Partie I- Matrices et systèmes.

Le plan est muni d'un repère orthonormal $(O ; \vec{u}, \vec{v})$.

On considère l'application T dans le plan qui, à un point M(x ; y), associe le point M ' (x' ; y') définie par le système : $\begin{cases} x' = -y+1 \\ y' = x-2 \end{cases}$

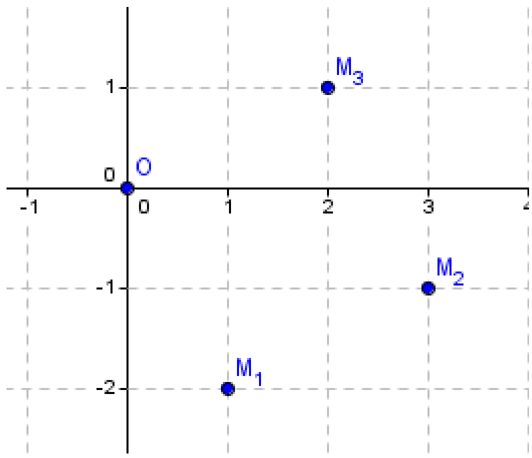
On note z = x + iy et z′ = x′ + iy′ les affixes respectives de M et de M′.

1) Montrer que z′ = iz + 1 – 2i.

$x' + iy' = -y + 1 + i(x-2)$
Or, $i^2 = -1$, d'où, $x' + iy' = i^2 y + 1 + i(x-2) = i(x+iy) + 1 - 2i$
Conclusion : $z' = iz + 1 - 2i$.

2) Soit M_0 *(0 ; 0) et* $M_{n+1} = T(M_n)$ *pour tout* $n \in \mathbb{N}$.

Placer M_0, M_1, M_2, M_3 *et* M_4.



M_1 (1 ; –2), M_2 (3 ; –1), M_3 (2 ; 1), M_4 (0 ; 0)

(on peut utiliser les affixes : $z_0 = 0$, $z_1 = 1 - 2i$, $z_2 = i(1-2i) + 1 - 2i = i + 2 + 1 - 2i = 3 - i$,

$z_3 = i(3-i) + 1 - 2i = 3i + 1 + 1 - 2i = 2 + i$, $z_4 = i(2+i) + 1 - 2i = 2i - 1 + 1 - 2i = 0$)

(on peut utiliser le système : $M_1 \begin{cases} -0+1=1 \\ 0-2=-2 \end{cases}$, $M_2 \begin{cases} -(-2)+1=3 \\ 1-2=-1 \end{cases}$, $M_3 \begin{cases} -(-1)+1=2 \\ 3-2=1 \end{cases}$, $M_4 \begin{cases} -1+1=0 \\ 2-2=0 \end{cases}$.)

3) Résoudre le système $\begin{cases} x = -y+1 \\ y = x-2 \end{cases}$. *Interpréter géométriquement le résultat.*

$$\begin{cases} x = -y+1 \\ y = x-2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -y+1 \\ y = -y+1-2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -y+1 \\ y = \dfrac{-1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{3}{2} \\ y = \dfrac{-1}{2} \end{cases}$$

Commentaire **:**

Pour procéder par équivalences, veillez bien à toujours pouvoir " remonter " du système déduit vers le système initial.

Si vous ne procédez pas par équivalences, vérifiez que le couple obtenu est bien solution.

On peut ramener à $\begin{cases} x+y=1 \\ x-y=2 \end{cases}$ et donner l'écriture matricielle : $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, puis,

chercher la matrice inverse de $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ ….. mais ce serait une maladresse dans cet exercice.

Interprétation du système :

Le point $\Omega\left(\frac{3}{2};-\frac{1}{2}\right)$ est **invariant** par T. (**L'image de Ω par T est Ω**).

Commentaire :

On ne demande pas de dire autre chose que ce que dit le système.

Si vous constatez des particularités du point Ω (centre de … , milieu de …), justifiez que Ω est bien ce que vous voyez et **faites le lien avec le système**. Sinon, ce n'est plus une interprétation du système.

