EXERCICE 4 : (5 points) ***Candidats AYANT SUIVI l'enseignement de spécialité mathématiques***

Un opérateur téléphonique A souhaite prévoir l'évolution du nombre de ses abonnés dans une grande ville par rapport à son principal concurrent B à partir de 2013.

En 2013, les opérateurs A et B ont chacun 300 milliers d'abonnés.

Pour tout entier naturel *n*, on note a_n le nombre d'abonnés, en milliers, de l'opérateur A la *n*-ième année après 2013, et b_n le nombre d'abonnés, en milliers, de l'opérateur B la *n*-ième année après 2013.
Ainsi $a_0 = 300$ et $b_0 = 300$.

Des observations réalisées les années précédentes conduisent à modéliser la situation par la relation suivante :

pour tout entier naturel n, $\begin{cases} a_{n+1} = 0{,}7a_n + 0{,}2b_n + 60 \\ b_{n+1} = 0{,}1a_n + 0{,}6b_n + 70 \end{cases}$.

On considère les matrices $M = \begin{pmatrix} 0{,}7 & 0{,}2 \\ 0{,}1 & 0{,}6 \end{pmatrix}$ et $P = \begin{pmatrix} 60 \\ 70 \end{pmatrix}$.

Pour tout entier naturel *n*, on note U_n la matrice $\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix}$.

1. *a.* Déterminer U_1.
   b. Vérifier que, pour tout entier naturel *n*, $U_{n+1} = M \times U_n + P$.

2. On note I la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.
   a. Calculer $(I - M) \times \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$.
   b. En déduire que la matrice $I - M$ est inversible et préciser son inverse.
   c. Déterminer la matrice U telle que $U = M \times U + P$.

3. Pour tout entier naturel *n*, on pose $V_n = U_n - U$.
   a. Justifier que, pour tout entier naturel *n*, $V_{n+1} = M \times V_n$.
   b. En déduire que, pour tout entier naturel *n*, $V_n = M^n \times V_0$.

4. On admet que, pour tout entier naturel *n*, $V_n = \begin{pmatrix} \dfrac{-100}{3} \times 0{,}8^n - \dfrac{140}{3} \times 0{,}5^n \\ \dfrac{-50}{3} \times 0{,}8^n + \dfrac{140}{3} \times 0{,}5^n \end{pmatrix}$.
   a. Pour tout entier naturel *n*, exprimer U_n en fonction de *n* et en déduire la limite de la suite (a_n).
   b. Estimer le nombre d'abonnés de l'opérateur A à long terme.

Correction :

Énoncé :

Un opérateur téléphonique A souhaite prévoir l'évolution du nombre de ses abonnés dans une grande ville par rapport à son principal concurrent B à partir de 2013.

En 2013*, les opérateurs A et B ont chacun* 300 *milliers d'abonnés.*

Pour tout entier naturel n, on note a_n*, le nombre d'abonnés, en milliers, de l'opérateur A la n-ième année après* 2013*, et* b_n *le nombre d'abonnés, en milliers, de l'opérateur B la n-ième année après* 2013.

Ainsi $a_0 = 300$ *et* $b_0 = 300$.

Des observations réalisées les années précédentes conduisent à modéliser la situation par la relation suivante:

pour tout entier naturel n, $\begin{cases} a_{n+1} = 0{,}7\,a_n + 0{,}2\,b_n + 60 \\ b_{n+1} = 0{,}1\,a_n + 0{,}6\,b_n + 70 \end{cases}$

On considère les matrices $M = \begin{pmatrix} 0{,}7 & 0{,}2 \\ 0{,}1 & 0{,}6 \end{pmatrix}$ *et* $P = \begin{pmatrix} 60 \\ 70 \end{pmatrix}$

Pour tout entier naturel n, on note U_n*, la matrice* $\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix}$.

