Index

La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements, la cohérence globale des réponses sont valorisées.
Le recours à des tableaux et graphiques pour soutenir une argumentation ou présenter des résultats est valorisé, sous réserve qu'un commentaire en précise clairement la signification.
Extrait du B.O. concernant la notation de l'épreuve au baccalauréat.

Pondichéry avril 2014

Chaque jeune parent utilise chaque mois une seule marque de petits pots pour bébé. Trois marques X, Y et Z se partagent le marché. Soit n un entier naturel.

On note : X_n *l'événement « la marque X est utilisée le mois* n *»,*
Y_n *l'événement « la marque Y est utilisée le mois* n *»,*
Z_n *l'événement « la marque Z est utilisée le mois* n *».*

Les probabilités des événements X_n, Y_n, Z_n *sont notées respectivement* x_n, y_n, z_n.

La campagne publicitaire de chaque marque fait évoluer la répartition.
Un acheteur de la marque X le mois n*, a le mois suivant :*

- *50 % de chance de rester fidèle à cette marque,*
- *40 % de chance d'acheter la marque Y,*
- *10 % de chance d'acheter la marque Z.*

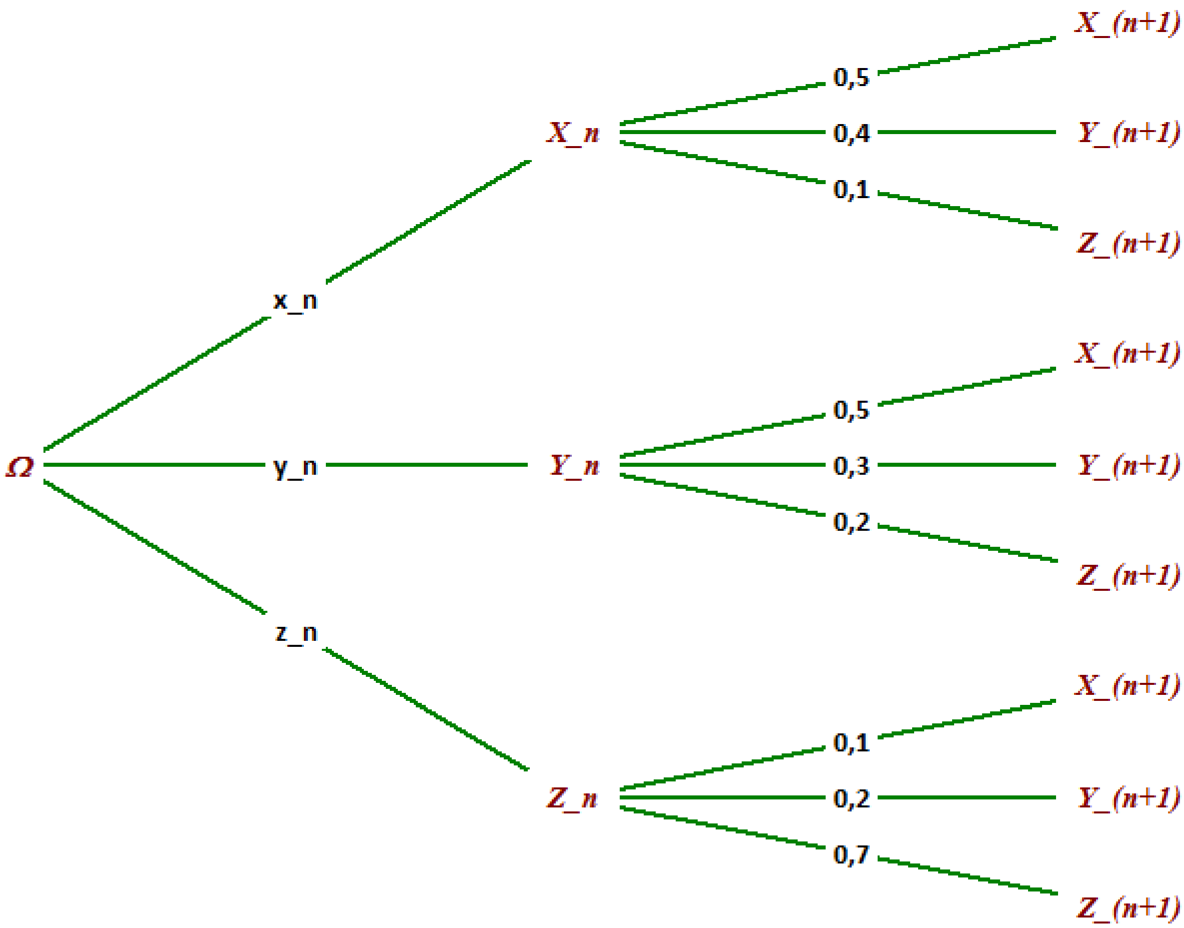
Un acheteur de la marque Y le mois n*, a le mois suivant :*

