Matrices

Exercice 1 : **Question de cours :**

Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ *une matrice carrée d'ordre 2. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que A soit inversible.*

A est inversible si et seulement si $ad - bc \neq 0$ (dét(A) $\neq 0$)

Exercice 2 : ***des calculs***

Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$ *et x un nombre réel.*

I_2 est la matrice identité d'ordre 2.

1) On pose $B = A - xI_2$.

Écrire B en fonction de x.

$B = \begin{pmatrix} 2-x & 3 \\ 1 & 4-x \end{pmatrix}$

2) a) Résoudre dans $\mathbb{R}$*, l'équation d'inconnue x,* $(2-x)(4-x)-3=0$ *(E).*

$(2-x)(4-x)-3=0$ si et seulement si $x^2 - 6x + 5 = 0$ (Second degré ….)

Le solutions $\alpha = 1$ et $\beta = 5$

Remarquer : dét(B) $= (2-x)(4-x) - 1\times 3$

b) On note α *et* β *les solutions de l'équation (E).*

Montrer que pour ces deux valeurs α *et* β*, la matrice B n'est pas inversible.*

Dans le cas où $x = \alpha$ ou $x = \beta$, le déterminant de B est nul.

B n'est pas inversible dans ces deux cas.

Complément : La recherche des réels (ou des complexes) x tels que $B = A - xI_n$ et B n'est pas inversible amène systématiquement à la recherche des racines d'un polynôme de degré n.

Dans le cas où l'ordre des matrices carrées est 2, on obtient un polynôme du second degré.

3) On pose $P = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$.

À la calculatrice, calculer PDP^{-1}.

Le calcul donne A.

Vocabulaire :

1 et 5 sont les valeurs propres de la matrice A.

V = $\begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix}$ est un vecteur propre associé à la valeur propre 1. Il vérifie la propriété suivante : $AV = 1.V$

W = $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ est un vecteur propre associé à la valeur propre 5. Il vérifie la propriété suivante : $AW = 5.W$.

D est la matrice diagonale de A.

A est une matrice diagonalisable si et seulement si il existe une matrice inversible P et une matrice diagonale D telles que PDP^{-1}

Exercice 3 ***un système***

Soit le système (Σ) de trois équations à trois inconnues : (Σ) : $\begin{cases} 2x+3y-z=1 \\ x-y+z=1 \\ y+z=1 \end{cases}$.

On pose $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ *et* $P = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

1) Déterminer la matrice A telle que l'écriture matricielle du système (Σ) est : AX = P.

Posons $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

On a bien : AX = P

2) En déduire (à l'aide de la calculatrice), la matrice S donnant les solutions du système (Σ).

En multipliant à gauche par A^{-1}, on obtient $S = A^{-1}P = \begin{pmatrix} 0,5 \\ 0,25 \\ 0,75 \end{pmatrix}$

Le triplet (0,5 ; 0,25 ; 0,75) est le triplet solution du système (Σ).

on peut " contrôler " $\begin{cases} 2\times 0,5+3\times 0,25-0,75=1 \\ 0,5-0,25+0,75=1 \\ 0,25+0,75=1 \end{cases}$

Diviseurs- PGCD

Exercice4

1) Décomposer 60 en un produit de facteurs premiers.

$60 = 2\times 30 = 2\times 2\times 15 = 2\times 2\times 3\times 5 = 2^2\times 3\times 5$.

2) En déduire le nombre de diviseurs de 60.

60 possède donc : $(2+1)\times 2\times 2 = 12$ diviseurs.

Il n'est pas nécessaire de les écrire … mais, on sait qu'un diviseur de 60 s'écrira :

$2^{\alpha}\times 3^{\beta}\times 5^{\gamma}$ avec $\alpha \in \{0 ; 1 ; 2\}$, $\beta \in \{0 ; 1\}$; $\gamma \in \{0 ; 1\}$.

Exercice 5

Soit $n \in \mathbb{N}$.

On pose $a = 2n^2 + n + 1$ *et* $b = n^2 + n + 1$.

la seule propriété utile aux trois premières questions : Si d divise a et d divise b alors d divise toute combinaison linéaire à coefficients entier de a et b.

1) Montrer que si d est un diviseur commun de a et b alors d est un diviseur de n + 1.

d divise *a* et *d* divise *b*, donc, *d* divise $a - 2b = n + 1$

2) Montrer que si d est un diviseur commun de a et b alors d est un diviseur de n².

d divise a et d divise b, donc, d divise $a - b = n^2$

3) Montrer que si d est un diviseur commun de n² et n + 1 alors d vaut 1.

d divise n^2 et d divise $n + 1$ donc d divise $n^2 - (n+1)\times(n-1) = 1$

4) Quel est le PGDC(a ; b) ? justifier.

D'après ce qui précède le seul diviseur commun à a et à b est 1.

PGDC(a ; b) = 1.

Commentaires et compléments:

***Écrire "*si d est un diviseur commun de a et b alors d est un diviseur de n + 1* "

ne signifie pas que

$(n + 1)$ est un diviseur de a et b .

Mais, on montre ainsi que les diviseurs communs de a et b sont parmi les diviseurs de $n + 1$.

Si vous cherchez à diviser a et b par $n + 1$, vous ne pourrez pas aboutir, et, la dernière question montre que $n + 1$ n'est pas un diviseur commun à a et b.

*** L'exercice pourrait être fait en une seule étape …. en trouvant deux entiers x et y tels que

$xa + yb = 1$ (suite au prochain cours : identité de Bézout).

En posant $x = n$ et $y = 2n + 1$, on obtient : $n(2n^2 + n + 1) - (2n - 1)(n^2 + n + 1) =$

$2n^3 + n^2 + n - 2n^3 - 2n^2 - 2n + n^2 + n + 1 = 1$

par conséquent, si d est un diviseur commun à a et à b, nécessairement d divise 1.