Complément :

*** On peut aussi résoudre à l'aide de l'équation dans $\mathbb{C}$: $z = iz + 1 - 2i$

qui équivaut à $z(1 - i) = 1 - 2i$

En multipliant par le conjugué 1 + i de 1 – i les deux membres, et, en remarquant que (1- i)(1 + i) = 2

il vient : $2z = (1 - 2i)(1 + i) = 3 - i$, d'où, $z = \frac{3}{2} - \frac{1}{2}i$ qui est l'affixe ω de Ω.

*** En calculant $z' - \omega$, on a : $z' - \omega = iz + 1 - 2i - \frac{3}{2} + \frac{1}{2}i$

$= iz - \frac{1}{2} - \frac{3}{2}i$ En remarquant que $i\omega = \frac{3}{2}i + \frac{1}{2}$

on obtient : $z' - \omega = i(z - \omega)$

*** On sait que i est le complexe de module 1 et d'argument $\frac{\pi}{2}$.

On peut donc écrire : $|z' - \omega| = |z - \omega|$, soit : $\Omega M' = \Omega M$

et $\arg(z' - \omega) = \arg(i) + \arg(z - \omega) \quad [2\pi]$

soit : $\arg(z' - \omega) - \arg(z - \omega) = \arg(i) \quad [2\pi]$

$$(\overrightarrow{\Omega M}, \overrightarrow{\Omega M'}) = \frac{\pi}{2} \quad [2\pi]$$

T est une rotation de centre Ω et d'angle $\frac{\pi}{2}$.

4) On pose $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, $X' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ *et* $U = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ *et* $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Vérifier que X' = AX + U est l'écriture matricielle du système définissant l'application T.

$$AX = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0\times x-1\times y \\ 1\times x+0\times y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix}$$

$$AX+U = \begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -y+1 \\ x-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$$

5) Soit $B = I_2 - A$ *et* $C = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{-1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ *où* I_2 *est la matrice identité d'ordre 2.*

Calculer en écrivant tous les calculs le produit BC.

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$BC = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{-1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}+\frac{1}{2} & \frac{-1}{2}+\frac{1}{2} \\ \frac{-1}{2}+\frac{1}{2} & \frac{1}{2}+\frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2$$

Que peut-on déduire de ce résultat pour B et C ?

Rappel du cours:

Théorème :

S'il existe une matrice A' telle que l'une des égalités $AA' = I_n$ ou $A'A = I_n$ est vraie alors l'autre est vraie.

Définition :

Une matrice carrée A d'ordre n est dite inversible (ou régulière) lorsqu'il existe une matrice carrée A' d'ordre n telle que $AA' = I_n$ et $A'A = I_n$ où I_n est la matrice identité d'ordre n.

D'après ce théorème :

Puisque $BC = I_2$ alors $CB = I_2$

D'où, B est inversible et C est la matrice inverse de B.

6) On pose P = CU, calculer AP + U.

En utilisant les seules propriétés des matrices :

$AP + U = ACU + U$

Or, $A = I_2 - B$, donc, $(I_2 - B)CU + U = CU - BCU + U = CU - U + U = CU = P$

$AP + U = P$

En faisant tous les calculs :

$$CU = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{-1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\times\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\times(-2) \\ \frac{1}{2}\times1+\frac{1}{2}\times(-2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ \frac{-1}{2} \end{pmatrix}$$

$$AP + U = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ \frac{-1}{2} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{3}{2} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix} = P$$

Que représente ce résultat ?

La matrice P est la matrice solution de l'équation matricielle $AX + U = X$.

La matrice P est formée des coordonnées de Ω.

Complément :

Comparons $X' - P$ et $A(X - P)$

$X' - P = AX + U - P$

or, $U - P = -AP$ (résultat de la question 6/)

donc : $X' - P = AX - AP = A(X - P)$

P étant une constante, on pose $Y' = X' - P$ et $Y = X - P$, on a donc : $Y' = AY$

Les puissances de A :

$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $A^2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = -I_2$, $A^3 = A^2A = -A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, $A^4 = (A^2)^2 = I_2$.

Lien avec la rotation de centre Ω.

