**Exercice** **(5 points)**

**(Pour les candidats ayant suivis l'enseignement de spécialité)**

**Partie I- Matrices et systèmes.**

Le plan est muni d'un repère orthonormal $(\mathrm{O};\vec{u},\vec{v})$.

On considère l'application $T$ dans le plan qui, à un point $M(x\,;y)$, associe le point $M'(x'\,;y')$ définie par le système : $\begin{cases} x'=-y+1 \\ y'=x-2 \end{cases}$

On note $z = x + \mathrm{i}y$ et $z' = x' + \mathrm{i}y'$ les affixes respectives de $M$ et de $M'$.

1) Montrer que $z' = \mathrm{i}z + 1 - 2\mathrm{i}$.

2) Soit $M_0\,(0\,;0)$ et $M_{n+1} = T(M_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Placer $M_0$, $M_1$, $M_2$, $M_3$ et $M_4$.

3) Résoudre le système $\begin{cases} x=-y+1 \\ \\ y=x-2 \end{cases}$. Interpréter géométriquement le résultat.

4) On pose $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, $X' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ et $U = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ et $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Vérifier que $X' = AX + U$ est l'écriture matricielle du système définissant l'application $T$.

5) Soit $B = I_2 - A$ et $C = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{-1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ où $I_2$ est la matrice identité d'ordre 2.

Calculer en écrivant tous les calculs le produit $BC$.

Que peut-on déduire de ce résultat pour $B$ et $C$ ? Justifier.

6) On pose $P = CU$, calculer $AP + U$.

Que représente ce résultat ?

**Partie II- Arithmétique .**

**Les questions 1) et 2) sont indépendantes**

1). Soit $n \in \mathbb{N}$, $a = 3n + 1$ et $b = 2n + 3$.

a) Soit $d$ un entier positif.
Montrer que si $d$ est un diviseur commun à $a$ et $b$ alors $d = 1$ ou $d = 7$

b) Montrer que le PGCD$(a\,;b)$ est égal à 7 si et seulement si $n$ est congru à 2 modulo 7.

2). On considère l'équation (E) : $3x - 5y = 1$ où $x$ et $y$ sont des entiers relatifs.

a) Justifier l'existence de solutions de cette équation (E).

b) Donner une solution évidente de (E).

c) Résoudre dans $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ l'équation (E).