1. a. Déterminer U_1

on sait : $\begin{cases} a_1 = 0{,}7\,a_0 + 0{,}2\,b_0 + 60 \\ b_1 = 0{,}1\,a_0 + 0{,}6\,b_0 + 70 \end{cases}$,

comme $a_0 = 300$ et $b_0 = 300$, on obtient :

$a_1 = 0{,}7\times300 + 0{,}2\times300 + 60 = 0{,}9\times300 + 60 = 270 + 60 = 330$

$b_1 = 0{,}1\times300 + 0{,}6\times300 + 70 = 0{,}7\times300 + 70 = 280$

Conclusion : $U_1 = \begin{pmatrix} 330 \\ 280 \end{pmatrix}$

b. Vérifier que, pour tout entier naturel n, $U_{n+1} = M\times U_n + P$

Commentaires et méthode :

*** Comme pour la plupart des égalités à démontrer du type X = Y, on montre :

X = …. = Y

ou

Y = …. = X

ou

X = …. = Z et Y = …. = Z

ou

X – Y = …. = 0

*** Attention, ce ne sont pas des réels ….

S'il est possible de faire des analogies **pour les démarches** entre l'ensemble des matrices et l'ensemble des réels, il n'est pas possible de faire les mêmes calculs puisque les propriétés des opérations sont différentes.

Retour à l'exercice :

Pour tout entier naturel *n*,

$$M\times U_n + P = \begin{pmatrix} 0,7 & 0,2 \\ 0,1 & 0,6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 60 \\ 70 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 0,7\times a_n + 0,2\,b_n \\ 0,1\times a_n + 0,6\times b_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 60 \\ 70 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0,7\times a_n + 0,2\,b_n + 60 \\ 0,1\times a_n + 0,6\times b_n + 70 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \end{pmatrix} = U_{n+1}\,. \qquad \text{CQFD.}$$

2) On note I la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

a. Calculer (I – M)× $\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$

$$I - M = \begin{pmatrix} 0,3 & -0,2 \\ -0,1 & 0,4 \end{pmatrix}$$

$$(I - M)\times \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,3 & -0,2 \\ -0,1 & 0,4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0,3\times 4 - 0,2\times 1 & 0,3\times 2 - 0,2\times 3 \\ -0,1\times 4 + 0,4\times 1 & -0,1\times 2 + 0,4\times 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

b. En déduire que la matrice I – M est inversible et préciser son inverse.

rappel du cours :

Définition :

Une matrice carrée *A* d'ordre *n* est dite inversible (ou régulière) lorsqu'il existe une matrice carrée *A'* d'ordre *n* telle que $AA' = I_n$ et $A'A = I_n$ où I_n est la matrice identité d'ordre *n*.

Propriétés :

1) S'il existe une matrice *A'* telle que l'une des égalités $AA' = I_n$ ou $A'A = I_n$ est vraie alors l'autre est vraie.

(Il suffit donc d'une seule des égalités pour prouver qu'une matrice est inversible.)

2) unicité de l'inverse

Si une matrice *A* est inversible alors la matrice *A'* telle que $AA' = I_n$ est unique.

Retour à l'exercice :

On pose $B = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$.

Soit on calcule *B*(*I* – *M*) et on montre que *B*(*I* – *M*) = *I*,

soit on rappelle la propriété 1/

Puisque qu'il existe une matrice B telle que $(I - M)B = I$, la matrice $I - M$ est inversible et l'inverse de $I - M$ est $B = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$.

On a aussi : $B\times(I - M) = I$.

Important puisqu'en général le produit de matrices n'est pas commutatif.

c. Déterminer la matrice U telle que $U = M\times U + P$.

***Commentaires et méthode** :*

*** Analogie de démarches :

on résout une équation du premier degré d'inconnue (peu importe la lettre représentant l'inconnue).

Si on avait dans les réels : Déterminer x tel que $x = \mathrm{M}x + \mathrm{P}$

soit : $(1 - \mathrm{M})x = \mathrm{P}$

La solution existe si et seulement si il existe un inverse de 1 – M et on multiplie les deux membres par cet inverse.

