Exercice 1 Implication, réciproque, contraposée .... 4 points

1) a) Démontrer l'implication suivante :

Si un nombre entier n est de la forme 6k – 3 avec k ∈ ℤ alors il est nécessairement de la forme 3q où q ∈ ℤ.

Soit $n = 6k - 3$ avec $k \in \mathbb{Z}$

Comme $6k - 3 = 3(2k - 1)$, on a, en posant : $q = 2k - 1$, $n = 3q$, et, $q \in \mathbb{Z}$.

Autre méthode :

Soit $n = 6k - 3$ avec $k \in \mathbb{Z}$ d'où $n \equiv 0$ (modulo 3) puisque $6 \equiv 0$ (3) et $-3 \equiv 0$ (3).

$n \equiv 0$ (modulo 3) signifie que $n = 3q$ avec $q \in \mathbb{Z}$.

b) Étudier la réciproque de cette implication.

La réciproque est fausse.

Il suffit de prendre un multiple pair de 3 (multiple de 6) puisque d'après a), q est impair.

Contre-exemple : $12 = 3\times4$ mais $12 = 6k - 3$ avec k entier est impossible.

c) Pourquoi la phrase suivante est-elle vraie ?

n, q et k étant des entiers,

si un nombre n n'est pas de la forme 3q alors n n'est pas de la forme 6k – 3.

cette phrase est la contraposée de l'implication du a).

Comme l'implication est vraie, sa contraposée est vraie.

2) *Soit E l'ensemble des entiers relatifs qui peuvent s'écrire de la forme 3k + 1 où k ∈ ℤ.*

Autrement dit : $E = \{3k + 1 / k \in \mathbb{Z}\}$

Montrer que le carré d'un élément de E est un élément de E.

Soit $n = 3k + 1$ avec $k \in \mathbb{Z}$.

$n^2 = 9k^2 + 6k + 1 = 3(3k^2 + 2k) + 1$

Comme $3k^2 + 2k \in \mathbb{Z}$, $n^2 \in E$.

Autre méthode :

Soit $n \in E$. E est l'ensemble des entiers dont le reste dans la division euclidienne par 3 est 1.

On a alors $n \equiv 1$ (modulo 3).

On a donc : $n^2 \equiv 1^2 \equiv 1$ (3)

ce qui prouve que $n^2 \in E$.

Exercice 2 Congruences, puissance, disjonction des cas 3 points

x et y sont deux entiers tels que $x \equiv 2$ [7] et $y \equiv 3$ [7]

a) Justifier que $y = 7q + 3$ où $q \in \mathbb{Z}$.

Par définition des congruences, le reste de la division euclidienne de y par 7 est 3, ce qui s'écrit :
$y = 7q + 3$ où $q \in \mathbb{Z}$.
ou encore :
par définition des congruences, y et 3 ont le m^me reste dans la division euclidienne par 7.
Comme $0 \leqslant 3 < 7$, le reste est 3, et, on obtient : $y = 7q + 3$ où $q \in \mathbb{Z}$.

b) En déduire les restes de x^y dans la division euclidienne par 7.

$x^y \equiv 2^{(7q+3)}$ (7)

$2^{(7q+3)} = (2^7)^q \times 2^3$ $\quad 2^3 = 8$ et $8 \equiv 1$ (7)

$2^7 = 128$ et $128 \equiv 2$ (7)

d'où, d'après les propriétés des congruences, $2^{(7q+3)} \equiv 2^q$ (7)
si $q = 0$, le reste est 1
Si $q = 1$, le reste est 2
Si $q = 2$ le reste est 4
si $q = 3$, le reste est 1, on retrouve successivement les restes 1, 2 et 4
Conclusion : $y = 7q + 3$ et $q = 3k$, le reste de x^y dans la division euclidienne par 7 est 1.
$y = 7q + 3$ et $q = 3k + 1$, le reste de x^y dans la division euclidienne par 7 est 2.
$y = 7q + 3$ et $q = 3k + 2$, le reste de x^y dans la division euclidienne par 7 est 4.

Exercice 3 Utilisation d'une propriété ... 3 points

Rappel de la propriété : (identité de Bezout)
Deux nombres a et b sont premiers entre eux si et seulement si il existe deux entiers u et v tels que au + bv = 1
En utilisant cette propriété :
Montrer que
si x + y et xy sont premiers entre eux alors x et y sont premiers entre eux.

Puisque $x + y$ et xy sont premiers entre eux, il existe deux entiers u et v tels que $u(x + y) + v(xy) = 1$.
Or, $u(x + y) + v(xy) = (u + vy)x + uy$ (ou $u(x + y) + v(xy) = ux + (u + vx) y$)
Comme $u(x + y) + v(xy) = 1$, il existe deux entiers : u' et v' tels que $u'x + v'y = 1$
Selon le développement choisi : $u' = u + vy$ *et* $v' = u$ ou $u' = u$ et $v' = u + v x$
Puisqu'il existe deux entiers u' et v' tels que $u'x + v'y = 1$, x et y sont premiers entre eux.