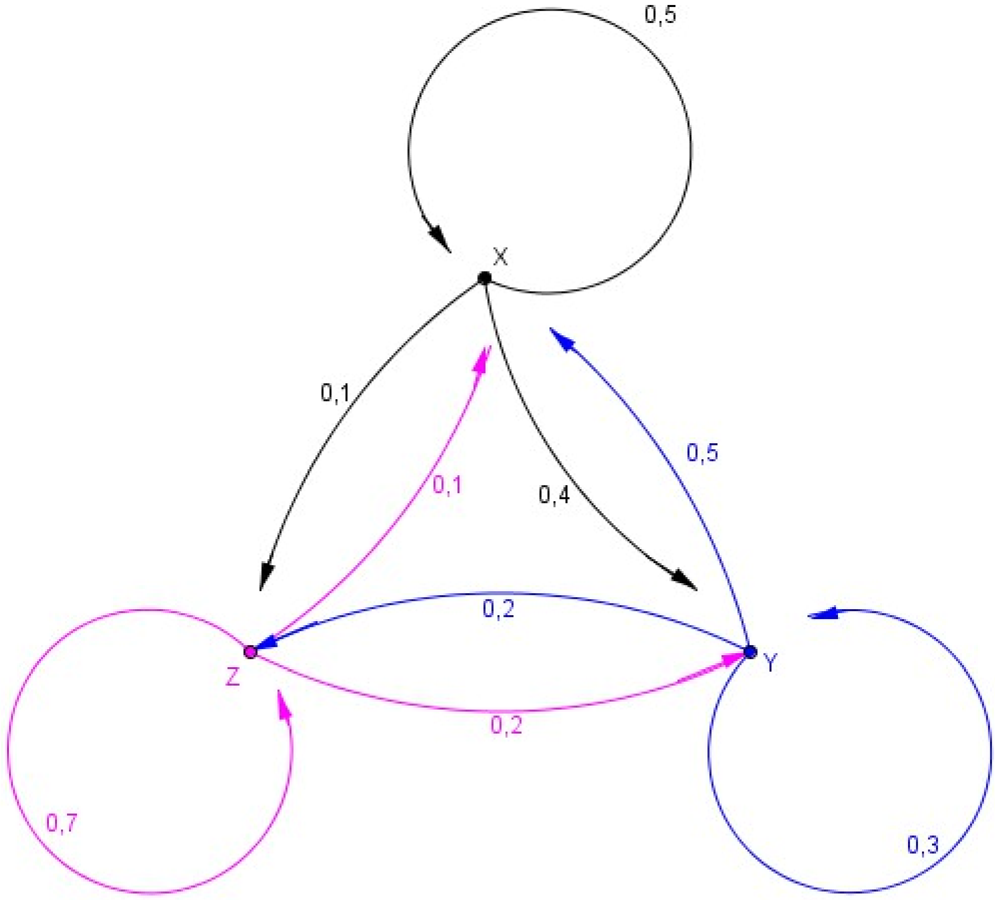
- *30 % de chance de rester fidèle à cette marque,*
- *50 % de chance d'acheter la marque X,*
- *20 % de chance d'acheter la marque Z.*

Un acheteur de la marque Z le mois n*, a le mois suivant :*

- *70 % de chance de rester fidèle à cette marque,*
- *10 % de chance d'acheter la marque X,*
- *20 % de chance d'acheter la marque Y.*

L'énoncé peut se représenter par un arbre pondéré, par un graphe probabiliste …


Ω
x_n
y_n
z_n
X_n
Y_n
Z_n
0,5
0,4
0,1
0,5
0,3
0,2
0,1
0,2
0,7
X_(n+1)
Y_(n+1)
Z_(n+1)
X_(n+1)
Y_(n+1)
Z_(n+1)
X_(n+1)
Y_(n+1)
Z_(n+1)



Les " poids " sont des nombres compris entre 0 et 1.

La somme des poids sur les flèches issues d'un même point est 1.

Ces poids sont les probabilités conditionnelles : Sachant que le jeune parent utilise le mois *n*, le produit " chose ", le mois suivant, il utilise le produit " machin " avec la probabilité indiquée sur la flèche.

1. a. *Exprimer x_{n+1} en fonction de x_n, y_n et z_n.*

On admet que : $y_{n+1}=0,4x_n+0,3y_n+0,2z_n$ et que $z_{n+1}=0,1x_n+0,2y_n+0,7z_n$.

Les événements X_n, Y_n, Z_n forment une partition de l'univers, d'où,

$$x_{n+1} = P(X_{n+1}) = P(X_{n+1}\cap X_n) + P(X_{n+1}\cap Y_n) + P(X_{n+1}\cap Z_n)$$

$$= P(X_n)\times P_{X_n}(X_{n+1}) + P(Y_n)\times P_{Y_n}(Y_{n+1}) + P(Z_n)\times P_{Z_n}(X_{n+1})$$

$$= x_n\times 0,5+y_n\times 0,5+z_n\times 0,1$$

D'après la relation des probabilités totales, on a :

$$\begin{cases} x_{n+1}=0,5\,x_n+0,5\,y_n+0,1\,z_n \\ y_{n+1}=0,4\,y_n+0,3\,y_n+0,2\,z_n \\ z_{n+1}=0,1\,x_n+0,2\,y_n+0,7\,z_n \end{cases}.$$

b. *Exprimer z_n en fonction de x_n et y_n. En déduire l'expression de x_{n+1} et y_{n+1} en fonction de x_n et y_n.*

Puisque les événements X_n, Y_n, Z_n forment une partition de l'univers, la somme $x_n+y_n+z_n=1$,

d'où, en substituant z_n par $1-x_n-y_n$ dans les deux premières équations, il vient :

$$\begin{cases} x_{n+1}=0{,}4\,x_n+0{,}4\,y_n+0{,}1 \\ y_{n+1}=0{,}2\,x_n+0{,}1\,y_n+0{,}2 \end{cases}$$

2. *On définit la suite (U_n) par $U_n=\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}$ pour tout entier naturel n.*

On admet que, pour tout entier naturel n, $U_{n+1}=A\times U_n+B$ où $A=\begin{pmatrix} 0{,}4 & 0{,}4 \\ 0{,}2 & 0{,}1 \end{pmatrix}$ et $B=\begin{pmatrix} 0{,}1 \\ 0{,}2 \end{pmatrix}$.

Au début de l'étude statistique (mois de janvier 2014 : $n=0$), on estime que $U_0=\begin{pmatrix} 0{,}5 \\ 0{,}3 \end{pmatrix}$.

Commentair*e* : Il y a un côté rassurant en constatant qu'on retrouve le système du 1.b./

On considère l'algorithme suivant :

Variables	n et i des entiers naturels. A, B et U des matrices
Entrée et initialisation	Demander la valeur de n i prend la valeur 0 A prend la valeur $\begin{pmatrix} 0{,}4 & 0{,}4 \\ 0{,}2 & 0{,}1 \end{pmatrix}$ B prend la valeur $\begin{pmatrix} 0{,}1 \\ 0{,}2 \end{pmatrix}$ U prend la valeur $\begin{pmatrix} 0{,}5 \\ 0{,}3 \end{pmatrix}$
Traitement	Tant que i < n U prend la valeur $A\times U+B$ i prend la valeur $i+1$ Fin de Tant que
Sortie	Afficher U

a. *Donner les résultats affichés par cet algorithme pour $n=1$ puis pour $n=3$.*

Lorsque n = 1, i étant initialisé à 0, on entre dans la boucle " TantQue "

On a alors dans U : $\begin{pmatrix} 0{,}4 & 0{,}4 \\ 0{,}2 & 0{,}1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0{,}5 \\ 0{,}3 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 0{,}1 \\ 0{,}2 \end{pmatrix}$

$$U=\begin{pmatrix} 0{,}42 \\ 0{,}33 \end{pmatrix}$$

i prend la valeur 1 et comme 1 < 1 n'est pas vérifié, on effectue pas la boucle " TantQue ".

