Index

Amérique du Nord mai 2013 Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

Partie A

On considère l'algorithme suivant :

```
Variables :       a est un entier naturel
                  b est un entier naturel
                  c est un entier naturel
Initialisation :  Affecter à c la valeur 0
                  Demander la valeur de a
                  Demander la valeur de b
Traitement :      Tant que a⩾b
                      Affecter à c la valeur c+1
                      Affecter à a la valeur a−b
                  Fin de tant que
Sortie :          Afficher c
                  Afficher a
```

1. Faire fonctionner cet algorithme avec $a = 13$ et $b = 4$ en indiquant les valeurs des variables à chaque étape.
2. Que permet de calculer cet algorithme ?

Partie B

À chaque lettre de l'alphabet, on associe, grâce au tableau ci-dessous, un nombre entier compris entre 0 et 25.

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12

N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z
13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25

On définit un procédé de codage de la façon suivante :

Étape 1 : À la lettre que l'on veut coder, on associe le nombre m correspondant dans le tableau.

Étape 2 : On calcule le reste de la division euclidienne de $9m+5$ par 26 et on le note p.

Étape 3 : Au nombre p, on associe la lettre correspondante dans le tableau.

1. Coder la lettre U.
2. Modifier l'algorithme de la partie A pour qu'à une valeur de m entrée par l'utilisateur, il affiche la valeur de p, calculée à l'aide du procédé de codage précédent.

Partie C

1. Trouver un nombre entier x tel que $9x \equiv 1 \ [26]$.
2. Démontrer alors l'équivalence :
   $9m+5 \equiv p \ [26] \quad \Leftrightarrow \quad m \equiv 3p-15 \ [26]$.
3. Décoder alors la lettre B.

Correction Amérique du Nord

PARTIE A

1) Boucles du TANT QUE

$a = 13$ et $b = 4$

La condition $a > b$ est vraie, d'où : c prend la valeur 1 et a prend la valeur $a - b = 9$

$a = 9$ et $b = 4$

La condition $a > b$ est vraie, d'où : c prend la valeur 2 et a prend la valeur $a - b = 5$

$a = 5$ et $b = 4$

La condition $a > b$ est vraie, d'où : c prend la valeur 3 et a prend la valeur $a - b = 1$

$a = 1$ et $b = 4$

La condition $a > b$ est fausse :

Fin du TANT QUE

Affichage : 3 et 1

2) Il faut $b \neq 0$ lorsque $a > 0$, (la condition $a > 0$ est toujours vraie)

```
*Algorithme lancé***
trer a : 5
trer b : 0

*Algorithme interrompu ligne 13 : dépassement de la capacité autorisée pour les boucles***
```

Si $a = 0$, l'affichage $c = 0$ et $a = 0$

```
***Algorithme lancé***
Entrer a : 0
Entrer b : 2
0
0
***Algorithme terminé***
```

```
***Algorithme lancé***
Entrer a : 0
Entrer b : 0
0
0
***Algorithme terminé***
```

$a > 0$ et $b > 0$

Lorsque a n'est pas un multiple de b, l'affichage de c et a:

c est le quotient dans la division euclidienne de a par b, et, a le reste

```
***Algorithme lancé***
Entrer a : 13
Entrer b : 3
4
1
***Algorithme terminé***
```

Lorsque a est un multiple de b, l'affichage de c et a:

c est le quotient $q - 1$; on a : $a = b(c + 1)$ et $a = b$

```
***Algorithme lancé***
Entrer a : 12
Entrer b : 3
3
3
***Algorithme terminé***
```

PARTIE B

1) À U on associe $m = 20$

$9 \times 20 + 5 = 185$

$185 = 26 \times 7 + 3$ d'où $p = 3$ associé à D

U est codé par la lettre D.

2)

Variables : m est un entier naturel

p est un entier naturel

c est un entier naturel *(pas nécessaire pour le codage)*

Initialisation : Affecter à c la valeur 0

Demander la valeur de m

Traitement :

Affecter à p la valeur $9 \times m + 5$

Tant que $p \geqslant 26$

Affecter à c la valeur $c + 1$ *(pas nécessaire pour le codage)*

Affecter à p la valeur $p - 26$

Fin de tant que

Sortie :

Afficher c. *(pas nécessaire pour le codage)*

Afficher p.

(Par exemple pour 11, si $a > 26$, on ne trouve pas 0, mais, 26)

Partie C
1) Résolution de $9x \equiv 1$ (26)
(On demande une seule valeur de x)
Comme $3\times9 = 27$ et $27 = 26 + 1$, on a : $x = 3$
Tout entier congru à 3 modulo 26 convient. (L'ensemble des solutions est : $x = 3 + 26k$, $k \in \mathbb{Z}$)

2) On vient de montrer que $9\times3 \equiv 1$ (26)
sens direct :
$9m + 5 \equiv p\ (26) \Rightarrow 3\times9m + 15 \equiv 3p\ (26) \Rightarrow m \equiv 3p - 15\ (26)$
Sens réciproque :
$m \equiv 3p - 15\ (26) \Rightarrow 3p \equiv m + 15\ (25) \Rightarrow 9\times3p \equiv 9m + 9\times3\times5\ (26) \Rightarrow p \equiv 9m + 5\ (26)$
L'équivalence : $9m + 5 \equiv p\ (26) \Leftrightarrow m \equiv 3p - 15\ (26)$ est démontrée

3) décodage de la lettre B
B est associée à 1 (nombre p et on cherche m)
$m \equiv -12$ (26), soit : $m \equiv 14$ (26) qui donne la lettre O.
B est décodée par O.

Antilles-Guyane juin 2013 Commun ayant suivi l'enseignement de spécialité

On définit les suites (u_n) et (v_n) sur l'ensemble $\mathbb{N}$ des entiers naturels par:

$$u_0=0; v_0=1, \text{et} \begin{cases} u_{n+1} = \dfrac{u_n+v_n}{2} \\ v_{n+1} = \dfrac{u_n+2v_n}{3} \end{cases}$$

Le but de cet exercice est d'étudier la convergence des suites (u_n) et (v_n).

1. Calculer u_1 et v_1.
2. On considère l'algorithme suivant:

Variables :	*u*, *v* et *w* des nombres réels
	N et *k* des nombres entiers
Initialisation :	*u* prend la valeur 0
	v prend la valeur 1
Début de l'algorithme	
Entrer la valeur de *N*	
Pour *k* variant de 1 à *N*	
w prend la valeur *u*	
u prend la valeur $\dfrac{w+v}{2}$	
v prend la valeur $\dfrac{w+2v}{3}$	
Fin du Pour	
Afficher *u*	
Afficher *v*	
Fin de l'algorithme	

a. On exécute cet algorithme en saisissant $N=2$. Recopier et compléter le tableau donné ci-dessous contenant l'état des variables au cours de l'exécution de l'algorithme.

k	w	u	v
1			
2			

b. Pour un nombre N donné, à quoi correspondent les valeurs affichées par l'algorithme par rapport à la situation étudiée dans cet exercice ?

3. Pour tout entier naturel n on définit le vecteur colonne X_n par $X_n=\begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix}$

et la matrice A par $A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$

a. Vérifier que, pour tout entier naturel n, $X_{n+1}=AX_n$.

b. Démontrer par récurrence que $X_n=A^n X_0$ pour tout entier naturel n.

4. On définit les matrices P, P' et B par $P = \begin{pmatrix} \frac{4}{5} & \frac{6}{5} \\ -\frac{6}{5} & \frac{6}{5} \end{pmatrix}$, $P' = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{-1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{6} \end{pmatrix}$.

a. Calculer le produit PP'.
On admet que $P'BP=A$.
Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n, $A^n=P'B^nP$.

b. On admet que pour tout entier naturel n, $B^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \left(\frac{1}{6}\right) \end{pmatrix}^n$.

En déduire l'expression de la matrice A^n en fonction de n.

5.

a. Montrer que $X_n = \begin{pmatrix} \frac{3}{5}-\frac{3}{5}\left(\frac{1}{6}\right)^n \\ \frac{3}{5}+\frac{2}{5}\left(\frac{1}{6}\right)^n \end{pmatrix}$ pour tout entier naturel n.

En déduire les expressions de u_n et v_n en fonction de n.

b. Déterminer alors les limites des suites (u_n) et (v_n).

Correction Antilles-Guyane

(u_n) et (v_n) sont définies sur l'ensemble $\mathbb{N}$:

$$u_0=0; v_0=1, \text{et} \begin{cases} u_{n+1}=\dfrac{u_n+v_n}{2} \\ v_{n+1}=\dfrac{u_n+2v_n}{3} \end{cases}$$

1. Calculer u_1 et v_1.

$u_1 = \dfrac{u_0+v_0}{2} = \dfrac{1}{2}$ et $v_1 = \dfrac{u_0+2v_0}{3} = \dfrac{2}{3}$.

2. On considère l'algorithme suivant:

Variables : *u*, *v* et *w* des nombres réels
N et *k* des nombres entiers
Initialisation : *u* prend la valeur 0
v prend la valeur 1
Début de l'algorithme
Entrer la valeur de *N*
Pour *k* variant de 1 à *N*
w prend la valeur *u*
u prend la valeur $\dfrac{w+v}{2}$
v prend la valeur $\dfrac{w+2v}{3}$
Fin du Pour
Afficher *u*
Afficher *v*
Fin de l'algorithme

a. Si $N = 2$,

k	w	u	v
1	0	1/2	2/3
2	1/2	7/12	11/18

b. Pour un nombre N donné, l'algorithme affiche la valeur de u_N (variable *u*) et de v_N (variable *v*)e la valeur de u_N (variable *u*) et de v_N (variable *v*).

3. Pour tout entier naturel *n*, $X_n=\begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix}$ et $A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$

   a. Pour tout entier naturel *n*,

$$AX_n = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}u_n+\frac{1}{2}v_n \\ \frac{1}{3}u_n+\frac{2}{3}v_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{u_n+v_n}{2} \\ \frac{u_n+2v_n}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_{n+1} \\ v_{n+1} \end{pmatrix} = X_{n+1}$$

   b. **Récurrence**

Initialisation : *n* = 0

Comme A^0 = I₂ (matrice identité d'ordre 2), on a bien : $X_0 = A^0 \ X_0$

Hérédité :

Soit un entier naturel *n* tel que $X_n = A^n \ X_0$

Comme $X_{n+1} = AX_n = A \ A^n \ X_0 = A^{n+1} \ X_0$

La propriété est héréditaire.

Conclusion :

D'après l'axiome de récurrence la propriété est vraie pour tout entier naturel *n*.

4. On définit les matrices *P*, *P'* et *B* par $P = \begin{pmatrix} \frac{4}{5} & \frac{6}{5} \\ -\frac{6}{5} & \frac{6}{5} \end{pmatrix}$, $P' = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{-1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{6} \end{pmatrix}$.

a) $$PP' = \begin{pmatrix} \frac{4}{5} & \frac{6}{5} \\ \frac{-6}{5} & \frac{6}{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{-1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{4}{5}\times\frac{1}{2}+\frac{6}{5}\times\frac{1}{2} & \frac{4}{5}\times\left(\frac{-1}{2}\right)+\frac{6}{5}\times\frac{1}{3} \\ \left(\frac{-6}{5}\right)\times\frac{1}{2}+\frac{6}{5}\times\frac{1}{2} & \left(\frac{-6}{5}\right)\times\left(\frac{-1}{2}\right)+\frac{6}{5}\times\frac{1}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2$$

P' est donc la matrice inverse de *P* et d'après les propriétés des matrices inverses, on a aussi : *P'P* = I₂

On admet *P'BP* = *A* avec $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{6} \end{pmatrix}$.

