EXERCICE 4 Pour les candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité 5 points

Les quatre questions sont indépendantes.

1. a. Vérifier que le couple (4 ; 6) est une solution de l'équation (E) : $11x - 5y = 14$.
b. Déterminer tous les couples d'entiers relatifs $(x\ ;\ y)$ vérifiant l'équation (E).

2. a. Démontrer que, pour tout entier naturel n, $2^{3n} \equiv 1 \pmod 7$.
b. Déterminer le reste de la division euclidienne de 2011^{2012} par 7.

3. On considère l'algorithme suivant où Ent $\left(\dfrac{A}{N}\right)$ désigne la partie entière de $\dfrac{A}{N}$.

```
A et N sont des entiers naturels.
Saisir A
N prend la valeur 1.
Tant que N ⩽ √A .
        Si A/N – Ent(A/N) = 0 alors Afficher N et A/N .
        Fin si
N prend la valeur N + 1
Fin Tant que
```

Quels résultats affiche cet algorithme pour A = 12 ?
Que donne cet algorithme dans le cas général ?

4. Chaque mois, un institut de sondage donne la cote de popularité d'un même groupe politique dans l'opinion publique. Les personnes sondées sont, soit favorables, soit défavorables à ce groupe. Initialement, il y a autant de personnes favorables à ce groupe politique que de personnes qui lui sont défavorables. De chaque mois au mois suivant, on considère que :
– 10 %des personnes qui étaient favorables à ce groupe politique ne le sont plus.
– 15 % des personnes qui n'étaient pas favorables à ce groupe politique le deviennent.
On note, pour tout entier naturel n :
– a_n, la probabilité qu'une personne interrogée au hasard au bout de n mois soit favorable à ce groupe politique.
– b_n, la probabilité qu'une personne interrogée au hasard au bout de n mois ne soit pas favorable à ce groupe politique.
– $P_n = (a_n \quad b_n)$, la matrice traduisant l'état probabiliste au bout de n mois.
On note M la matrice de transition telle que, pour tout entier naturel n : $P_{n+1} = P_n \times M$.

a. Déterminer la matrice P_0 donnant l'état probabiliste initial.
b. Montrer que $M = \begin{pmatrix} 0{,}9 & 0{,}1 \\ 0{,}15 & 0{,}85 \end{pmatrix}$.
Déterminer la matrice P_2 en détaillant les calculs, (on donnera les coefficients sous forme décimale arrondie au centième).
c. Déterminer l'état stable. (c'est-à-dire : Déterminer P tel que $P = P \times M$).