Si n = 1, l'algorithme retourne la matrice : $U_1=\begin{pmatrix} 0{,}42 \\ 0{,}33 \end{pmatrix}$.

Lorsque $n = 3$, on effectue trois boucles " TantQue "

À la fin de la première boucle U contient : $\begin{pmatrix}0{,}42\\0{,}33\end{pmatrix}$ et i contient 1.

À la fin de la deuxième boucle U contient : $\begin{pmatrix}0{,}4 & 0{,}4\\0{,}2 & 0{,}1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0{,}42\\0{,}33\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0{,}1\\0{,}2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0{,}4\\0{,}317\end{pmatrix}$ et i contient 2.

À la fin de la troisième boucle U contient : $\begin{pmatrix}0{,}4 & 0{,}4\\0{,}2 & 0{,}1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0{,}4\\0{,}317\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0{,}1\\0{,}2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0{,}3868\\0{,}3117\end{pmatrix}$ et i contient 3.

Si $n = 3$, l'algorithme retourne la matrice : $U_3 = \begin{pmatrix}0{,}3868\\0{,}3117\end{pmatrix}$.

***b.** Quelle est la probabilité d'utiliser la marque X au mois d'avril ?*

Au mois d'avril, la probabilité d'utiliser la marque X est : $x_3 = 0{,}3868$

Dans la suite de l'exercice, on cherche à déterminer une expression de U_n en fonction de n.

On note I la matrice $\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{pmatrix}$ et N la matrice $I-A$.

***3.** On désigne par C une matrice colonne à deux lignes.*

***a**. Démontrer que $C=A\times C+B$ équivaut à $N\times C=B$.*

$C= A\times C+B \Leftrightarrow C-AC=B$

I étant la matrice identité d'ordre 2, on a : $IC = C$.

$C-AC=B \Leftrightarrow IC - C = B$, puis,

en factorisant à droite par C dans le membre de gauche :

$C=A\times C+B \Leftrightarrow (I-A)C = B$.

Comme $I - A = N$, on obtient : $C = A\times C+B \Leftrightarrow N\times C = B$.

Commentaire : reconnaître l'état probabiliste stable dans la recherche de C, puisque le calcul $A\times U + B$ est celui qui donne à une date donnée l'état probabiliste au mois suivant.

***b.** On admet que N est une matrice inversible et que $N^{-1} = \begin{pmatrix}\frac{45}{23} & \frac{20}{23}\\ \frac{10}{23} & \frac{30}{23}\end{pmatrix}$.*

En déduire que $C=\begin{pmatrix}\frac{17}{46}\\ \frac{7}{23}\end{pmatrix}$.

$N\times C = B$. et N inversible, d'où, en multipliant à gauche par N^{-1}, on a : $C = N^{-1}.B$

$$C = \begin{pmatrix}\frac{45}{23} & \frac{20}{23}\\ \frac{10}{23} & \frac{30}{23}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0{,}1\\0{,}2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\frac{45}{23}\times\frac{1}{10}+\frac{20}{23}\times\frac{2}{10}\\ \frac{10}{23}\times\frac{1}{10}+\frac{30}{23}\times\frac{2}{10}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\frac{85}{230}\\ \frac{70}{230}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\frac{17}{46}\\ \frac{7}{23}\end{pmatrix}.$$

Remarque : Le résultat étant donné, l'important est de justifier l'opération et de donner le détail du calcul.

4. *On note V_n la matrice telle que $V_n = U_n - C$ pour tout entier naturel n.*

a. *Montrer que, pour tout entier naturel n, $V_{n+1} = A \times V_n$.*

$V_{n+1} = U_{n+1} - C = AU_n + B - C$

Or, $B = C - AC$, d'où,

$V_{n+1} = AU_n$ - AC, et par factorisation de la matrice A à gauche,

$V_{n+1} = A(U_n - C) = AV_n$.

b. *On admet que $U_n = A^n \times (U_0 - C) + C$.*

Commentaire :

Ce résultat est facile à obtenir en démontrant par récurrence, $V_n = A^n V_0$ à partir du 4a)

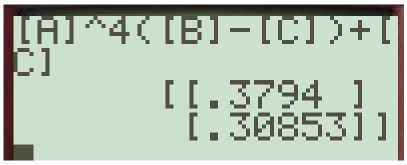
puis, $U_n = V_n + C = A^n V_0 + C$ et comme $V_0 = U_0 - C$, on obtient : $U_n = A^n(U_0 - C) + C$.

Quelles sont les probabilités d'utiliser les marques X, Y et Z au mois de mai ?

Le mois de janvier est le mois numéroté 0, donc, le mois de mai est numéroté 4.

$U_4 = A^4(U_0 - C) + C$.

rappel : $A = \begin{pmatrix} 0,4 & 0,4 \\ 0,2 & 0,1 \end{pmatrix}$, $U_0 = \begin{pmatrix} 0,5 \\ 0,3 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} \frac{17}{46} \\ \frac{7}{23} \end{pmatrix}$.



La calculatrice donne $U_4 = \begin{pmatrix} 0,3794 \\ 0,30853 \end{pmatrix}$ (Sur la calculatrice U_0 est dans [B])

On a donc : $x_4 = 0{,}379\,4$, $y_4 = 0{,}308\,53$ et $z_4 = 1 - x_4 - y_4 = 0{,}312\,07$

Les probabilités d'utiliser les marques X, Y et Z au mois de mai sont respectivement :

0,379 4 ; 0,308 53 et 0,312 07

Liban mai 2014

Un laboratoire étudie la propagation d'une maladie sur une population.