On admet que $P'BP=A$.

Récurrence

Initialisation : *n* = 0

Comme $A^0 = B^0$ = I₂ (matrice identité d'ordre 2), on a bien : $A^0 = P' \ B^0 \ P = I_2$

Hérédité :

Soit un entier naturel *n* tel que $A^n = P' \ B^n \ P$

$$A^{n+1} = AA^n = (P'BP)(P'\ B^n\ P) = P'B(PP')\ B^n\ P = P'BI_2\ B^n\ P = P'B\ B^n\ P = P'\ B^{n+1}\ P$$

La propriété est héréditaire.

Conclusion :

D'après l'axiome de récurrence la propriété est vraie pour tout entier naturel n.

b. On admet que pour tout entier naturel n, $B^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \left(\frac{1}{6}\right) \end{pmatrix}^n$.

En déduire l'expression de la matrice A^n en fonction de n.

b) $A^n = P'\ B^n\ P = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{-1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \left(\frac{1}{6}\right)^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{4}{5} & \frac{6}{5} \\ \frac{-6}{5} & \frac{6}{5} \end{pmatrix}$

$$= \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\left(\frac{1}{6}\right)^n \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3}\left(\frac{1}{6}\right)^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{4}{5} & \frac{6}{5} \\ \frac{-6}{5} & \frac{6}{5} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{5}+\frac{3}{5}\left(\frac{1}{6}\right)^n & \frac{3}{5}-\frac{3}{5}\left(\frac{1}{6}\right)^n \\ \frac{2}{5}-\frac{2}{5}\left(\frac{1}{6}\right)^n & \frac{3}{5}+\frac{2}{5}\left(\frac{1}{6}\right)^n \end{pmatrix}$$

5.

a. pour tout entier naturel n.

$$X_n = A^n\ X_0 = \begin{pmatrix} \frac{2}{5}+\frac{3}{5}\left(\frac{1}{6}\right)^n & \frac{3}{5}-\frac{3}{5}\left(\frac{1}{6}\right)^n \\ \frac{2}{5}-\frac{2}{5}\left(\frac{1}{6}\right)^n & \frac{3}{5}+\frac{2}{5}\left(\frac{1}{6}\right)^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \left(\frac{2}{5}+\frac{3}{5}\left(\frac{1}{6}\right)^n\right)\times 0+\left(\frac{3}{5}-\frac{3}{5}\left(\frac{1}{6}\right)^n\right)\times 1 \\ \left(\frac{2}{5}-\frac{2}{5}\left(\frac{1}{6}\right)^n\right)\times 0+\left(\frac{3}{5}+\frac{2}{5}\left(\frac{1}{6}\right)^n\right)\times 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{3}{5}-\frac{3}{5}\left(\frac{1}{6}\right)^n \\ \frac{3}{5}+\frac{2}{5}\left(\frac{1}{6}\right)^n \end{pmatrix}$$

D'où : $u_n = \frac{3}{5} - \frac{3}{5} \left(\frac{1}{6}\right)^n$ et $v_n = \frac{3}{5} + \frac{2}{5} \left(\frac{1}{6}\right)^n$

b. Déterminer alors les limites des suites (u_n) et (v_n).

Comme $\left(\frac{1}{6}\right)^n$ converge vers 0 ($-1 < \frac{1}{6} < 1$) les suites (u_n) et (v_n) convergent chacune vers $\frac{3}{5}$

Asie juin 2013 **Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité**

Un logiciel permet de transformer un élément rectangulaire d'une photographie.

Ainsi, le rectangle initial OEFG est transformé en un rectangle OE′F′G′, appelé image de OEFG.

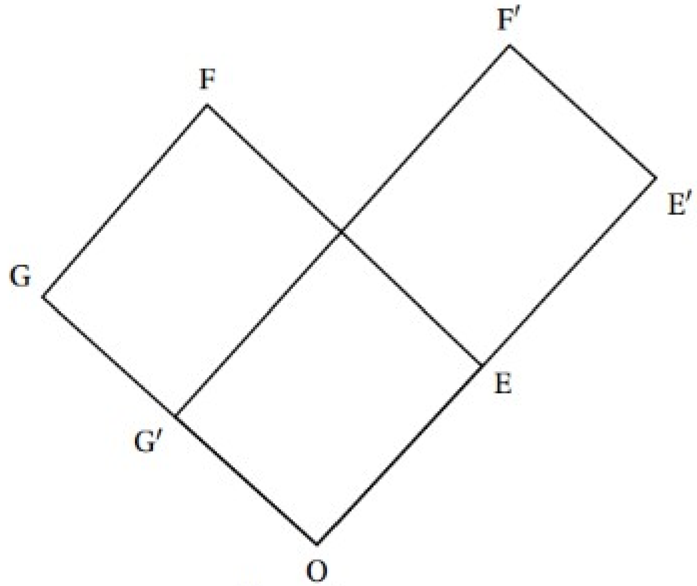

Figure 1

L'objet de cet exercice est d'étudier le rectangle obtenu après plusieurs transformations successives.

Partie A

Le plan est rapporté à un repère orthonormé $(\mathrm{O}; \vec{i}, \vec{j})$.

Les points E, F et G ont pour coordonnées respectives (2 ; 2), $(-1;5)$ et $(-3;3)$.

La transformation du logiciel associe à tout point $M(x;y)$ du plan le point $M'(x';y')$, image du point M tel que:

$$\begin{cases} x' = \frac{5}{4}x + \frac{3}{4}y \\ y' = \frac{3}{4}x + \frac{5}{4}y \end{cases}$$

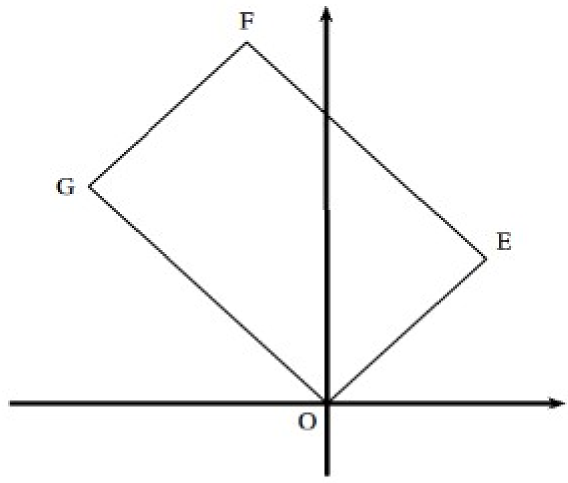

Figure 2

1.

   a. Calculer les coordonnées des points E′, F′ et G′, images des points E, F et G par cette transformation.

   b. Comparer les longueurs OE et OE′ d'une part, OG et OG′ d'autre part.
   Donner la matrice carrée d'ordre 2, notée A, telle que: $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.

Partie B

Dans cette partie, on étudie les coordonnées des images successives du sommet F du rectangle OEFG lorsqu'on applique plusieurs fois la transformation du logiciel.

1. On considère l'algorithme suivant destiné à afficher les coordonnées de ces images successives.
   Une erreur a été commise.
   Modifier cet algorithme pour qu'il permette d'afficher ces coordonnées.

Entrée	Saisir un entier naturel non nul N
Initialisation	Affecter à x la valeur -1 Affecter à y la valeur 5
Traitement	POUR i allant de 1 à N Affecter à a la valeur $\frac{5}{4}x+\frac{3}{4}y$ Affecter à b la valeur $\frac{3}{4}x+\frac{5}{4}y$ Affecter à x la valeur a Affecter à y la valeur b FIN POUR
Sortie	Afficher x, afficher y

2. On a obtenu le tableau suivant

i	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*	*10*	*15*
x	*2,5*	*7,25*	*15,625*	*31,8125*	*63,9063*	*2047,9971*	*65535,9999*
y	*5,5*	*8,75*	*16,375*	*32,1875*	*64,0938*	*2048,0029*	*65536,001*

Conjecturer le comportement de la suite des images successives du point F.

Partie C

Dans cette partie, on étudie les coordonnées des images successives du sommet E du rectangle OEFG. On définit la suite des points $E_n(x_n; y_n)$ du plan par E_0 = E et la relation de récurrence :

$$\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix},$$

où $(x_{n+1}; y_{n+1})$ désignent les coordonnées du point E_{n+1}.
Ainsi $x_0=2$ et $y_0=2$.

1. On admet que, pour tout entier $n \geqslant 1$, la matrice A^n peut s'écrire sous la forme : $A^n = \begin{pmatrix} \alpha_n & \beta_n \\ \beta_n & \alpha_n \end{pmatrix}$.

   Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, on a : $\alpha_n = 2^{n-1} + \frac{1}{2^{n+1}}$ et $\beta_n = 2^{n-1} - \frac{1}{2^{n+1}}$.

2.
   a. Démontrer que, pour tout entier naturel n, le point E_n est situé sur la droite d'équation $y=x$. On pourra utiliser que, pour tout entier naturel n, les coordonnées $(x_n; y_n)$ du point E_n vérifient : $\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} = A^n \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$.

   b. Démontrer que la longueur OE_n tend vers $+\infty$ quand n tend vers $+\infty$.

Correction Asie juin 2013

Partie A

Le plan est rapporté à un repère orthonormé $(\mathrm{O}, \vec{i}, \vec{j})$.
Les points E, F et G ont pour coordonnées respectives (2 ; 2), $(-1;5)$ *et* $(-3;3)$.
La transformation du logiciel associe à tout point $M(x;y)$ *du plan le point* $M'(x';y')$, *image du point* M *tel que:*

$$\begin{cases} x' = \frac{5}{4}x + \frac{3}{4}y \\ y' = \frac{3}{4}x + \frac{5}{4}y \end{cases}$$

1. a.
Calculer les coordonnées des points E', F' et G', images des points E, F et G par cette transformation.

Coordonnées de E' : $\begin{cases} x_{E'} = \frac{5}{4}x_E + \frac{3}{4}y_E = \frac{5}{4}\times 2 + \frac{3}{4}\times 2 = 4 \\ y_{E'} = \frac{3}{4}x_E + \frac{5}{4}y_E = \frac{3}{4}\times 2 + \frac{5}{4}\times 2 = 4 \end{cases}$ $E'(4 ; 4)$

Coordonnées de F' : $\begin{cases} x_{F'}=\frac{5}{4}x_F+\frac{3}{4}y_F=\frac{5}{4}\times(-1)+\frac{3}{4}\times 5=\frac{5}{2} \\ y_{F'}=\frac{3}{4}x_F+\frac{5}{4}y_F=\frac{3}{4}\times(-1)+\frac{5}{4}\times 5=\frac{11}{2} \end{cases}$ $F'\left(\frac{5}{2};\frac{11}{2}\right)$

Coordonnées de G' : $\begin{cases} x_{G'}=\frac{5}{4}x_G+\frac{3}{4}y_G=\frac{5}{4}\times(-3)+\frac{3}{4}\times 3=-\frac{3}{2} \\ y_{G'}=\frac{3}{4}x_G+\frac{5}{4}y_G=\frac{3}{4}\times(-3)+\frac{5}{4}\times 3=\frac{3}{2} \end{cases}$ $G'\left(\frac{-3}{2};\frac{3}{2}\right)$

b.

Comparer les longueurs OE et OE' d'une part, OG et OG' d'autre part.

De façon générale, la longueur OM où M est un point de coordonnées (x ; y) dans un repère orthonormal $(\mathrm{O};\vec{i},\vec{j})$ est : $OM = \sqrt{x^2+y^2}$

$OE = 2\sqrt{2}$ et $OE' = 4\sqrt{2}$, d'où, $OE' = 2OE$.

