) = 0.$$

Interpréter ce résultat en géométrie vectorielle.

Soit dans un repère orthonormal les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ de coordonnées respectives $\begin{pmatrix}2\\5\end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix}4\\-1{,}6\end{pmatrix}$.

Le produit scalaire $\vec{u}\cdot\vec{v} = 0$.

les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux.

2) Effectuer en donnant le détail des calculs, les opérations suivantes :

A + B, A – B, A – 2B

A = $\begin{pmatrix}2 & 1\\4 & 7\end{pmatrix}$ ***et B =*** $\begin{pmatrix}3 & -2\\4 & -4\end{pmatrix}$ **.**

$A + B = \begin{pmatrix}2+3 & 1-2\\4+4 & 7-4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}5 & -1\\8 & 3\end{pmatrix}$.

$A - B = \begin{pmatrix}2-3 & 1+2\\4-4 & 7+4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1 & 3\\0 & 11\end{pmatrix}$.

$A - 2B = \begin{pmatrix}2-6 & 1+4\\4-8 & 7+8\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-4 & 5\\-4 & 15\end{pmatrix}$.

Arithmétique

Exercice 3

x et y étant deux entiers relatifs, résoudre l'équation x² – y² = 7 (Aide : x² – y² = (........)(.........)

$x^2 - y^2 = 7 \Leftrightarrow (x-y)(x+y) = 7$

$x - y$ et $x + y$ sont donc les diviseurs associés de 7. –1 ; –7 ; 1 ; 7

$\begin{cases}x-y=-1\\x+y=-7\end{cases}$ ou $\begin{cases}x-y=-7\\x+y=-1\end{cases}$ ou $\begin{cases}x-y=1\\x+y=7\end{cases}$ ou $\begin{cases}x-y=7\\x+y=1\end{cases}$.

$\begin{cases}2x=-8\\2y=-6\end{cases}$ ou $\begin{cases}2x=-8\\2y=6\end{cases}$ ou $\begin{cases}2x=8\\2y=6\end{cases}$ ou $\begin{cases}2x=8\\2y=-6\end{cases}$.

Les solutions sont donc les couples (x ; y) suivants : (–4 ; –3) ; (–4 ; 3) ; (4 ; 3) ; (4 ; –3)

Réflexe à avoir :

En arithmétique, pour tout produit d'entiers $a \times b = c$ penser que a et b sont des diviseurs de c.

Exercice 4

Soit n∈ℕ.

1) Quels sont les restes possibles dans la division euclidienne de n par 9 ?

En déduire le reste de la division euclidienne de n^6 ***par 9.***

(On peut faire un tableau ….)

Cela revient à écrire $n \equiv r$ [9] avec r entier et $r \in [0 ; 8]$

puis $n^6 \equiv r^6 \equiv a$ [9] en appliquant les propriétés des congruences. (a entier et $a \in [0 ; 8]$)

r	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**
a	0	1	1	0	1	1	0	1	1

$2^6 = 64 = 9\times7 + 1$; 3^6 et 6^6 sont divisibles par 9

$4^6 = (2\times2)^6 = 2^6\times2^6$ d'où $4^6 \equiv 1\ [9]$

$8^6 = (2\times4)^6 = 2^6\times4^6$ d'où $8^6 \equiv 1\ [9]$

$5^6 = (5^2)^3 = 25^3$ $25 = 9\times3 - 2$ d'où : $5^6 \equiv (-2)^3 \equiv -8 \equiv 1\ [9]$

$7^6 = (7^2)^3 = 49^3$ $49 = 9\times5 + 4$ d'où : $7^6 \equiv 4^3 \equiv 64 \equiv 1\ [9]$

Sans les congruences : (à éviter ici, mais permet de revenir aux définitions et de comprendre sur quoi on travaille avec les congruences)

D'après la définition de la division euclidienne : $n = 9\times q + r$ où q et r **entiers** et $0 \leqslant r < 9$.

donc $r \in \{0 ; 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6 ; 7 ; 8\}$

$n^6 = (9q+r)^6 = (9q + r)(9q + r)(9q + r)(9q + r)(9q + r)(9q + r)$

En développant, on aura avant réduction 64 termes.