Un individu sain est un individu n'ayant jamais été touché par la maladie.

Un individu malade est un individu qui a été touché par la maladie et non guéri.

Un individu guéri est un individu qui a été touché par la maladie et qui a guéri.

Une fois guéri, un individu est immunisé et ne peut plus tomber malade.

les premières observations montrent que, d'un jour au jour suivant :

** 5 % des individus tombent malades ;*

** 20 % des individus guérissent.*

Pour tout entier n, on note a_n la proportion d'individus sains n jours après le début de l'expérience, b_n la proportion d'individus malades n jours après le début de l'expérience, et c_n celle d'individus guéris n jours après le début de l'expérience.

On suppose qu' au début de l'expérience, tous les individus sont sains, c'est-à-dire que $a_0 = 1$, $b_0 = 0$ et $c_0 = 0$.

1. Calculer a_1, b_1, c_1.

a_n est la proportion d'individus sains *n* jours après le début de l'expérience et $a_0 = 1$ (tous les individus sont sains au début de l'expérience).

5 % de ces individus tombent malades, d'où, il reste 95 % d'individus sains le premier jour.

$a_1 = 0{,}95$

b_n est la proportion d'individus malades *n* jours après le début de l'expérience, donc : $b_1 = 0{,}05$ d 'après la donnée précédente.

$c_1 = 0$ (il n'y avait aucun malade en début d'expérience donc personne à guérir!).

2. a) Quelle est la proportion d'individus sains qui restent sains d'un jour au jour suivant ? En déduire a_{n+1} en fonction de a_n.

95 % des individus sains restent sains, d'où, $a_{n+1} = 0{,}95\ a_n$

b) Exprimer b_{n+1} en fonction de b_n.

5 % des individus sains tombent malades et 80 % des malades restent malades,

d'où : $b_{n+1} = \frac{5}{100}a_n + \frac{80}{100}b_n = 0{,}05\ a_n + 0{,}8\ b_n$.

On admet que $c_{n+1} = 0{,}2\,b_n + c_n$

($c_{n+1} = 0{,}2\,b_n + c_n$ les individus guéris restent guéris et 20 % des malades guérissent).

Pour tout entier n, on définit $U_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix}$.

On définit les matrices $A = \begin{pmatrix} 0{,}95 & 0 & 0 \\ 0{,}05 & 0{,}8 & 0 \\ 0 & 0{,}2 & 1 \end{pmatrix}$ et $D = \begin{pmatrix} 0{,}95 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}8 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

On admet qu'il existe une matrice inversible P telle que $D = P^{-1} \times A \times P$ et que, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1, $A^n = P \times D^n \times P^{-1}$.

Reconnaître dans la matrice U_n la matrice donnant l'état de la population *n* jours après l'expérience,

dans la matrice *A* la matrice associé au système donnant l'état le jour *n*+1 en fonction du jour *n*,

la matrice *D* est une matrice diagonale.

Reconnaître dans la phrase " il existe une matrice inversible *P* telle que $D = P^{-1}AP$ " ,

(en multipliant à gauche par *P* et à droite par P^{-1}, on a : $A = PDP^{-1}$) la diagonalisation de la matrice *A*.

Une récurrence (immédiate) prouve : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $A^n = P\,D^n\,P^{-1}$.

3. a) Vérifier que pour tout entier naturel n, $U_{n+1} = A \times U_n$

Pour tout $n\in\mathbb{N}$,

on a : $U_{n+1} = \begin{pmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \\ c_{n+1} \end{pmatrix}$ par définition.

On calcule AU_n (ne pas poser la conclusion avant de l'avoir démontrée).

$$AU_n = \begin{pmatrix} 0{,}95 & 0 & 0 \\ 0{,}05 & 0{,}8 & 0 \\ 0 & 0{,}2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}95\,a_n + 0\times b_n + 0\times c_n \\ 0{,}05\,a_n + 0{,}8\,b_n + 0\times c_n \\ 0\times a_n + 0{,}2\times b_n + 1\times c_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \\ c_{n+1} \end{pmatrix}.$$

On a bien montré : $U_{n+1} = AU_n$

(Une récurrence permet de prouver : pour tout $n\in\mathbb{N}$, $U_{n+1} = A^n U_0$)

On admet que, pour tout entier naturel n, $U_{n+1} = A^n \times U_0$

b) Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, $D^n = \begin{pmatrix} 0{,}95^n & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}8^n & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Récurrence :

Proposition à démontrer : Soit P(n) la proposition suivante :

Pour tout $n\in\mathbb{N}$, $D^n = \begin{pmatrix} 0{,}95^n & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}8^n & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

rappel :

La démonstration par récurrence comprend trois étapes :

* L'initialisation par une vérification de la proposition au premier rang (ici P(0) : il s'agit donc de vérifier l'égalité $D^0 \stackrel{?}{=} \begin{pmatrix} 0{,}95^0 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}8^0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. il suffit d'évaluer séparément les deux membres de l'égalité.

** L'hérédité (transmission de la propriété). C'est une implication.

On pose P(n) et on cherche à partir de P(n) à obtenir P(n+1).

Ici : $D^n = \begin{pmatrix} 0{,}95^n & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}8^n & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ (*on veut* : $D^{n+1} \stackrel{?}{=} \begin{pmatrix} 0{,}95^{n+1} & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}8^{n+1} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$)

On va donc calculer D^{n+1} …. en faisant intervenir l'égalité P(n).

*** Conclusion par l'axiome de récurrence :

D'après les étapes précédentes : P(0) ⇒ P(1) ⇒ P(2) ⇒ P(3) ⇒ ….

Comme la condition suffisante P(0) est vraie, les conditions nécessaires qui en découlent par implications sont vraies.

Rédaction :

Initialisation : *n* = 0.