$OG = 3\sqrt{2}$ et $OG' = \frac{3}{2}\sqrt{2}$, d'où, $OG' = \frac{1}{2}OG$.

Remarque : Dans cette question, chaque segment est la diagonale d'un carré de côté c, d'où, la longueur $c\sqrt{2}$.

Donner la matrice carrée d'ordre 2, notée A, telle que: $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}=A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.

$\begin{cases} x'=\frac{5}{4}x+\frac{3}{4}y \\ y'=\frac{3}{4}x+\frac{5}{4}y \end{cases} \Leftrightarrow$ $V' = A\ V$ où $V = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, $V' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ et $A = \begin{pmatrix} \frac{5}{4} & \frac{3}{4} \\ \frac{3}{4} & \frac{5}{4} \end{pmatrix}$

Partie B

Dans cette partie, on étudie les coordonnées des images successives du sommet F du rectangle OEFG lorsqu'on applique plusieurs fois la transformation du logiciel.

1.

On considère l'algorithme suivant destiné à afficher les coordonnées de ces images successives.
Une erreur a été commise.
Modifier cet algorithme pour qu'il permette d'afficher ces coordonnées.

Entrée	Saisir un entier naturel non nul N
Initialisation	Affecter à x la valeur -1 Affecter à y la valeur 5
Traitement	POUR i allant de 1 à N Affecter à a la valeur $\frac{5}{4}x+\frac{3}{4}y$ Affecter à b la valeur $\frac{3}{4}x+\frac{5}{4}y$ Affecter à x la valeur a Affecter à y la valeur b FIN POUR
Sortie	Afficher x, afficher y

L'affichage doit se faire avant la " FIN POUR " de façon à avoir les coordonnées successives.

Exemple avec Algobox et $N = 5$

```
VARIABLES
  N EST_DU_TYPE NOMBRE
  a EST_DU_TYPE NOMBRE
  b EST_DU_TYPE NOMBRE
  x EST_DU_TYPE NOMBRE
  y EST_DU_TYPE NOMBRE
  i EST_DU_TYPE NOMBRE
DEBUT_ALGORITHME
  LIRE N
  x PREND_LA_VALEUR -1
  y PREND_LA_VALEUR 5
  POUR i ALLANT_DE 1 A N
    DEBUT_POUR
    a PREND_LA_VALEUR (5/4)*x+(3/4)*y
    b PREND_LA_VALEUR (3/4)*x+(5/4)*y
    x PREND_LA_VALEUR a
    y PREND_LA_VALEUR b
    AFFICHER x
    AFFICHER y
    FIN_POUR
FIN_ALGORITHME
```

```
***Algorithme lancé***
Entrer N : 5
2.5
5.5

7.25
8.75

15.625
16.375

31.8125
32.1875

63.90625
64.09375
```

2.
On a obtenu le tableau suivant :

i	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*	*10*	*15*
x	*2,5*	*7,25*	*15,625*	*31,8125*	*63,9063*	*2047,9971*	*65535,9999*
y	*5,5*	*8,75*	*16,375*	*32,1875*	*64,0938*	*2048,0029*	*65536,001*

Conjecturer le comportement de la suite des images successives du point F.
La suite des coordonnées $(x\,;y)$ tendent vers $+\infty$ et d'autre part, y est de plus en proche de x.
Les images de F sont envoyées vers l'infini et sont presque alignées sur la première bissectrice d'équation $y = x$

Partie C

Dans cette partie, on étudie les coordonnées des images successives du sommet E du rectangle OEFG. On définit la suite des points $E_n(x_n;y_n)$ du plan par $E_0=E$ et la relation de récurrence :

$$\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix},$$

où $(x_{n+1};y_{n+1})$ désignent les coordonnées du point E_{n+1}.
Ainsi $x_0=2$ et $y_0=2$.

1.
On admet que, pour tout entier $n\geqslant 1$, la matrice A^n peut s'écrire sous la forme : $A^n=\begin{pmatrix} \alpha_n & \beta_n \\ \beta_n & \alpha_n \end{pmatrix}$.

Remarque :
On peut démontrer cette proposition par récurrence.

Initialisation :

La matrice $A = \begin{pmatrix} \frac{5}{4} & \frac{3}{4} \\ \frac{3}{4} & \frac{5}{4} \end{pmatrix}$ est bien de la forme $\begin{pmatrix} \alpha_1 & \beta_1 \\ \beta_1 & \alpha_1 \end{pmatrix}$ avec $\alpha_1 = \frac{5}{4}$ et $\beta_1 = \frac{3}{4}$.

Hérédité :

Soit un entier $n \geqslant 1$ tel que $A^n = \begin{pmatrix} \alpha_n & \beta_n \\ \beta_n & \alpha_n \end{pmatrix}$

Posons $A^{n+1} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ et montrons que $a = d = \alpha_{n+1}$ et $b = c = \beta_{n+1}$.

Comme $A^{n+1} = AA^n = \begin{pmatrix} \frac{5}{4} & \frac{3}{4} \\ \frac{3}{4} & \frac{5}{4} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_n & \beta_n \\ \beta_n & \alpha_n \end{pmatrix}$.

$$A^{n+1} = \begin{pmatrix} \frac{5}{4}\alpha_n + \frac{3}{4}\beta_n & \frac{5}{4}\beta_n + \frac{3}{4}\alpha_n \\ \frac{3}{4}\alpha_n + \frac{5}{4}\beta_n & \frac{3}{4}\beta_n + \frac{5}{4}\alpha_n \end{pmatrix}$$

On a donc : $a = d = \alpha_{n+1} = \frac{5}{4}\alpha_n + \frac{3}{4}\beta_n$ et $b = c = \beta_{n+1} = \frac{3}{4}\alpha_n + \frac{5}{4}\beta_n$.

Retour à l'énoncé :

Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, on a : $\alpha_n = 2^{n-1} + \frac{1}{2^{n+1}}$ et $\beta_n = 2^{n-1} - \frac{1}{2^{n+1}}$.

Démonstration par récurrence.

Pour tout entier $n \geqslant 1$, la matrice A^n peut s'écrire sous la forme : $A^n = \begin{pmatrix} \alpha_n & \beta_n \\ \beta_n & \alpha_n \end{pmatrix}$

Pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, soit la proposition P_n : $\alpha_n = 2^{n-1} + \frac{1}{2^{n+1}}$ et $\beta_n = 2^{n-1} - \frac{1}{2^{n+1}}$.

Démontrons que la proposition est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

Initialisation :

$n = 1$ On sait : $\alpha_1 = \frac{5}{4}$ et $\beta_1 = \frac{3}{4}$.

$$2^{1-1} + \frac{1}{2^{1+1}} = 1 + \frac{1}{4} = \frac{5}{4} = \alpha_1$$

$$2^{1-1} - \frac{1}{2^{1+1}} = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4} = \beta_1 .$$

P_1 est vraie

Hérédité :

Soit un entier naturel n non nul tel que P_n est vérifiée.

On a donc : $\alpha_n = 2^{n-1} + \frac{1}{2^{n+1}}$ et $\beta_n = 2^{n-1} - \frac{1}{2^{n+1}}$. . (Hypothèse de récurrence)

Or, $A^{n+1} = AA^n = \begin{pmatrix} \frac{5}{4} & \frac{3}{4} \\ \frac{3}{4} & \frac{5}{4} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_n & \beta_n \\ \beta_n & \alpha_n \end{pmatrix}$.

$$A^{n+1} = \begin{pmatrix} \frac{5}{4}\alpha_n+\frac{3}{4}\beta_n & \frac{5}{4}\beta_n+\frac{3}{4}\alpha_n \\ \frac{3}{4}\alpha_n+\frac{5}{4}\beta_n & \frac{3}{4}\beta_n+\frac{5}{4}\alpha_n \end{pmatrix} =$$

$$\begin{aligned} \frac{5}{4}\alpha_n+\frac{3}{4}\beta_n &= \frac{5}{4}\times\left(2^{n-1}+\frac{1}{2^{n+1}}\right)+\frac{3}{4}\times\left(2^{n-1}-\frac{1}{2^{n+1}}\right) \\ &= 2\times2^{n-1}+\frac{1}{2}\times\left(\frac{1}{2^{n+1}}\right) \\ &= 2^{(n+1)-1} + \frac{1}{2^{(n+1)+1}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{3}{4}\alpha_n+\frac{5}{4}\beta_n &= \frac{3}{4}\times\left(2^{n-1}+\frac{1}{2^{n+1}}\right)+\frac{5}{4}\times\left(2^{n-1}-\frac{1}{2^{n+1}}\right) \\ &= 2\times2^{n-1}-\frac{1}{2}\times\left(\frac{1}{2^{n+1}}\right) \\ &= 2^{(n+1)-1} - \frac{1}{2^{(n+1)+1}}. \end{aligned}$$

On obtient : $A^{n+1} = \begin{pmatrix} \alpha_{n+1} & \beta_{n+1} \\ \beta_{n+1} & \alpha_{n+1} \end{pmatrix}$ avec $\alpha_{n+1} = 2^n+\frac{1}{2^{n+2}}$ et $\beta_{n+1} = 2^n-\frac{1}{2^{n+2}}$.

P_{n+1} est vérifiée.

On a montré : P_1 vraie et $\mathrm{P}_n \Rightarrow \mathrm{P}_{n+1}$

Conclusion :

D'après l'axiome de récurrence, la proposition P_n est vraie pour tout entier naturel $n \geqslant 1$.

2. a.

Démontrer que, pour tout entier naturel n, le point E_n est situé sur la droite d'équation $y=x$.
On pourra utiliser que, pour tout entier naturel n, les coordonnées $(x_n;y_n)$ du point E_n vérifient :
$\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}=A^n\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Nommons Δ la droite d'équation $y = x$.
Pour montrer que le point E_n est situé sur la droite Δ, il suffit de montrer que pour tout $n\in\mathbb{N}$, $y_n=x_n$
On a évidemment $E_0 = E$ est un point de Δ.
Comme $\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}=A^n\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$., il vient : $\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_n & \beta_n \\ \beta_n & \alpha_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$,
On a donc : $x_n = 2\alpha_n+2\beta_n = 2(\alpha_n+\beta_n)$ et $y_n = 2\beta_n+2\alpha_n = 2(\alpha_n+\beta_n)$.
Ce qui prouve que $y_n=x_n$.
Pour tout $n\in\mathbb{N}$, le point E_n est situé sur la droite Δ d'équation $y=x$.

b. $OE_n^2 = x_n^2 + y_n^2 = 2x_n^2$ et $x_n = 2(\alpha_n + \beta_n) = 2\times(2^{n-1} + 2^{n-1}) = 2\times 2^n$

$OE_n = \sqrt{x_n^2 + y_n^2} = \sqrt{2} \; x_n$, puisque $x_n > 0$.

$\lim\limits_{n \to +\infty} OE_n = +\infty$.

Centres étrangers juin 2013 **Candidats ayant choisi la spécialité mathématique**

Une espèce d'oiseaux ne vit que sur deux îles A et B d'un archipel.
Au début de l'année 2013, 20 millions d'oiseaux de cette espèce sont présents sur l'île A et 10 millions sur l'île B.
Des observations sur plusieurs années ont permis aux ornithologues d'estimer que, compte tenu des naissances, décès, et migrations entre les deux îles, on retrouve au début de chaque année les proportions suivantes :

- sur l'île A : 80 % du nombre d'oiseaux présents sur l'île A au début de l'année précédente et 30 % du nombre d'oiseaux présents sur l'île B au début de l'année précédente;
- sur l'île B : 20 % du nombre d'oiseaux présents sur l'île A au début de l'année précédente et 70 % du nombre d'oiseaux présents sur l'île B au début de l'année précédente.