Le vecteur $\overrightarrow{OM}$ $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ $= X$, le vecteur $\overrightarrow{\Omega M}$ $\begin{pmatrix} x-x_\Omega \\ y-y_\Omega \end{pmatrix}$ $= X - P = Y$

Dans le nouveau repère $(\Omega ; \vec{u}, \vec{v})$, M a pour coordonnées la matrice Y.

Dans ce repère $(\Omega ; \vec{u}, \vec{v})$, M' a pour coordonnées la matrice Y'.

On peut écrire $A = \begin{pmatrix} \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) & -\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) \\ \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) & \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) \end{pmatrix}$, $A^2 = \begin{pmatrix} \cos(\pi) & -\sin(\pi) \\ \cos(\pi) & \sin(\pi) \end{pmatrix}$, $A^3 = \begin{pmatrix} \cos\left(\frac{3\pi}{2}\right) & -\sin\left(\frac{3\pi}{2}\right) \\ \sin\left(\frac{3\pi}{2}\right) & \cos\left(\frac{3\pi}{2}\right) \end{pmatrix}$

Partie II- Arithmétique .

Les questions 1) et 2) sont indépendantes

1). Soit $n \in \mathbb{N}$, $a = 3n + 1$ et $b = 2n + 3$.

a) Soit d un entier positif.

Montrer que si d est un diviseur commun à a et b alors d = 1 ou d = 7

d divise a et d divise b d'où d divise la combinaison linéaire $3(2n + 3) - 2\times(3n + 1) = 7$
Les diviseurs positifs de 7 sont 1 et 7.
Conclusion : si d est un diviseur commun à a et b alors $d = 1$ ou $d = 7$

(Dans cette question, on montre que les seuls diviseurs communs **possibles** à a et b sont 1 et 7.
Il n'est pas dit que 7 est un diviseur commun à a et à b).

b) Montrer que le PGCD(a ; b) est égal à 7 si et seulement si n est congru à 2 modulo 7.

Puisque 7 divise $3n + 1$, on peut écrire : $3n + 1 \equiv 0\ (7)$

$$3n \equiv -1\ (7)$$

Or, $5\times3 = 15$, d'où, $5\times3 \equiv 1\ (7)$.

En multipliant par 5 les deux membres, on a : $n \equiv -5 \equiv 2\ (7)$

(Attention : il n'y a pas de division dans les congruences … on cherche l'inverse de 3 modulo 7 pour " réduire " $3n \equiv -1\ (7)$) (Voir à la fin du corrigé, une démarche pour mettre en évidence les implications ….)

On peut faire aussi : 7 divise $2n + 3$, d'où, $2n + 3 \equiv 0\ (7)$

Comme $3\times2 \equiv -1\ (7)$, en multipliant par 3, on a : $6n + 9 \equiv 0(7)$

$$-n + 9 \equiv 0\ (7)$$

$$n \equiv 9 \equiv 2\ (7)$$

<u>On a montré</u> : si le PGCD(a ; b) est égal à 7 alors n est congru à 2 modulo 7

Réciproque :

Soit $n \equiv 2\ (7)$, donc, $n = 2 + 7q \quad q \in \mathbb{Z}$.

On a alors : $3n + 1 = 3(2 + 7q) + 1 = 7(3q + 1)$ avec $3q + 1 \in \mathbb{Z}$.

et $2n + 3 = 2(2 + 7q) + 3 = 7(2q + 1)$ avec $2q + 1 \in \mathbb{Z}$.

7 divise donc a et b, et, **d'après le a)**, 7 est le plus grand diviseur commun à a et b.

<u>On a montré</u> : si n est congru à 2 modulo 7 alors le PGCD(a ; b) est égal à 7

L'équivalence est bien démontrée

(Maintenant, on connaît les nombres a et b qui ont pour diviseurs 1 et 7,

et, ceux qui sont premiers entre eux).

2). On considère l'équation (E) : 3x – 5y = 1 où x et y sont des entiers relatifs.

a) Justifier l'existence de solutions de cette équation (E).

3 et 5 premiers entre eux et d'après l'identité de Bézout, on sait qu'il existe deux entiers u et v tels que

$3u + 5v = 1$.