$D^0 = I_3$ (matrice identité) c-à-d : $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Or, $0{,}95^0 = 0{,}8^0 = 1$, l'égalité est vérifiée. P(0) vraie

Hérédité :

Soit **un** entier n supérieur ou égal à 0 telle que $D^n = \begin{pmatrix} 0{,}95^n & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}8^n & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ (Hypothèse de récurrence)

Calculons D^{n+1}

$$D^{n+1} = DD^n = \begin{pmatrix} 0{,}95 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}8 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0{,}95^n & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}8^n & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} 0{,}95\times0{,}95^n+0\times0+0\times0 & 0{,}95\times0+0\times0{,}8^n+0\times0 & 0{,}95\times0+0\times0+0\times1 \\ 0\times0{,}95^n+0{,}8\times0+0\times0 & 0\times0+0{,}8\times0{,}8^n+0\times0 & 0\times0+0\times0+1\times1 \\ 0\times0{,}95^n+0\times0+0\times0 & 0\times0+0\times0{,}8^n+1\times0 & 0\times0+0\times0+1\times1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}95^{n+1} & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}8^{n+1} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

On a montré : P(n) ⇒ P(n+1).

Conclusion :

D'après l'axiome de récurrence la proposition est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

En calculant PD^nP^{-1} , on obtient A^n .

On admet : $A^n = \begin{pmatrix} 0{,}95^n & 0 & 0 \\ \frac{1}{3}(0{,}95^n - 0{,}8^n) & 0{,}8^n & 0 \\ \frac{1}{3}(3-4\times0{,}95^n+0{,}8^n) & 1-0{,}8^n & 1 \end{pmatrix}.$

4. a) Vérifier que pour tout entier naturel n, $b_n = \frac{1}{3}(0{,}95^n - 0{,}8^n)$.

On sait que $U_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix}$ et que $U_n = A^n U_0$.

Or, $U_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, il suffit donc de calculer le deuxième coefficient du produit

$$\begin{pmatrix} 0{,}95^n & 0 & 0 \\ \frac{1}{3}\left(0{,}95^n-0{,}8^n\right) & 0{,}8^n & 0 \\ \frac{1}{3}\left(3-4\times0{,}95^n+0{,}8^n\right) & 1-0{,}8^n & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$$

Le calcul complet donne : $U_n = \begin{pmatrix} 0{,}95^n\times1+0\times0+0\times0 \\ \frac{1}{3}\left(0{,}95^n-0{,}8^n\right)\times1+0\times0{,}8^n+0\times0 \\ \frac{1}{3}\left(3-4\times0{,}95^n+0{,}8^n\right)\times1+\left(1-0{,}8^n\right)\times0+1\times0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}95^n \\ \frac{1}{3}\left(0{,}95^n-0{,}8^n\right) \\ \frac{1}{3}\left(3-4\times0{,}95^n+0{,}8^n\right) \end{pmatrix}$

On a donc : pour tout $n\in\mathbb{N}$, $b_n = \frac{1}{3}\left(0{,}95^n-0{,}8^n\right)$

b) Déterminer la limite de la suite (b_n).

Puisque –1 < 0,95 < 1 et –1 < 0,8 < 1, les suites géométriques $\left(0{,}95^n\right)$ et $\left(0{,}8^n\right)$ convergent vers 0.

Par somme et par produit de la constante $\frac{1}{3}$, la suite (b_n) converge vers 0.

Compléments : (a_n) converge vers 0 et (c_n) converge vers 1.

c) On admet que la proportion d'individus malades croît pendant plusieurs jours, puis décroit.

On souhaite déterminer le pic épidémique, c'est à dire le moment où la proportion d'individus malades est à son maximum.

À cet effet, on utilise l'algorithme donné en annexe 2 (à rendre avec la copie), dans lequel on compare les termes successifs de la suite (b_n).

Compléter l'algorithme de façon qu'il affiche le rang du jour où le pic épidémique est atteint et compléter le tableau fourni en annexe 2.

Conclure.

Il s'agit d'étudier la suite b_n.

b' prend la valeur $\frac{1}{3}(x-y)$ x est la suite géométrique de raison 0,95 , y celle de raison 0,8

On affiche k (on sort de la boucle lorsque $b \geqslant b'$)

Tableau complété :