Pour tout entier naturel n, on note a_n (respectivement b_n) le nombre d' oiseaux (en millions) présents sur l'île A (respectivement B) au début de l'année $(2013+n)$.

Partie A - Algorithmique et conjectures

On donne ci-contre un algorithme qui doit afficher le nombre d'oiseaux vivant sur chacune des deux îles, pour chaque année comprise entre 2013 et une année choisie par l'utilisateur.

Début de l'algorithme
Lire n
Affecter à a la valeur 20
Affecter à b la valeur 10
Affecter à i la valeur 2013
Afficher i
Afficher a
Afficher b
Tant que $i < n$ faire
    Affecter à c la valeur $(0,8a + 0,3b)$
    Affecter à b la valeur $(0,2a + 0,7\,b)$
    Affecter à a la valeur c
Fin du Tant que
Fin de l'algorithme

1. Cet algorithme comporte des oublis dans le traitement. Repérer ces oublis et les corriger.

2. On donne ci-dessous une copie d'écran des résultats obtenus après avoir corrigé l'algorithme précédent dans un logiciel d'algorithmique, l'utilisateur ayant choisi l'année 2020.

*** Algorithme lancé ***
En l'année 2013, a prend la valeur 20 et b prend la valeur 10
En l'année 2014, a prend la valeur 19 et b prend la valeur 11
En l'année 2015, a prend la valeur 18,5 et b prend la valeur 11,5
En l'année 2016, a prend la valeur 18,25 et b prend la valeur 11,75
En l'année 2017, a prend la valeur 18,125 et b prend la valeur 11,875
En l'année 2018. a prend la valeur 18,0425 et b prend la valeur 11,9375
En l'année 2019, a prend la valeur 18,03125 et b prend la valeur 11,96875
En l'année 2020, a prend la valeur 18,015625 et b prend la valeur 11,984375
***Algorithme terminé ***

Au vu de ces résultats, émettre des conjectures concernant le sens de variation et la convergence des suites (a_n) et (b_n).

Partie B - Étude mathématique

On note U_n la matrice colonne $\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix}$.

1. Montrer que, pour tout entier naturel n, $U_{n+1}=MU_n$, où M est une matrice carrée d'ordre 2 que l'on déterminera.
   On admet alors que $U_n=M^nU_0$ pour tout entier naturel $n\geqslant 1$.
2. À l'aide d'un raisonnement par récurrence, justifier que, pour tout entier naturel $n\geqslant 1$:
   $M^n=\begin{pmatrix} 0{,}6+0{,}4\times 0{,}5^n & 0{,}6-0{,}6\times 0{,}5^n \\ 0{,}4-0{,}4\times 0{,}5^n & 0{,}4+0{,}6\times 0{,}5^n \end{pmatrix}$.
   On ne détaillera le calcul que pour le premier des coefficients de la matrice M^n.
3. Exprimer a_n en fonction de n, pour tout entier naturel $n\geqslant 1$.
4. Avec ce modèle, peut-on dire qu'au bout d'un grand nombre d'années, le nombre d'oiseaux sur l'île A va se stabiliser? Si oui, préciser vers quelle valeur.

Correction centres étrangers juin 2013

Lecture de l'énoncé :

En notant a_n et b_n le nombre (d'oiseaux en millions) présents respectivement sur l'île A et sur l'île B, l'année 2013 + n, on a :

$a_0 = 20$, $b_0 = 10$

$a_{n+1} = 0{,}8\ a_n + 0{,}3\ b_n$ et $b_{n+1} = 0{,}2\ a_n + 0{,}7\ b_n$

(Un constat évident : pour tout $n\in\mathbb{N}$, $a_{n+1} + b_{n+1} = a_n + b_n = 30$ (puisque $a_0 + b_0 = 30$)

Partie A - Algorithmique et conjectures

1) L'algorithme doit afficher le nombre d'oiseaux vivant sur chacune des deux îles, pour chaque année comprise entre 2013 et une année choisie par l'utilisateur.

Il manque la déclaration des variables, l'incrémentation de i et l'affichage des résultats.

Étant donné l'écran suivant à la question 2/ :

Tester avec Algobox

Déclarer les variables :

n est un entier naturel

i est un entier naturel

a est un nombre

b est un nombre

c est un nombre

Incrémentation de i :

i prend la valeur $i + 1$

(recopie de c prend la valeur

```
VARIABLES
  n EST_DU_TYPE NOMBRE
  i EST_DU_TYPE NOMBRE
  a EST_DU_TYPE NOMBRE
  b EST_DU_TYPE NOMBRE
  c EST_DU_TYPE NOMBRE
DEBUT_ALGORITHME
  LIRE n
  a PREND_LA_VALEUR 20
  b PREND_LA_VALEUR 10
  i PREND_LA_VALEUR 2013
  AFFICHER "en l'année  "
  AFFICHER i
  AFFICHER "  a prend la valeur  "
  AFFICHER a
  AFFICHER "  et b prend la valeur  "
  AFFICHER b
  TANT_QUE (i<n) FAIRE
    DEBUT_TANT_QUE
    i PREND_LA_VALEUR i+1
    c PREND_LA_VALEUR 0.8*a+0.3*b
    b PREND_LA_VALEUR 0.2*a+0.7*b
    a PREND_LA_VALEUR c
    AFFICHER "en l'année  "
    AFFICHER i
    AFFICHER "  a prend la valeur  "
    AFFICHER a
    AFFICHER "  et b prend la valeur  "
    AFFICHER b
    FIN_TANT_QUE
FIN_ALGORITHME
```

Afficher i
Afficher a
Afficher b
avant " fin du tant que "

```
***Algorithme lancé***
Entrer n : 2020
en l'année  2013  a prend la valeur  20  et b prend la valeur  10
en l'année  2014  a prend la valeur  19  et b prend la valeur  11
en l'année  2015  a prend la valeur  18.5  et b prend la valeur  11.5
en l'année  2016  a prend la valeur  18.25  et b prend la valeur  11.75
en l'année  2017  a prend la valeur  18.125  et b prend la valeur  11.875
en l'année  2018  a prend la valeur  18.0625  et b prend la valeur  11.9375
en l'année  2019  a prend la valeur  18.03125  et b prend la valeur  11.96875
en l'année  2020  a prend la valeur  18.015625  et b prend la valeur  11.984375

***Algorithme terminé***
```

Avec une TI

```
:Prompt N
:20→A
:10→B
:2013→I
:Disp I
:Disp A
:Disp B
```

```
:Pause
:While I<N
:I+1→I
:0.8A+0.3B→C
:0.2A+0.7B→B
:C→A
:Disp I
```

```
:Disp A
:Disp B
:Pause
:End
```

```
N=?2020
                2013
                  20
                  10
```

2) Conjectures :

```
    2014         2016
      19        18.25
      11        11.75
    2015         2017
    18.5       18.125
    11.5       11.875
```

```
      2018
   18.0625
   11.9375
      2019
  18.03125
  11.96875
```

```
      2020
 18.015625
 11.984375
```

Il semble que (a_n) soit une suite strictement décroissante convergeant vers 18 et (b_n) une suite strictement croissante convergeant vers 12.

Partie B : Étude mathématique.

1) $U_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix}$ et $U_{n+1} = \begin{pmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \end{pmatrix}$

Comme $a_{n+1} = 0{,}8\ a_n + 0{,}3\ b_n$ et $b_{n+1} = 0{,}2\ a_n + 0{,}7\ b_n$, $a_0 = 20$, $b_0 = 10$

en posant $M = \begin{pmatrix} 0{,}8 & 0{,}3 \\ 0{,}2 & 0{,}7 \end{pmatrix}$, on a : $U_{n+1} = \begin{pmatrix} 0{,}8 & 0{,}3 \\ 0{,}2 & 0{,}7 \end{pmatrix} U_n$ avec $U_0 = \begin{pmatrix} 20 \\ 10 \end{pmatrix}$.

On admet (la démonstration est immédiate par récurrence) que :
$U_n = M^n\ U_0$ pour tout entier naturel $n \geqslant 1$.

2) **Démonstration par récurrence.**

Pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, soit la proposition P_n : $M^n = \begin{pmatrix} 0{,}6+0{,}4\times 0{,}5^n & 0{,}6-0{,}6\times 0{,}5^n \\ 0{,}4-0{,}4\times 0{,}5^n & 0{,}4+0{,}6\times 0{,}5^n \end{pmatrix}$

Démontrons que la proposition est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

Initialisation :

$n = 1$ $\quad M = \begin{pmatrix} 0{,}8 & 0{,}3 \\ 0{,}2 & 0{,}7 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 0{,}6+0{,}4\times 0{,}5^1 & 0{,}6-0{,}6\times 0{,}5^1 \\ 0{,}4-0{,}4\times 0{,}5^1 & 0{,}4+0{,}6\times 0{,}5^1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}8 & 0{,}3 \\ 0{,}2 & 0{,}7 \end{pmatrix}$

P_1 est vraie

Hérédité :

Soit un entier naturel n non nul tel que P_n est vérifiée.

On a donc : $M^n = \begin{pmatrix} 0{,}6+0{,}4\times 0{,}5^n & 0{,}6-0{,}6\times 0{,}5^n \\ 0{,}4-0{,}4\times 0{,}5^n & 0{,}4+0{,}6\times 0{,}5^n \end{pmatrix}$. (Hypothèse de récurrence)

Or, $M^{n+1} = M\times M^n$

Calcul du premier coefficient du produit :

$$\begin{pmatrix} 0{,}8 & 0{,}3 \\ 0{,}2 & 0{,}7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0{,}6+0{,}4\times 0{,}5^n & 0{,}6-0{,}6\times 0{,}5^n \\ 0{,}4-0{,}4\times 0{,}5^n & 0{,}4+0{,}6\times 0{,}5^n \end{pmatrix}$$

$$0{,}8\times(0{,}6+0{,}4\times 0{,}5^n)+0{,}3\times(0{,}4-0{,}4\times 0{,}5^n) = 0{,}48 + 0{,}32\times 0{,}5^n + 0{,}12 - 0{,}12\times 0{,}5^n$$

$$= 0{,}6 + (0{,}32 - 0{,}12)\times 0{,}5^n \qquad \text{Or, } 0{,}2 = 0{,}4\times 0{,}5$$

$$= 0{,}6 + 0{,}4\times 0{,}5\times 0{,}5^n$$

$$= 0{,}6 + 0{,}4\times 0{,}5^{n+1}$$

(les calculs des autres coefficients mènent à …)

$$M^{n+1} = \begin{pmatrix} 0{,}6+0{,}4\times 0{,}5^{n+1} & 0{,}6-0{,}6\times 0{,}5^{n+1} \\ 0{,}4-0{,}4\times 0{,}5^{n+1} & 0{,}4+0{,}6\times 0{,}5^{n+1} \end{pmatrix}$$

P_{n+1} est vérifiée.

On a montré : P_1 vraie et $\mathrm{P}_n \Rightarrow \mathrm{P}_{n+1}$

Conclusion :

D'après l'axiome de récurrence, la proposition P_n est vraie pour tout entier naturel $n \geqslant 1$.

