Exercice 1 Implication, réciproque, contraposée .... 4 points

1) a) Démontrer l'implication suivante :

Si un nombre entier n est de la forme $6k - 3$ avec $k \in \mathbb{Z}$ alors il est nécessairement de la forme $3q$ où $q \in \mathbb{Z}$.

b) Étudier la réciproque de cette implication.

c) Pourquoi la phrase suivante est-elle vraie ?

n, q et k étant des entiers,

si un nombre n n'est pas de la forme $3q$ alors n n'est pas de la forme $6k - 3$.

2) Soit E l'ensemble des entiers relatifs qui peuvent s'écrire de la forme $3k + 1$ où $k \in \mathbb{Z}$.

Autrement dit : $E = \{3k + 1/ \, k \in \mathbb{Z}\}$

Montrer que le carré d'un élément de E est un élément de E.

Exercice 2 Congruences, puissance, disjonction des cas 3 points

x et y sont deux entiers tels que $x \equiv 2\ [7]$ et $y \equiv 3\ [7]$

a) Justifier que $y = 7q + 3$ où $q \in \mathbb{Z}$.

b) En déduire les restes de x^y dans la division euclidienne par 7.

Exercice 3 Utilisation d'une propriété ... 3 points

Rappel de la propriété : (identité de Bezout)

Deux nombres a et b sont premiers entre eux si et seulement si il existe deux entiers u et v tels que $au + bv = 1$

En utilisant cette propriété :

Montrer que

si $x + y$ et xy sont premiers entre eux alors x et y sont premiers entre eux.

Exercice 4 Matrice de transition 3 points

Une fourmi parcourt inlassablement les côtés d'un triangle équilatéral ABC en partant de A, et, en mettant 1 minute pour parcourir un côté.

Arrivée à un sommet, elle choisit au hasard l'un des deux côtés issus de ce sommet.

On classe les sommets dans l'ordre alphabétique.

L'état probabiliste initial est noté $P_0\ (1\ \ 0\ \ 0)$

Écrire la matrice de transition M de ce processus. (Justifier les coefficients de la première ligne).

On note $P_n = P_0 \ M^n$ où $n \in \mathbb{N}$.

(*Utilisation de la calculatrice permise pour les calculs à suivre*)

Calculer P_1 et P_2.

Que représente P_n. ?

Déterminer l'état probabiliste au bout de 5 minutes.

Exercice 5 Matrice et récurrence 3 points

Soit $J = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Montrer que $J^2 = 2J$. (calculs " à la main ")

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, montrer par récurrence que $J^n = 2^{n-1} J$.

Exercice 6 calcul matriciel et interprétation des résultats 4 points

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ et $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ (matrice identité d'ordre 2)

Déterminer la matrice J telle que $A = I + J$.

Montrer que $J^2 = -I$. (calculs " à la main ")

On pose $B = \dfrac{1}{2}(I - J)$.

Calculer AB et BA.

Que représente B pour A ?

Au cas où il reste du temps ......

Exercice 7 Système d'équations linéaires

Un triathlon comprend un parcours de natation (de longueur n), suivi d'un parcours à vélo (de longueur v) et un parcours de course à pied (de longueur p).

La distance totale est de 32 km, le parcours à pied dépasse celui de natation de 8,8 km et, celui à vélo est deux fois plus long que celui de course à pied.

Justifier que $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} n \\ p \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 32 \\ 8{,}8 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Déterminer les longueurs n, p et v.

Exercice 8 Évident !

x et y sont deux **entiers**.
Montrer que l'équation $x^2 + y^2 = 3$ n'a aucune solution.

DM7 à rendre jeudi 17 janvier 2013 :

problème 5 page 17, problème 2 page 94

DM8 à rendre jeudi 24 janvier 2013 :

Problème 4 page 62 (le problème est relativement long, n'attendez pas pour commencer ....

Pour la question B.1, vous pouvez utiliser la propriété admise en B.3)