L'équation (E) admet donc des solutions.

b) *Donner une solution évidente de (E).*

Le couple (2 ; 1) … ($3\times2 - 5\times1 = 1$ est évident).

c) *Résoudre dans $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ l'équation (E).*

Soit le couple (x ; y) solution de (E), on a alors :

$3x - 5y = 3\times2 - 5\times1$ qui mène à $3(x - 2) = 5(y - 1)$

Rappel :

3 et 5 étant premiers entre eux, on peut appliquer le théorème de Gauss :

Si a est premier avec b et si a divise le produit bc alors a divise c.

3 divise $5(y - 1)$ et, 3 et 5 premiers entre eux, donc, d'après le théorème de Gauss :

3 divise $y - 1$, d'où : $y = 1 + 3k$, $k \in \mathbb{Z}$.

Comme $3(x - 2) = 5(y - 1)$ et $y = 1 + 3k$,

puis : $x - 2 = 5k$, $x = 2 + 5k$.

<u>On a montré</u> : Si (x ; y) est solution de (E) alors $x = 2 + 5k$ et $y = 1 + 3k$ avec $k \in \mathbb{Z}$.

Réciproque : les couples ($2+ 5k$; $1 + 3k$) vérifient (E)

en effet, $3(2+ 5k) - 5(1 + 3k) = 1$.

Conclusion : L'ensemble des solutions de (E) est l'ensemble des couples $\{((2+ 5k ; 1 + 3k)/ k \in \mathbb{Z}\}$.

Un exemple de démarche (correcte) mais insuffisante pour conclure … puis fausse …

Dans le premier exercice d'arithmétique, soyez vigilants sur les propriétés des nombres permettant de conclure.

Supposons cet énoncé très semblable dans sa forme à l'exercice 1 d'arithmétique.

1). Soit $n\in\mathbb{N}$, $a = 10n + 7$ et $b = 4n + 5$.

a) Soit d un entier positif.
Montrer que si d est un diviseur commun à a et b alors d est un diviseur de 22.

d divise donc la combinaison linéaire $10b - 4a = \ldots = 22$.

d est un diviseur de 22.

(Mais il n'est pas dit que 22 est un diviseur de a et de b) .

Imaginons poursuivre comme dans l'exercice en supposant que le PGCD(a, b) = 22.

22 divise a, donc, $10\,n + 7 \equiv 0 \ \ (22)$

soit : $20\,n + 14 \equiv 0 \ \ (22)$ (On a multiplié par 2 et compatibilité de la multiplication et des congruences)

comme $20 \equiv -2\ (22)$, on obtient :

$-2n + 14 \equiv 0\ (22)$

$-2n \equiv -14\ (22)$

$n \equiv 7\ (22)$

c'est faux, il suffit de vérifier en remplaçant n par 7

$10\times 7 + 7 = 77$ n'est pas divisible par 22

22 divise b, donc, $4n + 5 \equiv 0 \quad (22)$

soit : $24n + 30 \equiv 0 \quad (22)$ (On a multiplié par 6 et compatibilité de la multiplication et des congruences)

comme $24 \equiv 2\ (22)$ et $30 \equiv 8\ (22)$, on obtient :

$2n + 8 \equiv 0\ (22)$ et $2n \equiv -8\ (22)$ et $n \equiv -4 \equiv 18\ (22)$

c'est faux, il suffit de vérifier en remplaçant n par 18 $4\times 18 + 5 = 77 \ldots$

En posant $n \equiv 4\ (22)$ (ou $n \equiv 18\ (22)$), on n'obtiendra jamais : $10n + 7 \equiv 0\ (22)$ (ou $4n + 5 \equiv 0\ (22)$)

L'erreur est dans la " division " par 2 à la dernière étape.

Il n'existe pas d'entier x telle que $2x \equiv 1\ (22)$

Les autres étapes étaient correctes (mais inutiles).

Lorsque a et b sont premiers entre eux, l'identité de Bézout assure l'existence de " l'inverse ".

$au + bv = 1 \Leftrightarrow au \equiv 1\ (b)$
u est alors l'inverse de a modulo b.