3) On sait que : $U_n = M^n\ U_0$ pour tout entier naturel $n \geqslant 1$.

$$U_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}6+0{,}4\times 0{,}5^n & 0{,}6-0{,}6\times 0{,}5^n \\ 0{,}4-0{,}4\times 0{,}5^n & 0{,}4+0{,}6\times 0{,}5^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 20 \\ 10 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} (0{,}6+0{,}4\times 0{,}5^n)\times 20+(0{,}6-0{,}6\times 0{,}5^n)\times 10 \\ (0{,}4-0{,}4\times 0{,}5^n)\times 20+(0{,}4+0{,}6\times 0{,}5^n)\times 10 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 18+(8-6)\times 0{,}5^n \\ 12-(8-6)\times 0{,}5^n \end{pmatrix}$$

$a_n = 18 + 2\times 0{,}5^n$ (et $b_n = 12 - 2\times 0{,}5^n$)

4) Comme –1 < 0,5 < 1, la suite géométrique $(0{,}5^n)$ converge vers 0, d'où, la suite (a_n) converge vers 18.

D'autre part, comme 0 < 0,5 < 1, la suite géométrique $(0{,}5^n)$ est strictement décroissante.

Comme 2 > 0, ($2\times 0{,}5^n$) est une suite strictement décroissante.

la conjecture :
(a_n) est une suite strictement décroissante convergeant vers 18 est confirmée.
la population de l'île A se stabilise autour de 18 millions d'oiseaux.

Liban mai 2013 Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 3$, $u_1 = 8$ et, pour tout n supérieur ou égal à 0 :
$u_{n+2} = 5u_{n+1} - 6u_n$.
1. Calculer u_2 et u_3.

2. Pour tout entier naturel n > 2, on souhaite calculer u_n à l'aide de l'algorithme suivant :

Variables : a, b et c sont des nombres réels
i et n sont des nombres entiers naturels supérieurs ou égaux à 2
Initialisation : a prend la valeur 3
b prend la valeur 8
Traitement : Saisir n
Pour i variant de 2 à n faire
c prend la valeur a
a prend la valeur b
b prend la valeur ...
Fin Pour
Sortie : Afficher b

a. Recopier la ligne de cet algorithme comportant des pointillés et les compléter.
On obtient avec cet algorithme le tableau de valeurs suivant :

n	7	8	9	10	11	12	13	14	15
u_n	4 502	13 378	39 878	119 122	356 342	1 066 978	3 196 838	9 582 322	28 730 582

b. Quelle conjecture peut-on émettre concernant la monotonie de la suite (u_n) ?

3. Pour tout entier naturel n, on note C_n la matrice colonne $\begin{pmatrix} u_{n+1} \\ u_n \end{pmatrix}$.

On note A la matrice carrée d'ordre 2 telle que, pour tout entier naturel n, $C_{n+1} = A\, C_n$
Déterminer A et prouver que, pour tout entier naturel n, $C_n = A^n\ C_0$.

4. Soient P = $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, D = $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ et Q = $\begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$
Calculer QP .
On admet que A = PDQ.
Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel non nul n, $A^n = P\, D^n\, Q$
5. À l'aide des questions précédentes, on peut établir le résultat suivant, que l'on admet.
Pour tout entier naturel non nul n,

$$A^n = \begin{pmatrix} -2^{n+1}+3^{n+1} & 3\times 2^{n+1}-2\times 3^{n+1} \\ -2^n+3^n & 3\times 2^n-2\times 3^n \end{pmatrix}.$$

En déduire une expression de u_n en fonction de n.
La suite (u_n) a-t-elle une limite ?

Correction Liban mai 2013

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 3$, $u_1 = 8$ et, pour tout n supérieur ou égal à 0 :
$u_{n+2} = 5u_{n+1} - 6u_n$.

1. Calculer u_2 et u_3.

$u_2 = 5u_1 - 6u_0 = 40 - 18 = 22$

$u_3 = 5u_2 - 6u_1 = 110 - 48 = 62$

2. Pour tout entier naturel $n > 2$, on souhaite calculer u_n à l'aide de l'algorithme suivant :

Variables *:*	*a, b et c sont des nombres réels*
	i et n sont des nombres entiers naturels supérieurs ou égaux à 2
Initialisation :	*a prend la valeur 3*
	b prend la valeur 8
Traitement *:*	*Saisir n*
	Pour i variant de 2 à n faire
	c prend la valeur a
	a prend la valeur b
	b prend la valeur ...
	Fin Pour
Sortie *:*	*Afficher b*

a. Recopier la ligne de cet algorithme comportant des pointillés et les compléter.

b prend la valeur $5a - 6c$.

On obtient avec cet algorithme le tableau de valeurs suivant :

n	***7***	***8***	***9***	***10***	***11***	***12***	***13***	***14***	***15***
u_n	*4 502*	*13 378*	*39 878*	*119 122*	*356 342*	*1 066 978*	*3 196 838*	*9 582 322*	*28 730 582*

b. Quelle conjecture peut-on émettre concernant la monotonie de la suite (u_n) ?

La suite (u_n) est croissante et diverge vers $+\infty$.

3. Pour tout entier naturel n, on note C_n la matrice colonne $\begin{pmatrix} u_{n+1} \\ u_n \end{pmatrix}$.

On note A la matrice carrée d'ordre 2 telle que, pour tout entier naturel n, $C_{n+1} = A\,C_n$

Déterminer A et prouver que, pour tout entier naturel n, $C_n = A^n\ C_0$.

(cf. suite géométrique)

$A = \begin{pmatrix} 5 & -6 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ En effet : $C_{n+1} = \begin{pmatrix} u_{n+2} \\ u_{n+1} \end{pmatrix}$ $u_{n+2} = 5u_{n+1} - 6u_n$. et $u_{n+1} = 1\times u_{n+1} + 0.u_n$

$$\begin{pmatrix} 5 & -6 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_{n+1} \\ u_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5u_{n+1} - 6u_n \\ 1\times u_{n+1} + 0\times u_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_{n+2} \\ u_{n+1} \end{pmatrix}$$

propriété à démontrer : pour tout entier naturel n, $C_n = A^n\ C_0$.

Initialisation :

$n = 0$, comme $A^0 = I_2$ matrice identité, la propriété est vraie

Hérédité :

Soit un entier n tel que $C_n = A^n\ C_0$.

On a alors : $C_{n+1} = A\,C_n = A\,A^n\ C_0 = A^{n+1}\ C_0$

Conclusion :

D'après l'axiome de récurrence, pour tout entier naturel n, $C_n = A^n\ C_0$.

4. Soient $P = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ et $Q = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$

Calculer QP.

On admet que A = PDQ.
Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel non nul n, $A^n = P D^n Q$
(cf. diagonalisation des matrices)

$$\begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1\times2+3\times1 & -1\times3+3\times1 \\ 1\times2+(-2)\times1 & 1\times3+(-2)\times1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2 \text{ (matrice identité d'ordre 2)}$$

Propriété à démontrer : pour tout entier naturel non nul n, $A^n = P D^n Q$
Initialisation :
$n = 1$, A = PDQ. (Donnée)
Hérédité :
Soit un entier $n \geqslant 1$ tel que $A^n = P D^n Q$
On a alors : $A^{n+1} = A A^n = PDQ(P D^n Q)$
Par associativité du produit de matrices :
$A^{n+1} = PD(QP) D^n Q$ Or, $QP = I_2$, d'où,
$A^{n+1} = P(D D^n)Q = P D^{n+1} Q$
Conclusion :
D'après l'axiome de récurrence, pour tout entier naturel non nul n, $A^n = P D^n Q$

5. À l'aide des questions précédentes, on peut établir le résultat suivant, que l'on admet.

$$A^n = \begin{pmatrix} -2^{n+1}+3^{n+1} & 3\times2^{n+1}-2\times3^{n+1} \\ -2^n+3^n & 3\times2^n-2\times3^n \end{pmatrix}.$$

En déduire une expression de u_n en fonction de n.
La suite (u_n) a-t-elle une limite ?
D'après la donné de A^n, et la relation $C_n = A^n C_0$, on a :

$$C_n = \begin{pmatrix} -2^{n+1}+3^{n+1} & 3\times2^{n+1}-2\times3^{n+1} \\ -2^n+3^n & 3\times2^n-2\times3^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 8 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8(-2^{n+1}+3^{n+1})+3(3\times2^{n+1}-2\times3^{n+1}) \\ 8(-2^n+3^n)+3(3\times2^n-2\times3^n) \end{pmatrix}$$

$u_n = 2^n + 2\times 3^n$ (ne pas oublier de vérifier en prenant les valeurs connues u_0, u_1, ..)

Comme 2 > 1 et 3 > 1, les deux suites (2^n) et (3^n) divergent vers +∞.
Par somme, (u_n) diverge vers +∞.

Métropole juin 2013 **Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité**

On étudie la population d'une région imaginaire. Le 1er janvier 2013, cette région comptait 250 000 habitants dont 70 % résidaient à la campagne et 30 % en ville.

L'examen des données statistiques recueillies au cours de plusieurs années amène à choisir de modéliser l'évolution de la population pour les années à venir de la façon suivante :

* l'effectif de la population est globalement constant,

* chaque année, 5 % de ceux qui résident en ville décident d'aller s'installer à la campagne et 1 % de ceux qui résident à la campagne choisissent d'aller habiter en ville.

Pour tout entier naturel n, on note v_n le nombre d'habitants de cette région qui résident en ville au 1er janvier de l'année $(2013+n)$ et c_n le nombre de ceux qui habitent à la campagne à la même date.

1. Pour tout entier naturel n, exprimer v_{n+1} et c_{n+1} en fonction de v_n et c_n.
2. Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 0,95 & 0,01 \\ 0,05 & 0,99 \end{pmatrix}$.

   On pose $X=\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ où $a,\ b$ sont deux réels fixés et $Y=AX$.

   Déterminer, en fonction de a et b, les réels c et d tels que $Y=\begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}$.

Les résultats précédents permettent d'écrire que pour tout entier naturel n,
$X_{n+1}=AX_n$ où $X_n=\begin{pmatrix} v_n \\ c_n \end{pmatrix}$. On peut donc en déduire que pour tout entier naturel $n,\ X_n=A^n X_0$.

3. Soient les matrices $P = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}$ et $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0,94 \end{pmatrix}$.

a. Calculer PQ et QP. En déduire la matrice P^{-1} en fonction de Q.

b. Vérifier que la matrice $P^{-1}AP$ est une matrice diagonale D que l'on précisera.

c. Démontrer que pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1, $A^n=PD^nP^{-1}$.

4. Les résultats des questions précédentes permettent d'établir que

$$v_n=\frac{1}{6}\left(1+5\times 0,94^n\right)v_0+\frac{1}{6}\left(1-0,94^n\right)c_0.$$

Quelles informations peut-on en déduire pour la répartition de la population de cette région à long terme ?

Correction métropole 2013

1) Lecture de l'énoncé :

Au 1er janvier 2013, la région comporte 250 000 habitants répartis ainsi : 70 % résident à la campagne et 30 % en ville.

L'effectif de la région est constant et, chaque année, 5 % de ceux qui résident en ville s'installent à la campagne et 1 % de ceux qui résident à la campagne s'installent en ville.

En notant v_n et c_n le nombre d'habitants habitant respectivement la ville et la campagne au 1er janvier de l'année $(2013 + n)$, on a :

$\begin{cases} v_{n+1} = 0{,}95\, v_n + 0{,}01\, c_n \\ c_{n+1} = 0{,}05\, v_n + 0{,}99\, c_n \end{cases}$, $\begin{cases} v_0 = 175000 \\ c_0 = 75000 \end{cases}$ (Remarque : Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n + c_n = 250000$)

2) Remarque : il est évident qu'en posant $X_n = \begin{pmatrix} v_n \\ c_n \end{pmatrix}$,

on peut introduire la matrice $A = \begin{pmatrix} 0{,}95 & 0{,}01 \\ 0{,}05 & 0{,}99 \end{pmatrix}$ telle que $X_{n+1} = A\, X_n$, et,

par récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $X_n = A^n\ X_0$ avec $X_0 = \begin{pmatrix} 175000 \\ 75000 \end{pmatrix}$.