(illustration des calculs sur un exemple numérique : $x = 22$ et $y = 15$
la somme est 37 et le produit est 330.
recherche des coefficients u et v possibles : $330 = 37 \times 8 + 34$

$37 = 34 \times 1 + 3$

$34 = 3 \times 11 + 1$

En " remontant " : $1 = 34 - 3\times 11 = 34 - (37 - 34)\times 11 = 34\times 12 - 37\times 11 = (330 - 8\times 37)\times 12 - 37\times 11$

$1 = 330\times 12 - 37\times 107$

$u = -107$ *et* $v = 12$
$u' = -107 + 12\times 15 = 73$ *et* $v' = -107$ $\quad (73\times 22 - 107\times 15 = 1)$
autre possibilité : $u' = -107$ *et* $v' = -107 + 12\times 22 = 157$ $\quad (-107\times 22 + 157\times 15 = 1)$

Complément : étude de la réciproque

Si x et y sont premiers entre eux alors $x + y$ et xy sont premiers entre eux.
Hypothèse : x et y sont premiers entre eux d'où, il existe u et v entiers tels que $u\,x + v\,y = 1$
Écrivons $v = u + w$ ($w = v - u$ est un entier)

$u\,x + v\,y = 1$ équivaut à $\begin{cases} v = u + w \\ u(x+y) + wy = 1 \end{cases}$

$u\,x + v\,y = 1$ équivaut à $\begin{cases} u = v - w \\ -wx + v(x+y) = 1 \end{cases}$

On en déduit : $[u(x+y)+wy][-wx+v(x+y)] = 1\times 1 = 1$
En développant : $u(x+y)(-wx)+u(x+y)v(x+y)+(wy)(-wx)+(wy)v(x+y)=1$,
soit : $[-wux+uv(x+y)+vwy](x+y)+(-w^2)(xy)=1$
On pose : $-wux+uv(x+y)+vwy = u'$ et $-w^2 = w'$ u' et v' sont des entiers.
Il existe un couple d'entiers (u', v') tel que $u'(x + y) + v'xy = 1$
Conclusion : $(x + y)$ et (xy) sont premiers entre eux.
Illustration numérique :
Prenons $x = 3$ et $y = 5$ On a : $7\times 3 + (-4)\times 5 = 1$ $u = 7$ et $v = -4$
L'objectif est de montrer que $3 + 5 = 8$ et $3\times 5 = 15$ sont premiers entre eux à partir de cette donnée.

Posons : $w = -4 - 7 = -11$ On a : $7\times(3 + 5) + (-11)\times 5 = 1$
et $11\times 3 + (-4)(3 + 5) = 1$
ou encore : $7\times 8 + (-11)\times 5 = 1$ et $11\times 3 + (-4)\times 8 = 1$
Par produit : $7\times 8\times 11\times 3 + 7\times 8\times(-4)\times 8 + (-11)\times 5\times 11\times 3 + (-11)\times 5\times(-4)\times 8 = 1$
En factorisant 8, on a : $[7\times 11\times 3 + 7\times 8\times(-4) + (-11)\times 5\times(-4)]\times 8 = 227\times 8$
et $(-11)\times 5\times 11\times 3 = -121\times 15$
$u' = 227$, $v' = -121$ et $227*8 - 121*15 = 1$

Exercice 4 Matrice de transition 3 points

Une fourmi parcourt inlassablement les côtés d'un triangle équilatéral ABC en partant de A, et, en mettant 1 minute pour parcourir un côté.

Arrivée à un sommet, elle choisit au hasard l'un des deux côtés issus de ce sommet.

On classe les sommets dans l'ordre alphabétique.

L'état probabiliste initial est noté P_0 $(1\ \ 0\ \ 0)$

Écrire la matrice de transition M de ce processus. (Justifier les coefficients de la première ligne).
La première ligne indique dans l'ordre les probabilités suivantes : $P_A(A)$, $P_A(B)$ et $P_A(C)$.

D'après l'énoncé $P_A(A) = 0$, $P_A(B) = \frac{1}{2}$ et $P_A(C) . = \frac{1}{2}$

La matrice $M = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$

On note $P_n = P_0\ M^n$ où $n \in \mathbb{N}$.
(*Utilisation de la calculatrice permise pour les calculs à suivre*)
Calculer P_1 et P_2 .

$$P_1 = (1\ \ 0\ \ 0)\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} = (0\ \ \frac{1}{2}\ \ \frac{1}{2})$$

$$P_2 = (0\ \ \frac{1}{2}\ \ \frac{1}{2})\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} = (\frac{1}{2}\ \ \frac{1}{4}\ \ \frac{1}{4})$$

Que représente P_n *. ?*

$P_n = (a\ \ b\ \ c)$ avec $a + b + c = 1$

P_n indique dans l'ordre suivant : la probabilité a que la fourmi soit au sommet A après n minutes,
la probabilité b que la fourmi soit au sommet B après n minutes,
la probabilité c que la fourmi soit au sommet C après n minutes,

Déterminer l'état probabiliste au bout de 5 minutes.

$$P_5 = (1\ \ 0\ \ 0)\ M^5 = (\frac{5}{16}\ \ \frac{11}{32}\ \ \frac{11}{32})$$

Exercice 5 Matrice et récurrence 3 points

Soit $J = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Montrer que $J^2 = 2J$. *(calculs " à la main ")*

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\times1+1\times1 & 1\times1+1\times1 \\ 1\times1+1\times1 & 1\times1+1\times1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} = 2J.$$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$*, montrer par récurrence que* $J^n = 2^{n-1} J$.