	k	b	x	y	b'	Test : $b < b'$
Après le 7ième passage dans la boucle TantQue	7	0,1628	0,6634	0,1678	0,1652	Vrai
Après le 8ième passage dans la boucle TantQue	8	0,1652	0,6302	0,1342	0,1653	Vrai
Après le 9ième passage dans la boucle TantQue	9	0,1653	0,5987	0,1073	0,1637	Faux

```
VARIABLES
  b EST_DU_TYPE NOMBRE
  b1 EST_DU_TYPE NOMBRE
  x EST_DU_TYPE NOMBRE
  y EST_DU_TYPE NOMBRE
  k EST_DU_TYPE NOMBRE
DEBUT_ALGORITHME
  b PREND_LA_VALEUR 0
  b1 PREND_LA_VALEUR 0.05
  k PREND_LA_VALEUR 0
  x PREND_LA_VALEUR 0.95
  y PREND_LA_VALEUR 0.8
  TANT_QUE (b<b1) FAIRE
    DEBUT_TANT_QUE
    k PREND_LA_VALEUR k+1
    b PREND_LA_VALEUR b1
    x PREND_LA_VALEUR 0.95*x
    y PREND_LA_VALEUR 0.8*y
    b1 PREND_LA_VALEUR (1/3)*(x-y)
    FIN_TANT_QUE
  AFFICHER k
FIN_ALGORITHME
```

```
Entrée dans le bloc DEBUT_TANT_QUE/FIN_TANT_QUE : condition vérifiée (ligne 14)
#36 Nombres/chaines (ligne 15) -> b:0.1576493 | b1:0.16287403 | x:0.6983373 | y:0.2097152 | k:7
#37 Nombres/chaines (ligne 16) -> b:0.16287403 | b1:0.16287403 | x:0.6983373 | y:0.2097152 | k:7
#38 Nombres/chaines (ligne 17) -> b:0.16287403 | b1:0.16287403 | x:0.66342043 | y:0.2097152 | k:7
#39 Nombres/chaines (ligne 18) -> b:0.16287403 | b1:0.16287403 | x:0.66342043 | y:0.16777216 | k:7
#40 Nombres/chaines (ligne 19) -> b:0.16287403 | b1:0.16521609 | x:0.66342043 | y:0.16777216 | k:7
Sortie du bloc DEBUT_TANT_QUE/FIN_TANT_QUE (ligne 20)
```

```
Entrée dans le bloc DEBUT_TANT_QUE/FIN_TANT_QUE : condition vérifiée (ligne 14)
#41 Nombres/chaines (ligne 15) -> b:0.16287403 | b1:0.16521609 | x:0.66342043 | y:0.16777216 | k:8
#42 Nombres/chaines (ligne 16) -> b:0.16521609 | b1:0.16521609 | x:0.66342043 | y:0.16777216 | k:8
#43 Nombres/chaines (ligne 17) -> b:0.16521609 | b1:0.16521609 | x:0.63024941 | y:0.16777216 | k:8
#44 Nombres/chaines (ligne 18) -> b:0.16521609 | b1:0.16521609 | x:0.63024941 | y:0.13421773 | k:8
#45 Nombres/chaines (ligne 19) -> b:0.16521609 | b1:0.16534389 | x:0.63024941 | y:0.13421773 | k:8
Sortie du bloc DEBUT_TANT_QUE/FIN_TANT_QUE (ligne 20)
```

```
Entrée dans le bloc DEBUT_TANT_QUE/FIN_TANT_QUE : condition vérifiée (ligne 14)
#46 Nombres/chaines (ligne 15) -> b:0.16521609 | b1:0.16534389 | x:0.63024941 | y:0.13421773 | k:9
#47 Nombres/chaines (ligne 16) -> b:0.16534389 | b1:0.16534389 | x:0.63024941 | y:0.13421773 | k:9
#48 Nombres/chaines (ligne 17) -> b:0.16534389 | b1:0.16534389 | x:0.59873694 | y:0.13421773 | k:9
#49 Nombres/chaines (ligne 18) -> b:0.16534389 | b1:0.16534389 | x:0.59873694 | y:0.10737418 | k:9
#50 Nombres/chaines (ligne 19) -> b:0.16534389 | b1:0.16378759 | x:0.59873694 | y:0.10737418 | k:9
Sortie du bloc DEBUT_TANT_QUE/FIN_TANT_QUE (ligne 20)
```

```
***Algorithme lancé en mode pas à pas***
9
***Algorithme terminé***
```

Si on n'avait pas l'algorithme :

On étudie sur $\mathbb{R}^{+*}$ la fonction $f : x \mapsto \frac{1}{3}\left(0{,}95^x - 0{,}8^x\right)$

Or, $0{,}95^x = \exp\left(x\ln\left(0{,}95\right)\right)$

La dérivée de $x \mapsto 0{,}95^x$ est donc la fonction $x \mapsto \ln(0{,}95) \times \exp\left(x\ln\left(0{,}95\right)\right)$

On sait : $\ln(0{,}95) < 0$

Pour $x > 0, f'(x) = \frac{1}{3}\left(\ln(0{,}95)\times 0{,}95^x - \ln(0{,}8)\times 0{,}8^x\right)$

$\left(\ln(0{,}95)\times 0{,}95^x - \ln(0{,}8)\times 0{,}8^x\right) = 0$ si et seulement si $\frac{\ln(0{,}95)}{\ln(0{,}8)} = \left(\frac{0{,}8}{0{,}95}\right)^x$

On applique ln aux deux membres pour faire redescendre l'exposant : $\ln\frac{\ln(0{,}95)}{\ln(0{,}8)} = x\ \ln\left(\frac{0{,}8}{0{,}95}\right)$

$x = \ln\frac{\ln(0{,}95)}{\ln(0{,}8)} / \ln\left(\frac{0{,}8}{0{,}95}\right) \approx 8{,}55$

Amérique du Nord mai 2014

Un volume constant de 2 200m³ d'eau est réparti entre deux bassins A et B.

Le bassin A refroidit une machine. Pour des raisons d'équilibre thermique on crée un courant d'eau entre les deux bassins à l'aide de deux pompes.

On modélise les échanges entre les deux bassins de la façon suivante :

** au départ, le bassin A contient 1 100m³ d'eau et le bassin B contient 1 100m³ d'eau ;*

** tous les jours, 15%du volume d'eau présent en début de journée dans le bassin B est transféré vers le bassin A ;*

** tous les jours, 10%du volume d'eau présent en début de journée dans le bassin A est transféré vers le bassin B, et, pour des raisons de maintenance, on transfère également 5 m³ du bassin A vers le bassin B.*

Pour tout entier naturel n, on note :

** a_n le volume d'eau, exprimé en m³, contenu dans le bassin A à la fin du n-ième jour de fonctionnement ;*

** b_n le volume d'eau, exprimé en m³, contenu dans le bassin B à la fin du n-ième jour de fonctionnement.*

On a donc a_0 = 1 100 et b_0 = 1 100.

Les parties A et B peuvent être traitées de manière indépendante.

Partie A

1. *Traduire la conservation du volume total d'eau du circuit par une relation liant a_n et b_n.*

D'après l'énoncé, $a_n + b_n = 2\,200$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

2. *On utilise un tableur pour visualiser l'évolution du volume d'eau dans les bassins.*
   Donner les formules à écrire et à recopier vers le bas dans les cellules B3 et C3 permettant d'obtenir la feuille de calcul ci-dessous :

En cellule B3 : " =0,9×B2 + 0,15×C2 – 5
En cellule C3 : " =0,1×B2 + 0,85×C2 + 5

	A	B	C
1	Jour N°	Volume bassin A	Volume bassin B
2	0	1100,00	1100,00
3	1		
4	2	1187,50	1012,50
5	3	1215,63	984,38
6	4	1236,72	963,28
7	5	1252,54	947,46
8	6	1264,40	935,60
9	7	1273,30	926,70
10	8	1279,98	920,02
11	9	1284,98	915,02
12	10	1288,74	911,26
13	11	1291,55	908,45
14	12	1293,66	906,34
15	13	1295,25	904,75
16	14	1296,44	903,56
17	15	1297,33	902,67
18	16	1298,00	902,00
19	17	1298,50	901,50
20	18	1298,87	901,13

3. *Quelles conjectures peut-on faire sur l'évolution du volume d'eau dans chacun des bassins ?*

La suite (a_n) semble croissante et converger vers 1 300 m^3 ,
la suite (b_n) semble décroissante et converger vers 900 m^3 .