Chaque terme où intervient au moins une fois le facteur $9q$ est un multiple de 9.

Le seul terme où le facteur $9q$ n'apparaît pas est : r^6.

On a alors : $n^6 = 9k + r^6$ après factorisation du facteur 9.

k est un entier puisque k est la somme de produits de facteurs entiers.

Il reste à étudier r^6 :

les calculs donnent : si $r = 1$ alors $r^6 = 1$

si $r = 2$ alors $r^6 = 64 = 9\times7 + 1$

si $r = 3$ alors $r^6 = 3^{(2+4)} = 9\times3^4 + 0$

si $r = 4$ alors $r^6 = 4\,096 = 9\times455 + 1$

si $r = 5$ alors $r^6 = 15\,625 = 9\times1\,736 + 1$

si $r = 6$ alors $r^6 = (3\times2)^{(2+4)} = 9\times3^4\times2^6 + 0$

si $r = 7$ alors $r^6 = 117\,649 = 9\times13\,072 + 1$

si $r = 8$ alors $r^6 = 262\,144 = 9\times29\,127 + 1$

Finalement : $n^6 = 9q' + 0$ lorsque $n = 9q$ ou $n = 9q + 3$ ou $n = 9q + 6$.

$n^6 = 9q' + 1$ lorsque $n = 9q + 1$ ou $n = 9q + 2$ ou $n = 9q + 4$ ou $n = 9q + 5$ ou $n = 9q + 7$ ou $n = 9q + 8$.

2) Démontrer que $n^6 - 1$ est divisible par 9 si et seulement si n n'est pas divisible par 3.

Avec les notations du 1)

$n^6 - 1$ est divisible par 9 si et seulement si $a - 1 \equiv 0 \ [9]$ si et seulement si $a \equiv 1 \ [9]$

La lecture du tableau montre :

$a \equiv 1 \ [9]$ lorsque $r \in \{1 ; 2 ; 5 ; 7 ; 8\}$

Les nombres de la forme $9q + r$ avec $r \in \{1 ; 2 ; 5 ; 7 ; 8\}$ ne sont pas multiples de 3.

$a \equiv 0 \ [9]$ lorsque $r \in \{0 ; 3 ; 6 \}$

Les nombres de la forme $9q + r$ avec $r \in \{0 ; 3 ; 6\}$ sont multiples de 3.

Ce qui prouve l'équivalence.

Précision des rédactions de cet exercice :

Ne confondez pas l'entier n et son reste dans la division par 9.

Nommez différemment le reste …. $n \equiv r$ (9) n'est pas une égalité entre n et r mais une égalité qui s'écrit :

$n = 9 \times q + r$ où q est un entier.

Pour l'équivalence, prenez le temps lors de la recherche de poser les deux implications.

Implication 1 : Si $n^6 - 1$ est divisible par 9 alors n n'est pas divisible par 3.

qui peut se remplacer par sa contraposée :

Si n est divisible par 3 alors $n^6 - 1$ n'est pas divisible par 9.

Implication 2 : Si n n'est pas divisible par 3 alors $n^6 - 1$ est divisible par 9.

qui peut se remplacer par sa contraposée :

Si $n^6 - 1$ n'est pas divisible par 9 alors n est divisible par 3.

Par exemple, ceux qui ont dit :

Si n n'est pas divisible par 3 alors $n^6 - 1$ est divisible par 9.
et

Si $n^6 - 1$ n'est pas divisible par 9 alors n est divisible par 3

n'ont pas traité l'équivalence mais seulement l'implication 2.

Certains ont pensé à des raisonnements **par l'absurde :**

On aurait :

Implication 1 : Si $n^6 - 1$ est divisible par 9 alors n n'est pas divisible par 3.

Par l'absurde, on se donne : $n^6 - 1$ est divisible par 9 ET n est divisible par 3.

À partir de ces données, on montre une contradiction.

Implication 2 : Si n n'est pas divisible par 3 alors $n^6 - 1$ est divisible par 9.

Par l'absurde, on se donne : n n'est pas divisible par 3 ET $n^6 - 1$ est divisible par 9.

À partir de ces données, on montre une contradiction.