On pose $A = \begin{pmatrix} 0{,}95 & 0{,}01 \\ 0{,}05 & 0{,}99 \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ et $Y = \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}$.

$$Y = AX \Leftrightarrow \begin{cases} c = 0{,}95\, a + 0{,}01\, b \\ d = 0{,}05\, a + 0{,}99\, b \end{cases}$$

3) Diagonalisation de *A*.

Rappel et recherche des valeurs propres (matrice diagonale) et des vecteurs propres :

On cherche s'il existe des matrices *P* et *D* (matrice diagonale) telles que $P^{-1} AP = D$,

En multipliant à gauche par *P*, on cherche : $AP = PD$.

Posons $P = \begin{pmatrix} x & z \\ y & t \end{pmatrix}$ et $D = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}$ $V = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $W = \begin{pmatrix} z \\ t \end{pmatrix}$.

$$AP = PD \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0{,}95 & 0{,}01 \\ 0{,}05 & 0{,}99 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & z \\ y & t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & z \\ y & t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}$$

ce qui donne quatre équations qu'on peut regrouper deux-à-deux :

$\begin{cases} 0{,}95\, x + 0{,}01\, y = \alpha\, x \\ 0{,}05\, x + 0{,}99\, y = \alpha\, y \end{cases}$ et $\begin{cases} 0{,}95\, z + 0{,}01\, t = \beta z \\ 0{,}05\, z + 0{,}99\, t = \beta\, t \end{cases}$

Si les réels α et β existent, ils sont solutions d'un système d'inconnu λ : $\begin{cases} (0{,}95 - \lambda) x + 0{,}01\, y = 0 \\ 0{,}05\, x + (0{,}99 - \lambda) y = 0 \end{cases}$

qui peut s'écrire : $(A - \lambda\, I_2) V = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ avec I_2 matrice identité et $V = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

(ou $(A - \lambda\, I_2) W = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ avec $W = \begin{pmatrix} z \\ t \end{pmatrix}$)

Vocabulaire :

α et β sont les valeurs propres, les vecteurs $V = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $W = \begin{pmatrix} z \\ t \end{pmatrix}$ non nuls sont les vecteurs propres définis à un coefficient près.

Si la matrice $A - \lambda\, I_2$ est inversible, on obtient : $V = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ …. ce qui ne convient pas …

Pour l'existence des réels α et β, il faut donc que le déterminant de $A - \lambda\, I_2$ soit nul.

or, dét($A - \lambda\, I_2$) = (0,95 – λ)(0,99 – λ) – 0,05×0,01 = λ² – 1,94λ + 0,94 = (λ – 1)(λ – 0,94)

On a donc deux valeurs propres : α = 1 et β = 0,94

Un vecteur propre associé à α = 1 vérifie : –0,05*x* + 0,01*y* = 0.

On peut choisir : *x* = 1 et *y* = 5.

Un vecteur propre associé à $\beta = 0{,}94$ vérifie : $0{,}01z + 0{,}01t = 0$.
On peut choisir : $z = -1$, $t = 1$.

Finalement : $P = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}$ et $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0{,}94 \end{pmatrix}$

Comme dét(P) = 6, la matrice P est inversible et a pour inverse $P^{-1} = \dfrac{1}{6}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -5 & 1 \end{pmatrix}$.

Retour à l'énoncé :

Soient $P = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}$ et $Q = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -5 & 1 \end{pmatrix}$

a) $PQ = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -5 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-(-5) & 1-1 \\ 5-5 & 5+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix} = \dfrac{1}{6}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$QP = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -5 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 5 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+5 & -1+1 \\ -5+5 & -(-5)+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix} = \dfrac{1}{6}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

On en déduit que P est inversible et que $P^{-1} = \dfrac{1}{6}Q$.

b) $P^{-1}AP = \dfrac{1}{6}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -5 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0{,}95 & 0{,}01 \\ 0{,}05 & 0{,}99 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}$

$= \dfrac{1}{6}\begin{pmatrix} 0{,}95+0{,}05 & 0{,}01+0{,}99 \\ -5\times 0{,}95+0{,}05 & -5\times 0{,}01+0{,}99 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}$

$= \dfrac{1}{6}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -4{,}7 & 0{,}94 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}$

$= \dfrac{1}{6}\begin{pmatrix} 1+5 & -1+1 \\ -4{,}7+5\times 0{,}94 & +4{,}7+0{,}94 \end{pmatrix}$

$= \dfrac{1}{6}\begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 5{,}64 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0{,}94 \end{pmatrix}$

La matrice diagonale $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0{,}94 \end{pmatrix}$.

c) **Démonstration par récurrence.**

Pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, soit la proposition P_n : $A^n = PD^nP^{-1}$

Démontrons que la proposition est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

Initialisation :

$n = 1$ On sait : $P^{-1}AP = D$,

d'où, en multipliant à gauche par P et à droite par P^{-1}, il vient :

$A = PDP^{-1}$ P_1 est vraie

Hérédité :

Soit un entier naturel n non nul tel que P_n est vérifiée.

On a donc : $A^n = PD^nP^{-1}$. (Hypothèse de récurrence)

Or, $A^{n+1} = A\times A^n$

soit : $A^{n+1} = (PDP^{-1})(PD^nP^{-1})$

Le produit de matrices étant associatif, et, comme $P^{-1}P = I_2$ et $DD^n = D^{n+1}$, on obtient :

$A^{n+1} = PD^{n+1}P^{-1}$

P_{n+1} est vérifiée.

On a montré : P_1 vraie et $\mathrm{P}_n \Rightarrow \mathrm{P}_{n+1}$

Conclusion :

D'après l'axiome de récurrence, la proposition P_n est vraie pour tout entier naturel $n \geqslant 1$.

4) **Les calculs** précédents permettent de déterminer v_n et c_n en fonction de n.

En effet : $X_n = \begin{pmatrix} v_n \\ c_n \end{pmatrix}$

$$X_n = A^n X_0 \text{ avec } X_0 = \begin{pmatrix} v_0 \\ c_0 \end{pmatrix} \text{, et, } A^n = PD^nP^{-1}$$

D, étant une matrice diagonale, $D^n = \begin{pmatrix} 1^n & 0 \\ 0 & 0{,}94^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0{,}94^n \end{pmatrix}$

$$X_n = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 5 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0{,}94^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -5 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_0 \\ c_0 \end{pmatrix}$$

On obtient : $v_n = \frac{1}{6}(1 + 5\times 0{,}94^n)v_0 + \frac{1}{6}(1 - 0{,}94^n)c_0$

et $c_n = \frac{1}{6}(5 - 5\times 0{,}94^n)v_0 + \frac{1}{6}(5 + 0{,}94^n)c_0$

Soit : $v_n = \frac{1}{6}(1 + 5\times 0{,}94^n)v_0 + \frac{1}{6}(1 - 0{,}94^n)c_0$

Comme $-1 < 0{,}94 < 1$, la suite géométrique $(0{,}94^n)$ converge vers 0, et, par produit et somme, la suite (v_n) converge vers $\frac{1}{6}v_0 + \frac{1}{6}c_0 = \frac{1}{6}(v_0 + c_0) = \frac{1}{6}\times 250\,000$

(et (c_n) converge vers $\frac{5}{6}\times 250\,000$)

À long terme, la population se stabilise dans les proportions de $\frac{1}{6}$ en ville et $\frac{5}{6}$ à la campagne.

Polynésie juin 2013 **Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité**

Un opérateur téléphonique A souhaite prévoir l'évolution de nombre de ses abonnés dans une grande ville par rapport à son principal concurrent B à partir de 2013.
En 2013, les opérateurs A et B ont chacun 300 milliers d'abonnés.

Pour tout entier naturel n, on note a_n le nombre d'abonnés, en milliers, de l'opérateur A la n-ième année après 2013, et b_n le nombre d'abonnés, en milliers, de l'opérateur B la n-ième année après 2013.
Ainsi, $a_0=300$ et $b_0=300$.

Des observations réalisées les années précédentes conduisent à modéliser la situation par la relation suivante : pour tout entier naturel n, $\begin{cases} a_{n+1}=0{,}7a_n+0{,}2b_n+60 \\ b_{n+1}=0{,}1a_n+0{,}6b_n+70 \end{cases}$.

On considère les matrices $M = \begin{pmatrix} 0{,}7 & 0{,}2 \\ 0{,}1 & 0{,}6 \end{pmatrix}$ et $P = \begin{pmatrix} 60 \\ 70 \end{pmatrix}$.

Pour tout entier naturel n, on note $U_n=\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix}$.

1.
   a. Déterminer U_1.
   b. Vérifier que, pour tout entier naturel n, $U_{n+1}=M\times U_n+P$.
2. On note I la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.
   a. Calculer $(I-M)\times\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$.
   b. En déduire que la matrice $I-M$ est inversible et préciser son inverse.
   c. Déterminer la matrice U telle que $U=M\times U+P$.
3. Pour tout entier naturel, on pose $V_n=U_n-U$.
   a. Justifier que, pour tout entier naturel n, $V_{n+1}=M\times V_n$.
   b. En déduire que, pour tout entier naturel n, $V_n=M^n\times V_0$.
4. On admet que, pour tout entier naturel n, $V_n = \begin{pmatrix} \frac{-100}{3}\times 0{,}8^n-\frac{140}{3}\times 0{,}5^n \\ \frac{-50}{3}\times 0{,}8^n+\frac{140}{3}\times 0{,}5^n \end{pmatrix}$
   a. Pour tout entier naturel n, exprimer U_n en fonction de n et en déduire la limite de la suite (a_n).
   b. Estimer le nombre d'abonnés de l'opérateur A à long terme.

Correction Polynésie juin 2013

Énoncé :

Un opérateur téléphonique A souhaite prévoir l'évolution du nombre de ses abonnés dans une grande ville par rapport à son principal concurrent B à partir de 2013.

En 2013*, les opérateurs A et B ont chacun* 300 *milliers d'abonnés.*

Pour tout entier naturel n, on note a_n *, le nombre d'abonnés, en milliers, de l'opérateur A la n-ième année* *après* 2013, *et* b_n *le nombre d'abonnés, en milliers, de l'opérateur B la n-ième année après* 2013.

Ainsi $a_0 = 300$ *et* $b_0 = 300$.

Des observations réalisées les années précédentes conduisent à modéliser la situation par la relation suivante:

pour tout entier naturel n, $\begin{cases} a_{n+1} = 0{,}7\,a_n + 0{,}2\,b_n + 60 \\ b_{n+1} = 0{,}1\,a_n + 0{,}6\,b_n + 70 \end{cases}$

On considère les matrices $M = \begin{pmatrix} 0{,}7 & 0{,}2 \\ 0{,}1 & 0{,}6 \end{pmatrix}$ *et* $P = \begin{pmatrix} 60 \\ 70 \end{pmatrix}$

Pour tout entier naturel n, on note U_n*, la matrice* $\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix}$.