Partie B

On considère la matrice carrée $M = \begin{pmatrix} 0,9 & 0,15 \\ 0,1 & 0,85 \end{pmatrix}$ *et les matrices colonnes* $R = \begin{pmatrix} -5 \\ 5 \end{pmatrix}$ *et* $X_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix}$.

On admet que, pour tout entier naturel n, $X_{n+1} = MX_n + R$.

1. *On note* $S = \begin{pmatrix} 1300 \\ 900 \end{pmatrix}$.
   Vérifier que $S = MS + R$.
   En déduire que, pour tout entier naturel n, $X_{n+1} - S = M(X_n - S)$.

Évaluons $MS + R$

$$\begin{pmatrix} 0,9 & 0,15 \\ 0,1 & 0,85 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1300 \\ 900 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -5 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,9\times 1300+0,15\times 900-5 \\ 0,1\times 1300+0,85\times 900+5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1300 \\ 900 \end{pmatrix}$$

On a bien : $MS + R = S$.
ou encore : $MS = S - R$

Comme pour tout entier naturel n, $X_{n+1} = MX_n + R$, on obtient successivement :

$X_{n+1} - S = MX_n + R - S$

$X_{n+1} - S = MX_n - (-R + S)$ Rappel : $MS = S - R$:

$X_{n+1} - S = MX_n - MS$ En factorisant M à gauche :

$X_{n+1} - S = M(X_n - S)$

Dans la suite, on admettra que, pour tout entier naturel n, $X_n - S = M^n(X_0 - S)$ *et que*

$$M^n = \begin{pmatrix} 0{,}6+0{,}4\times0{,}75^n & 0{,}6-0{,}6\times0{,}75^n \\ 0{,}4-0{,}4\times0{,}75^n & 0{,}4+0{,}6\times0{,}75^n \end{pmatrix}.$$

Commentaires :

*** La matrice S est la solution du système formé par l'équation matricielle d'inconnue $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$: $X = MX + R$ et $x + y = 2\,200$.

$X = MX + R \Leftrightarrow X - MX = R \Leftrightarrow (I - M)X = R$.

La matrice $I - M = \begin{pmatrix} 0{,}1 & -0{,}15 \\ -0{,}1 & 0{,}15 \end{pmatrix}$ n'est pas inversible car son déterminant est nul. (*On a donc une infinité de solutions ... qui sont les solutions de 0,1x – 0,15y = –5*)

On résout le système : $\begin{pmatrix} 0{,}1 & -0{,}15 \\ -0{,}1 & 0{,}15 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ 5 \end{pmatrix}$ et $x + y = 2\,200$

On a donc : $0{,}1x - 0{,}15y = -5$ et $x + y = 2\,200$

On trouve les solutions : $x = 1\,300$ et $y = 900$, soit : $S = \begin{pmatrix} 1300 \\ 900 \end{pmatrix}$.

*** Si on pose $U_n = X_n - S$, la suite (U_n) vérifie $U_{n+1} = MU_n$ et une récurrence immédiate mène à : $U_n = M^n U_0$, soit : $X_n - \mathrm{S} = M^n(X_0 - S)$

*** La matrice $M = \begin{pmatrix} 0{,}9 & 0{,}15 \\ 0{,}1 & 0{,}85 \end{pmatrix}$ est diagonalisable.

Recherche de la matrice diagonale D formée par les valeurs propres λ et μ : $D = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix}$

On résout l'équation du second degré : $(0{,}9 - x)(0{,}85 - x) - 0{,}1\times0{,}15 = 0$

$x^2 - 1{,}75x + 0{,}765 - 0{,}015 = 0$

$x^2 - 1{,}75x + 0{,}75 = 0$ qui a pour solutions évidentes 1 et 0,75

$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0{,}75 \end{pmatrix}$

On cherche les vecteurs propres :

on résout : $MX = 1\times X$, soit : $0{,}9x + 0{,}15y = x$ $\quad 0{,}1x = 0{,}15y$

On peut prendre $x = 3$ et $y = 2$

on résout : $MX = 0{,}75\times X$, soit : $0{,}9x + 0{,}15y = 0{,}75x$ $\quad 0{,}15x = -0{,}15y$

On peut prendre $x = 1$ et $y = -1$

$P = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$ $\qquad P^{-1} = \dfrac{1}{-5} \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} = \dfrac{1}{5} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$

Le produit : $PD\,P^{-1}$ =

$$\frac{1}{5}\begin{pmatrix}3 & 1\\ 2 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0{,}75\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 1\\ 2 & -3\end{pmatrix} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix}3 & 0{,}75\\ 2 & -0{,}75\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 1\\ 2 & -3\end{pmatrix} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix}4{,}5 & 0{,}75\\ 0{,}5 & 4{,}25\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0{,}9 & 0{,}15\\ 0{,}1 & 0{,}85\end{pmatrix} = M.$$

On en déduit donc que $M^n = PD^n\ P^{-1}$

On calcule : $\frac{1}{5}\begin{pmatrix}3 & 1\\ 2 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0{,}75^n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 1\\ 2 & -3\end{pmatrix} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix}3 & 0{,}75^n\\ 2 & -0{,}75^n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 1\\ 2 & -3\end{pmatrix}$

$$= \frac{1}{5}\begin{pmatrix}3+2\times 0{,}75^n & 3-3\times 0{,}75^n\\ 2-2\times 0{,}75^n & 2+3\times 0{,}75^n\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0{,}6+0{,}4\times 0{,}75^n & 0{,}6-0{,}6\times 0{,}75^n\\ 0{,}4-0{,}4\times 0{,}75^n & 0{,}4+0{,}6\times 0{,}75^n\end{pmatrix}$$

qui est bien le résultat proposé.

2. *Montrer que, pour tout entier naturel n,* $X_n = \begin{pmatrix}1300-200\times 0{,}75^n\\ 900+200\times 0{,}75^n\end{pmatrix}$.