*** Dans les réels, on parle de " diviser par ... "

*** Dans l'ensemble des matrices, il n'y a pas de division (comme en arithmétique avec les congruences) …

Il n'y a que : l'existence d'un inverse et la multiplication par cet inverse.

Retour à l'exercice :

$U = M\times U + P \Leftrightarrow U - M\times U = P \Leftrightarrow (I - M)\times U = P$

On en déduit que : $B\times(I - M)\times U = B\times P$. *(L'utilité de savoir que $B\times(I - M) = (I - M)\times B = I$)*

D'où, $U = B\times P = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 60 \\ 70 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4\times60+2\times70 \\ 1\times60+3\times70 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 380 \\ 270 \end{pmatrix}$

3) Pour tout entier naturel n, on pose $V_n = U_n - U$

a. Justifier que, pour tout entier naturel n, $V_{n+1} = M\times V_n$

Soit un entier naturel n,

par définition de la suite (V_n), $V_{n+1} = U_{n+1} - U$.

Comme $U_{n+1} = M\times U_n + P$, $V_{n+1} = M\times U_n + P - U$

Or, $U = M\times U + P$.

On a alors : $V_{n+1} = M\times U_n + P - (M\times U + P)$

$= M\times U_n - M\times U$

$= M\times(U_n - U) = M\times V_n$

Conclusion : pour tout entier naturel n, $V_{n+1} = M\times V_n$

b. En déduire que, pour tout entier naturel n, $V_n = M^n V_0$.

Démonstration par récurrence.

Pour tout entier naturel *n*, soit la proposition P_n : $V_n = M^n V_0$.

Démontrons que la proposition est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Initialisation :

$n = 0$ Comme $M^0 = I$, on a l'égalité $V_0 = M^0 V_0$

P_0 est vraie

Hérédité :

Soit un entier naturel *n* tel que P_n est vérifiée.

On a donc : $V_n = M^n V_0$. (Hypothèse de récurrence)

Or, $V_{n+1} = M \times V_n$ d'après 3a)

d'où, $V_{n+1} = M \times M^n V_0$ d'après l'hypothèse de récurrence

$= M^{n+1} V_0$.

P_{n+1} est vérifiée.

On a montré : P_0 vraie et $P_n \Rightarrow P_{n+1}$

Conclusion :

D'après l'axiome de récurrence, la proposition P_n est vraie pour tout entier naturel *n*.

4. On admet que, pour tout entier naturel n, $V_n = \begin{pmatrix} \frac{-100}{3} \times 0{,}8^n - \frac{140}{3} \times 0{,}5^n \\ \frac{-50}{3} \times 0{,}8^n + \frac{140}{3} \times 0{,}5^n \end{pmatrix}$

a. Pour tout entier naturel n, exprimer U_n *en fonction de n et en déduire la limite de la suite* (a_n).

Pour tout entier naturel *n*, $V_n = U_n - U$ et $U = \begin{pmatrix} 380 \\ 270 \end{pmatrix}$,

d'où, $U_n = V_n + U = \begin{pmatrix} \frac{-100}{3} \times 0{,}8^n - \frac{140}{3} \times 0{,}5^n + 380 \\ \frac{-50}{3} \times 0{,}8^n + \frac{140}{3} \times 0{,}5^n + 270 \end{pmatrix}$

On a donc : pour tout entier naturel *n*, $a_n = \frac{-100}{3} \times 0{,}8^n - \frac{140}{3} \times 0{,}5^n + 380$

Comme $-1 < 0{,}8 < 1$ et $-1 < 0{,}5 < 1$, les suites géométriques $(0{,}8^n)$ et $(0{,}5^n)$ convergent vers 0 et par somme, la suite (a_n) converge vers 380.

b. Estimer le nombre d'abonnés de l'opérateur A à long terme.

On peut estimer le nombre d'abonnés de l'opérateur A à long terme à 380 000 abonnés