1. a. Déterminer U_1

on sait : $\begin{cases} a_1 = 0{,}7\,a_0 + 0{,}2\,b_0 + 60 \\ b_1 = 0{,}1\,a_0 + 0{,}6\,b_0 + 70 \end{cases}$,

comme $a_0 = 300$ et $b_0 = 300$, on obtient :

$a_1 = 0{,}7\times300 + 0{,}2\times300 + 60 = 0{,}9\times300 + 60 = 270 + 60 = 330$

$b_1 = 0{,}1\times300 + 0{,}6\times300 + 70 = 0{,}7\times300 + 70 = 280$

Conclusion : $U_1 = \begin{pmatrix} 330 \\ 280 \end{pmatrix}$

b. Vérifier que, pour tout entier naturel n, $U_{n+1} = M\times U_n + P$

Pour tout entier naturel *n*,

$$M\times U_n + P = \begin{pmatrix} 0{,}7 & 0{,}2 \\ 0{,}1 & 0{,}6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 60 \\ 70 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 0{,}7\times a_n + 0{,}2\,b_n \\ 0{,}1\times a_n + 0{,}6\times b_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 60 \\ 70 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0{,}7\times a_n + 0{,}2\,b_n + 60 \\ 0{,}1\times a_n + 0{,}6\times b_n + 70 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \end{pmatrix} = U_{n+1}.$$

CQFD.

2) On note I la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

a. Calculer $(I - M)\times \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$

$$I - M = \begin{pmatrix} 0{,}3 & -0{,}2 \\ -0{,}1 & 0{,}4 \end{pmatrix}$$

$$(I - M)\times \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}3 & -0{,}2 \\ -0{,}1 & 0{,}4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0{,}3\times4-0{,}2\times1 & 0{,}3\times2-0{,}2\times3 \\ -0{,}1\times4+0{,}4\times1 & -0{,}1\times2+0{,}4\times3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

b. En déduire que la matrice I – M est inversible et préciser son inverse.

rappel du cours :

Définition :

Une matrice carrée A d'ordre n est dite inversible (ou régulière) lorsqu'il existe une matrice carrée A' d'ordre n telle que $AA' = I_n$ et $A'A = I_n$ où I_n est la matrice identité d'ordre n.

Propriétés :

1) S'il existe une matrice A' telle que l'une des égalités $AA' = I_n$ ou $A'A = I_n$ est vraie alors l'autre est vraie.

(Il suffit donc d'une seule des égalités pour prouver qu'une matrice est inversible.)

2) unicité de l'inverse

Si une matrice A est inversible alors la matrice A' telle que $AA' = I_n$ est unique.

Retour à l'exercice :

Puisque qu'il existe une matrice B telle que $(I - M)B = \mathrm{I}$, la matrice $I - M$ est inversible et l'inverse de $I - M$ est $B = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$.

On a aussi : $B\times(I - M) = I$.

c. Déterminer la matrice U telle que $U = M\times U + P$.

$U = M\times U + P \Leftrightarrow U - M\times U = P \Leftrightarrow (I - M)\times U = P$

On en déduit que : $B\times(\mathrm{I} - M)\times U = B\times P$.

D'où, $U = B\times P = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 60 \\ 70 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4\times60+2\times70 \\ 1\times60+3\times70 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 380 \\ 270 \end{pmatrix}$

3) Pour tout entier naturel n, on pose $V_n = U_n - U$

a. Justifier que, pour tout entier naturel n, $V_{n+1} = M\times V_n$

Soit un entier naturel n,

par définition de la suite (V_n), $V_{n+1} = U_{n+1} - U$.

Comme $U_{n+1} = M\times U_n + P$, $V_{n+1} = M\times U_n + P - U$

Or, $U = M\times U + P$.

On a alors : $V_{n+1} = M\times U_n + P - (M\times U + P)$

$= M\times U_n - M\times U$

$= M\times(U_n - U) = M\times V_n$

Conclusion : pour tout entier naturel *n*, $V_{n+1} = M \times V_n$

b. En déduire que, pour tout entier naturel n, $V_n = M^n V_0$.

Démonstration par récurrence.

Pour tout entier naturel *n*, soit la proposition P_n : $V_n = M^n V_0$.

Démontrons que la proposition est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Initialisation :

$n = 0$ Comme $M^0 = I$, on a l'égalité $V_0 = M^0 V_0$

P_0 est vraie

Hérédité :

Soit un entier naturel *n* tel que P_n est vérifiée.

On a donc : $V_n = M^n V_0$. (Hypothèse de récurrence)

Or, $V_{n+1} = M \times V_n$ d'après 3a)

d'où, $V_{n+1} = M \times M^n V_0$ d'après l'hypothèse de récurrence

$= M^{n+1} V_0$.

P_{n+1} est vérifiée.

On a montré : P_0 vraie et $\mathrm{P}_n \Rightarrow \mathrm{P}_{n+1}$

Conclusion :

D'après l'axiome de récurrence, la proposition P_n est vraie pour tout entier naturel *n*.

4. On admet que, pour tout entier naturel n, $V_n = \begin{pmatrix} \frac{-100}{3} \times 0{,}8^n - \frac{140}{3} \times 0{,}5^n \\ \frac{-50}{3} \times 0{,}8^n + \frac{140}{3} \times 0{,}5^n \end{pmatrix}$

a. Pour tout entier naturel n, exprimer U_n *en fonction de n et en déduire la limite de la suite* (a_n).

Pour tout entier naturel *n*, $V_n = U_n - U$ et $U = \begin{pmatrix} 380 \\ 270 \end{pmatrix}$,

d'où, $U_n = V_n + U = \begin{pmatrix} \frac{-100}{3} \times 0{,}8^n - \frac{140}{3} \times 0{,}5^n + 380 \\ \frac{-50}{3} \times 0{,}8^n + \frac{140}{3} \times 0{,}5^n + 270 \end{pmatrix}$

On a donc : pour tout entier naturel *n*, $a_n = \frac{-100}{3} \times 0{,}8^n - \frac{140}{3} \times 0{,}5^n + 380$

Comme $-1 < 0{,}8 < 1$ et $-1 < 0{,}5 < 1$, les suites géométriques $(0{,}8^n)$ et $(0{,}5^n)$ convergent vers 0 et par somme, la suite (a_n) converge vers 380.

b. Estimer le nombre d'abonnés de l'opérateur A à long terme.

On peut estimer le nombre d'abonnés de l'opérateur A à long terme à 380 000 abonnés

Pondichéry avril 2013 **Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité**

On étudie l'évolution dans le temps du nombre de jeunes et d'adultes dans une population d'animaux.
Pour tout entier naturel n, on note j_n le nombre d'animaux jeunes après n années d'observation et a_n le nombre d'animaux adultes après n années d'observation.
Il y a au début de la première année de l'étude, 200 animaux jeunes et 500 animaux adultes.
Ainsi $j_0=200$ et $a_0=500$.
On admet que pour tout entier naturel n on a :

$$\begin{cases} j_{n+1}=0{,}125\,j_n+0{,}525a_n \\ a_{n+1}=0{,}625\,j_n+0{,}625a_n \end{cases}$$

On introduit les matrices suivantes :
$A = \begin{pmatrix} 0{,}125 & 0{,}525 \\ 0{,}625 & 0{,}625 \end{pmatrix}$ et, pour tout entier naturel n, $U_n = \begin{pmatrix} j_n \\ a_n \end{pmatrix}$.

1.
   a. Montrer que pour tout entier naturel $n, U_{n+1}=A\times U_n$.
   b. Calculer le nombre d'animaux jeunes et d'animaux adultes après un an d'observation puis après deux ans d'observation (résultats arrondis à l'unité près par défaut).
   c. Pour tout entier naturel n non nul, exprimer U_n en fonction de A^n et de U_0.
2. On introduit les matrices suivantes $Q = \begin{pmatrix} 7 & 3 \\ -5 & 5 \end{pmatrix}$ et $D = \begin{pmatrix} -0{,}25 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.
   a. On admet que la matrice Q est inversible et que $Q^{-1} = \begin{pmatrix} 0{,}1 & -0{,}06 \\ 0{,}1 & 0{,}14 \end{pmatrix}$.
      Montrer que $Q\times D\times Q^{-1}=A$.
   b. Montrer par récurrence sur n que pour tout entier naturel n non nul : $A^n=Q\times D^n\times Q^{-1}$.
   c. Pour tout entier naturel n non nul, déterminer D^n en fonction de n.
3. On admet que pour tout entier naturel n non nul,
   $A^n = \begin{pmatrix} 0{,}3+0{,}7\times(-0{,}25)^n & 0{,}42-0{,}42\times(-0{,}25)^n \\ 0{,}5-0{,}5\times(-0{,}25)^n & 0{,}7+0{,}3\times(-0{,}25)^n \end{pmatrix}$
   a. En déduire les expressions de j_n et a_n en fonction de n et déterminer les limites de ces deux suites.
   b. Que peut-on en conclure pour la population d'animaux étudiée ?

Correction Pondichéry 2013

Analyse du modèle : (Voir modèle de Leslie)
Ici, le modèle est très simplifié …

Données : j_n nombre de jeunes l'année n.

a_n nombre d'adultes l'année *n*.

$$\begin{cases} j_{n+1}=0{,}125\, j_n+0{,}525\, a_n \\ a_{n+1}=0{,}625\, j_n+0{,}625\, a_n \end{cases}$$

Pour l'année *n* + 1 :
Une proportion de " jeunes " reste " jeunes " l'année suivante (par exemple : on considère que les " matures " ont deux ans et plus), une proportion devient " adultes " et une proportion meurt.

Les adultes de l'année *n* donnent naissance à des jeunes l'année *n* + 1, restent adultes ou meurent.

Ici, 52,5 % des " adultes " donnent naissance à des " jeunes " et 12,5 % des " jeunes " restent " jeunes "
62,5 % des " jeunes " deviennent adultes et 62,5 % des " adultes " restent " adultes "
Chaque année *n*, 25 % des jeunes et 37,5 % des adultes disparaissent

Correction :

$\mathrm{j}_0 = 200$, $a_0 = 500$, $\mathrm{U}_{n+1} = \begin{pmatrix} j_{n+1} \\ a_{n+1} \end{pmatrix}$, $\mathrm{U}_n = \begin{pmatrix} j_n \\ a_n \end{pmatrix}$, $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 0{,}125 & 0{,}525 \\ 0{,}625 & 0{,}625 \end{pmatrix}$

1 a)
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$\begin{pmatrix} 0{,}125 & 0{,}525 \\ 0{,}625 & 0{,}625 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} j_n \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}125\, j_n+0{,}525\, a_n \\ 0{,}625\, j_n+0{,}625\, a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} j_{n+1} \\ a_{n+1} \end{pmatrix}$$

D'où, $\mathrm{U}_{n+1} = \mathrm{A}\, \mathrm{U}_n$.

b) $\mathrm{U}_0 = \begin{pmatrix} 200 \\ 500 \end{pmatrix}$

Après 1 an d'observation, $\mathrm{U}_1 = \begin{pmatrix} 0{,}125 & 0{,}525 \\ 0{,}625 & 0{,}625 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 200 \\ 500 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}125\times 200+0{,}525\times 500 \\ 0{,}625\times 200+0{,}625\times 500 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 287{,}5 \\ 437{,}5 \end{pmatrix}$.

Après 2 ans d'observation, $\mathrm{U}_2 = \begin{pmatrix} 0{,}125 & 0{,}525 \\ 0{,}625 & 0{,}625 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 287{,}5 \\ 437{,}5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}125\times 287{,}5+0{,}525\times 437{,}5 \\ 0{,}625\times 287{,}5+0{,}625\times 437{,}5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 265{,}625 \\ 453{,}125 \end{pmatrix}$

En arrondissant à l'unité près par défaut : $\mathrm{j}_1 = 287$ et $a_1 = 437$.
En arrondissant à l'unité près par défaut : $\mathrm{j}_2 = 265$ et $a_2 = 453$.

