Index

Problème 1 :

Astrid possède des jetons.

Elle sait qu'elle possède entre 250 et 300 jetons.

Elle fait des paquets de 11, il lui en reste 9.

Elle fait des paquets de 5, il lui en reste 2.

Problème 2 :

a est un entier relatif dont le reste dans la division euclidienne par 10 est 3.
b est un entier relatif dont le reste dans la division euclidienne par 10 est 2.
c est un entier relatif dont le reste dans la division euclidienne par 10 est 7.
Quels sont les restes dans la division euclidienne par 10 des entiers :
$a+b+c$; $a+b-c$; $a-b+c$; $a-b-c$; abc ; $ab+bc+ca$; $a^2+b^2+c^2$.

Solution du problème 1

Traduction du texte : les nombres n, q, q_1, k sont des **entiers**

nombre de jetons : n avec $250 \leqslant n \leqslant 300$

$n = 11q + 9$ et $n = 5q_1 + 2$ On peut écrire : $n \equiv 9\ (11)$ et $n \equiv 2\ (5)$

on obtient l'équation : $11q + 9 = 5q_1 + 2$ (*équation diophantienne*)

On cherche un cas particulier : (sans s'occuper de l'encadrement)

Par exemple, $q = 3$ donne $n = 42$ et $5\times8 + 2 = 42$ $q_1 = 8$

$11q + 9 = 5q_1 + 2$

$11\times3 + 9 = 5\times8 + 2$

Par différence membre-à-membre :

$11(q-3) = 5(q_1 - 8)$ On pose : $q - 3 = 5k$ d'où $q_1 - 8 = 11k$

On étudiera plus tard cette propriété ....

Finalement : $n = 11\times(5k+3) + 9 = 55k + 42$

Fin de l'exercice : Comme $250 \leqslant n \leqslant 300$, on résout : $250 \leqslant 55k + 42 \leqslant 300$ avec $k \in \mathbb{N}$.

soit : $208 \leqslant 55k \leqslant 258$ comme $\dfrac{208}{55} \approx 3{,}7$ ... et $\dfrac{258}{55} \approx 4{,}6$ ....

le seul entier k est 4

d'où, $n = 4\times55 + 42 = 262$

Vérification obligatoire : $262 = 11\times23 + 9$ et $262 = 5\times52 + 2$

Solution du problème 2

Le reste est un entier tel que $0 \leqslant r < 10$

a est un entier relatif dont le reste dans la division euclidienne par 10 est 3 : soit : $a \equiv 3\ (10)$
b est un entier relatif dont le reste dans la division euclidienne par 10 est 2 : soit : $b \equiv 2\ (10)$
c est un entier relatif dont le reste dans la division euclidienne par 10 est 7 : soit : $c \equiv 7\ (10)$

Reste de $a + b + c$ dans la division euclidienne par 10 : $3 + 2 + 7 \equiv 2\ (10)$

Reste de $a + b - c$ dans la division euclidienne par 10 : $3 + 2 - 7 \equiv 8\ (10)$

Reste de $a - b + c$ dans la division euclidienne par 10 : $3 - 2 + 7 \equiv 8\ (10)$

Reste de $a - b - c$ dans la division euclidienne par 10 : $3 - 2 - 7 \equiv 4\ (10)$

Reste de abc dans la division euclidienne par 10 : $3\times2\times7 \equiv 2\ (10)$

Reste de $ab + bc + ca$ dans la division euclidienne par 10 : $3\times2 + 2\times7 + 7\times3 \equiv 1\ (10)$

Reste de $a^2 + b^2 + c^2$ dans la division euclidienne par 10 : $3^2 + 2^2 + 7^2 \equiv 2\ (10)$