La propriété est initialisée par le calcul précédent.

Soit un entier n non nul tel que $J^n = 2^{n-1} J$.

En multipliant les deux membres par J, on a : $J^{n+1} == 2^{n-1} J^2 == 2^{n-1} 2J = 2^n J$.

L'hérédité de la proposition est démontrée.

d'après l'axiome de récurrence la propriété est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

Commentaires :

L'étape " hérédité " est une étape où on démontre une implication

Si la propriété est vraie en l'entier n alors elle est vraie à l'entier n + 1

On pose donc en hypothèse : $J^n = 2^{n-1} J$.

À partir de cette hypothèse, on cherche comment l'égalité se transmet au rang n + 1.
Et, lorsque au rang n + 1, on trouve la même égalité, on peut conclure ....
mais, il ne faut surtout pas poser l'égalité avant de l'avoir démontrée.

Ici, en multipliant, chaque membre de l'égalité $J^n = 2^{n-1} J$ *par J on conserve une égalité.*
Il reste à étudier le deuxième membre de l'égalité pour ***montrer*** *qu'il vaut ce qui est attendu ...*

Exercice 6 calcul matriciel et interprétation des résultats 4 points

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ et $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ (matrice identité d'ordre 2)

Déterminer la matrice J telle que A = I + J.

$J = A - I = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$

Montrer que $J^2 = -I$. (calculs " à la main ")

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0+1\times(-1) & 0\times1+1\times0 \\ -1\times0+0\times(-1) & -1\times1+0\times0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = -I.$$

On pose $B = \frac{1}{2}(I - J)$.

Calculer AB et BA.

$AB = (I + J)\times \frac{1}{2}(I - J) = \frac{1}{2}(I^2 - IJ + JI - J^2)$

Comme I est la matrice identité : $I^2 = I$, $IJ = JI = J$

d'où, $AB = \frac{1}{2}(2I) = I$.

$BA = \frac{1}{2}(I - J)(I + J) = I$ (Mêmes propriétés)

Que représente B pour A ?

B est la matrice inverses de A.

Au cas où il reste du temps ......

Exercice 7 Système d'équations linéaires

Un triathlon comprend un parcours de natation (de longueur n), suivi d'un parcours à vélo (de longueur v) et un parcours de course à pied (de longueur p).

La distance totale est de 32 km, le parcours à pied dépasse celui de natation de 8,8 km et, celui à vélo est deux fois plus long que celui de course à pied.

Justifier que $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} n \\ p \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 32 \\ 8{,}8 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Déterminer les longueurs n, p et v.

La traduction de l'énoncé mène aux équations :

$n + p + v = 32$

$p = n + 8{,}8$, soit : $-n + p + 0v = 8{,}8$

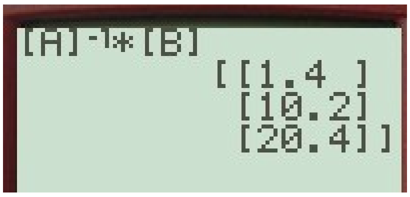
$v = 2p$, soit : $0n - 2p + v = 0$

D'où, le système d'équations linéaires : $\begin{cases} n+p+v=32 \\ -n+p+0v=8{,}8 \\ 0n-2p+v=0 \end{cases}$ qui est équivalent à $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} n \\ p \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 32 \\ 8{,}8 \\ 0 \end{pmatrix}$.

On note $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 32 \\ 8{,}8 \\ 0 \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} n \\ p \\ v \end{pmatrix}$

$X = A^{-1}B$

La calculatrice donne : $\begin{pmatrix} 1{,}4 \\ 10{,}2 \\ 20{,}4 \end{pmatrix}$



le parcours de natation : 1,4 km, le parcours à pied : 10,2 km, le parcours à vélo : 20,4 km

---

Exercice 8 Évident !

*x et y sont deux **entiers**.*
Montrer que l'équation $x^2 + y^2 = 3$ n'a aucune solution.

$x^2 \geqslant 0$ et $y^2 \geqslant 0$
Donc : $0 \leqslant y^2 \leqslant 3$ (ou $0 \leqslant x^2 \leqslant 3$)
Le seul carré entre 0 et 3 est 1.
Si $y^2 = 1$ alors $x^2 = 2$. x n'est pas entier.
L'équation n'a aucune solution dans les entiers.

DM7 à rendre jeudi 17 janvier 2013 :

problème 5 page 17, problème 2 page 94

DM8 à rendre jeudi 24 janvier 2013 :

Problème 4 page 62 (le problème est relativement long, n'attendez pas pour commencer ....
Pour la question B.1, vous pouvez utiliser la propriété admise en B.3)