Remarque : l'énoncé suggère d'arrondir par défaut, ce qui entraîne en prenant les valeurs arrondies de j_1 et a_1 :
Après 2 ans, $\mathrm{U}_2 = \begin{pmatrix} 0{,}125 & 0{,}525 \\ 0{,}625 & 0{,}625 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 287 \\ 437 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}125\times 287+0{,}525\times 437 \\ 0{,}625\times 287+0{,}625\times 437 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 265{,}3 \\ 452{,}5 \end{pmatrix}$
En arrondissant à l'unité près par défaut : $\mathrm{j}_2 = 265$ *et* $a_2 = 452$.

c) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathrm{U}_n = \mathrm{A}^n\, \mathrm{U}_0$ proposition à démontrer.
Démonstration par récurrence :
initialisation :
$n = 1$, $\mathrm{U}_1 = \mathrm{A}^1\, \mathrm{U}_0$. L'égalité est vraie.
hérédité :
Soit **<u>un</u>** entier $n \geqslant 1$ tel que $\mathrm{U}_n = \mathrm{A}^n\, \mathrm{U}_0$ (hypothèse dé récurrence)
Or, $\mathrm{U}_{n+1} = \mathrm{A}\, \mathrm{U}_n$, d'où, $\mathrm{U}_{n+1} = \mathrm{A}\ \mathrm{A}^n\, \mathrm{U}_0 = \mathrm{A}^{n+1}\, \mathrm{U}_0$
On a montré : si la propriété est vraie pour un entier $n \geqslant 1$ alors elle est vraie pour l'entier suivant *n* + 1.
Conclusion :

D'après l'axiome de récurrence, la propriété est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

2) **Diagonalisation de la matrice A.**

Q = $\begin{pmatrix} 7 & 3 \\ -5 & 5 \end{pmatrix}$ D = $\begin{pmatrix} -0{,}25 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

a) On admet que Q est inversible et que $Q^{-1} = \begin{pmatrix} 0{,}1 & -0{,}06 \\ 0{,}1 & 0{,}14 \end{pmatrix}$

remarques (et compléments): ***où on peut voir quelques calculs qui auraient pu être demandés ...***

1) La matrice Q est inversible, puisque dét(Q) = 7×5 – (–5)×3 = 50,

d'où, $Q^{-1} = \dfrac{1}{50}\begin{pmatrix} 5 & -3 \\ 5 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}1 & -0{,}06 \\ 0{,}1 & 0{,}14 \end{pmatrix}$

2) Recherche de la matrice D et de la matrice Q.

Recherche des valeurs propres (α et β), ***et des vecteurs propres*** (V et W)

Recherche de α et β.

L'égalité $A = QD\,Q^{-1}$ équivaut à l'égalité AQ = QD

La matrice D = $\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}$ et la matrice Q = $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ avec $ad - bc \neq 0$

On est amené à résoudre l'équation $\begin{pmatrix} 0{,}125 & 0{,}525 \\ 0{,}625 & 0{,}625 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}$

On a donc le système : $\begin{pmatrix} 0{,}125a+0{,}525c & 0{,}125b+0{,}525d \\ 0{,}625a+0{,}625c & 0{,}625b+0{,}625d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a\alpha & b\beta \\ c\alpha & d\beta \end{pmatrix}$

qui mène à $\begin{cases} 0{,}125a+0{,}525c=a\alpha \\ 0{,}625a+0{,}625c=c\alpha \end{cases}$ (l'autre système avec b, d et β est identique)

En notant $V = \begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix}$ *et* $W = \begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix}$, *on a donc à résoudre* $AV = \alpha V$ *(et* $AW = \beta W$*)*

$$\begin{cases} 0{,}125a+0{,}525c=a\alpha \\ 0{,}625a+0{,}625c=c\alpha \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (0{,}125-\alpha)a+0{,}525c=0 \\ 0{,}625a+(0{,}625-\alpha)c=0 \end{cases} \begin{pmatrix} L1 \\ L2 \end{pmatrix}$$

En faisant (0,625 – α)(L1) – 0,525(L2), on établit une équation du second degré (*qui n'est autre que celle obtenue en faisant dét(A –* αI_2 *) = 0*)

Résolution de l'équation : $(0{,}625 - \alpha)(0{,}125 - \alpha) - 0{,}525\times0{,}625 = 0$

(quelques remarques pour les calculs : $0{,}625 = \dfrac{5}{8}$, $0{,}125 = \dfrac{1}{8}$ et $0{,}525 = \dfrac{21}{40}$ … en remplaçant par les écritures fractionnaires et en réduisant, l'équation devient …..)

$4\alpha^2 - 3\alpha - 1 = 0$ qui a deux solutions : 1 et $-\dfrac{1}{4} = -0{,}25$

L'une est α, l'autre β (on choisit pour être en cohérence avec l'énoncé proposé : $\alpha = -0{,}25$ et $\beta = 1$)

Recherche de V (V n'est pas unique …. tout vecteur colinéaire à V convient)

$\begin{cases} (0{,}125-\alpha)a+0{,}525c=0 \\ 0{,}625a+(0{,}625-\alpha)c=0 \end{cases}$ avec $\alpha = -0{,}25$ donne : $\begin{cases} 0{,}375a+0{,}525c=0 \\ 0{,}625a+0{,}875c=0 \end{cases} \begin{pmatrix} L1 \\ L2 \end{pmatrix}$

Les deux lignes sont équivalentes (Par exemple : L2 = $\dfrac{5}{3}$ L1).

Pour obtenir les solutions, on fixe une valeur (a ou c) et on exprime l'autre en fonction …

Par exemple : Soit a non nul fixé, $c = -\dfrac{0{,}75}{0{,}525}a = -\dfrac{5}{7}a$

Tout vecteur V = $a \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{5}{7} \end{pmatrix}$ avec $a \neq 0$ convient. (L'auteur de l'énoncé a choisi : V = $\begin{pmatrix} 7 \\ -5 \end{pmatrix}$)

Recherche de W (W n'est pas unique …. tout vecteur colinéaire à W convient)

$\begin{cases} (0{,}125-\alpha)b+0{,}525\,d=0 \\ 0{,}625\,b+(0{,}625-\alpha)d=0 \end{cases}$ avec α = 1 donne : $\begin{cases} -0{,}875\,b+0{,}525\,d=0 \\ 0{,}625\,b-0{,}375\,d=0 \end{cases} \begin{pmatrix} L1 \\ L2 \end{pmatrix}$

Les deux lignes sont équivalentes (Par exemple : L2 = $-\frac{5}{7}$ L1).

Les solutions sont : $d = \frac{0{,}875}{0{,}525}\,b = \frac{5}{3}\,b$.

Tout vecteur W = $b \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{5}{3} \end{pmatrix}$ avec $b \neq 0$ convient. (L'auteur de l'énoncé a choisi : W = $\begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix}$)

La matrice Q est donc la matrice $\begin{pmatrix} 7 & 3 \\ -5 & 5 \end{pmatrix}$

Résolution de la question posée dans le sujet

calcul de D Q^{-1} = $\begin{pmatrix} -0{,}25 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0{,}1 & -0{,}06 \\ 0{,}1 & 0{,}14 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} -0{,}25\times0{,}1+0\times0{,}1 & -0{,}25\times(-0{,}06)+0\times0{,}14 \\ 0\times0{,}1+1\times0{,}1 & 0\times(-0{,}06)+1\times0{,}14 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0{,}025 & 0{,}015 \\ 0{,}1 & 0{,}14 \end{pmatrix} = P$

Calcul de QD Q^{-1} = QP = $\begin{pmatrix} 7 & 3 \\ -5 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -0{,}025 & 0{,}015 \\ 0{,}1 & 0{,}14 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} 7\times(-0{,}025)+3\times0{,}1 & 7\times0{,}015+3\times0{,}14 \\ -5\times(-0{,}025)+5\times0{,}1 & -5\times0{,}015+5\times0{,}14 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}125 & 0{,}525 \\ 0{,}625 & 0.625 \end{pmatrix} = A$

b) pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, $A^n = Q\,D^n\,Q^{-1}$ proposition à démontrer.

Par récurrence :

Initialisation : $n = 1$

(Autrement dit : a-t-on l'égalité $A^1 = QD^1\,Q^{-1}$? c-à-d : $A \overset{?}{=} QD\,Q^{-1}$)

$A = QD\,Q^{-1}$ est vraie (*question précédente*)

hérédité :

Soit **un** entier $n \geqslant 1$ tel que $A^n = Q\,D^n\,Q^{-1}$ (hypothèse dé récurrence)

$A^n = Q\,D^n\,Q^{-1}$

d'où, $A^{n+1} = A\,A^n = (QD\,Q^{-1})(Q\,D^n\,Q^{-1})$ par associativité, on a :

$A^{n+1} = QD(Q^{-1}Q)\,D^n\,Q^{-1}$ Comme $Q^{-1}Q = I_2$ (matrice unité), on obtient :

$A^{n+1} = QD\,D^n\,Q^{-1} = Q\,D^{n+1}\,Q^{-1}$

conclusion :

D'après l'axiome de récurrence, la propriété est vraie pour tout $n\in\mathbb{N}^*$.

c) **D étant une matrice diagonale,**

$D^n = \begin{pmatrix} -0{,}25 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} (-0{,}25)^n & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ (cours ou petite preuve par récurrence)

3) On admet que $A^n = \begin{pmatrix} 0,3+0,7\times(-0,25)^n & 0,42-0,42\times(-0,25)^n \\ 0,5-0,5\times(-0,25)^n & 0,7+0,3\times(-0,25)^n \end{pmatrix}$

Remarque : le calcul ne pose pas de difficultés, il faut juste prendre le temps de le faire.

$$A^n = Q\,D^n\,Q^{-1} = \begin{pmatrix} 7 & 3 \\ -5 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (-0,25)^n & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0,1 & -0,06 \\ 0,1 & 0,14 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 7 & 3 \\ -5 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (-0,25)^n\times 0,1 & (-0,25)^n\times(-0,06) \\ 1\times 0,1 & 1\times 0,14 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 0,3+0,7\times(-0,25)^n & 0,42-0,42\times(-0,25)^n \\ 0,5-0,5\times(-0,25)^n & 0,7+0,3\times(-0,25)^n \end{pmatrix}$$

a) Comme $U_n = A^n\,U_0$ avec $U_0 = \begin{pmatrix} 200 \\ 500 \end{pmatrix}$, on a :

$$U_n = \begin{pmatrix} j_n \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,3+0,7\times(-0,25)^n & 0,42-0,42\times(-0,25)^n \\ 0,5-0,5\times(-0,25)^n & 0,7+0,3\times(-0,25)^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 200 \\ 500 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 200\times(0,3+0,7\times(-0,25)^n)+500\times(0,42-0,42\times(-0,25)^n) \\ 200\times(0,5-0,5\times(-0,25)^n)+500\times(0,7+0,3\times(-0,25)^n) \end{pmatrix}$$

Comme –1 < –0,25 < 1, la suite géométrique $((-0,25)^n)$ converge vers 0, et, par limite de somme, on a :
la suite (j_n) converge vers $200\times0,3 + 500\times0,42 = 60 + 210 = 270$
la suite (a_n) converge vers $200\times0,5 + 500\times0,7 = 100 + 350 = 450$

b) La population se stabilise avec les populations suivantes :
270 jeunes et 450 adultes.

On peut vérifier : $L = \begin{pmatrix} 270 \\ 450 \end{pmatrix}$ et $AL = \begin{pmatrix} 0,125 & 0,525 \\ 0,625 & 0,625 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 270 \\ 450 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,125\times270+0,525\times450 \\ 0,625\times270+0,625\times450 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 270 \\ 450 \end{pmatrix}$