Comme, pour tout entier naturel *n*, $X_n - S = M^n(X_0 - S)$
on évalue $X_n = M^n(X_0 - S) + S$.

$X_0 = \begin{pmatrix}1100\\ 1100\end{pmatrix}$, $X_0 - S = \begin{pmatrix}-200\\ 200\end{pmatrix}$

$$M^n(X_0-S) = \begin{pmatrix}0{,}6+0{,}4\times 0{,}75^n & 0{,}6-0{,}6\times 0{,}75^n\\ 0{,}4-0{,}4\times 0{,}75^n & 0{,}4+0{,}6\times 0{,}75^n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-200\\ 200\end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix}(0{,}6+0{,}4\times 0{,}75^n)\times(-200)+(0{,}6-0{,}6\times 0{,}75^n)\times 200\\ (0{,}4-0{,}4\times 0{,}75^n)\times(-200)+(0{,}4+0{,}6\times 0{,}75^n)\times 200\end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix}(-0{,}6-0{,}4\times 0{,}75^n+0{,}6-0{,}6\times 0{,}75^n)\times 200\\ (-0{,}4+0{,}4\times 0{,}75^n+0{,}4+0{,}6\times 0{,}75^n)\times 200\end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix}(-0{,}75^n)\times 200\\ 0{,}75^n\times 200\end{pmatrix}.$$

$$M^n(X_0-S) + S = \begin{pmatrix}(-0{,}75^n)\times 200\\ 0{,}75^n\times 200\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}1300\\ 900\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1300-200\times 0{,}75^n\\ 900+200\times 0{,}75^n\end{pmatrix}.$$

On a bien : pour tout entier naturel *n*, $X_n = \begin{pmatrix}1300-200\times 0{,}75^n\\ 900+200\times 0{,}75^n\end{pmatrix}$.

3. *Valider ou invalider les conjectures effectuées à la question 3. de la partie A.*

On a donc : pour tout entier naturel *n*, a_n = 1 300 – $200\times 0{,}75^n$ et b_n = 900 + $200\times 0{,}75^n$
Comme 0 < 0,75 < 1, la suite géométrique $(0{,}75^n)$ est strictement décroissante et converge vers 0,
d'où, en multipliant par –200, la suite géométrique $(-200\times 0{,}75^n)$ est strictement croissante et converge vers 0,
puis en ajoutant 1300, la suite (a_n) est strictement croissante et converge vers 1 300,

D'autre part, en multipliant par 200, la suite géométrique $(200\times 0{,}75^n)$ est strictement décroissante et converge vers 0,
puis en ajoutant 900, la suite (b_n) est strictement décroissante et converge vers 900.

4. *On considère que le processus est stabilisé lorsque l'entier naturel n vérifie*
$1300 - a_n < 1,5$ *et* $b_n - 900 < 1,5$.

Déterminer le premier jour pour lequel le processus est stabilisé.
On cherche un entier tel que 1300 - ($1\,300 - 200\times 0,75^n$) < 1,5 et 900 + $200\times 0,75^n$ - 900 < 1,5, ce qui amène l'inégalité : $200\times 0,75^n$ < 1,5. (i)

On a les équivalences suivantes : (i) ⇔ $0,75^n < \dfrac{1,5}{200}$ $\dfrac{1,5}{200} = 0,0075\times 10^{-3}$

La fonction ln est strictement croissante sur]0 ; +∞[, d'où, (i) ⇔ $n\ln 0,75 < \ln(0,0075)$

Comme 0 < 0,75 < 1, ln (0,75) < 0, d'où, (i) ⇔ $n > \dfrac{\ln(0,0075)}{\ln(0,75)}$.

La calculatrice donne $\dfrac{\ln(0,0075)}{\ln(0,75)} \approx 17,007$

L'entier n à partir duquel le processus est stabilisé est 18.

	A	B	C	D	E
1	Jour N°	Volume bassin A	Volume bassin B	1300-a(n)	b(n)-900
2	0	1100,00	1100,00	200	200
3	1	1150,00	1050,00	150	150
4	2	1187,50	1012,50	112,5	112,5
5	3	1215,63	984,38	84,375	84,375
6	4	1236,72	963,28	63,28125	63,28125
7	5	1252,54	947,46	47,4609375	47,4609375
8	6	1264,40	935,60	35,59570313	35,59570313
9	7	1273,30	926,70	26,69677734	26,69677734
10	8	1279,98	920,02	20,02258301	20,02258301
11	9	1284,98	915,02	15,01693726	15,01693726
12	10	1288,74	911,26	11,26270294	11,26270294
13	11	1291,55	908,45	8,447027206	8,447027206
14	12	1293,66	906,34	6,335270405	6,335270405
15	13	1295,25	904,75	4,751452804	4,751452804
16	14	1296,44	903,56	3,563589603	3,563589603
17	15	1297,33	902,67	2,672692202	2,672692202
18	16	1298,00	902,00	2,004519152	2,004519152
19	17	1298,50	901,50	1,503389364	1,503389364
20	18	1298,87	901,13	1,127542023	1,127542023
21	19	1299,15	900,85	0,845656517	0,845656517
22	20	1299,37	900,63	0,634242388	0,634242388
23	21	1299,52	900,48	0,475681791	0,475681791
24	22	1299,64	900,36	0,356761343	0,356761343
25					

Centres étrangers juin 2014

Partie A : Préliminaires

1 a) n et N deux entiers naturels supérieurs ou égaux à 2, tels que :

$n^2 \equiv N - 1$ modulo N.

Montrer que $n\times n^3 \equiv 1$ modulo N.

Donnée : $n^2 \equiv N - 1$ modulo N.

Comme $N \equiv 0$ modulo N, on a : $n^2 \equiv -1$ modulo N.

On en déduit : $n^4 \equiv (-1)^2$ modulo N.

Comme $n\times n^3 = n^4$ et que $(-1)^2 = 1$, on a bien : $n\times n^3 \equiv 1$ modulo N.

b) Déduire de la question précédente un entier k_1 tel que : $5k_1 \equiv 1$ modulo 26.

Posons $n = 5$ et $N = 26$.

$5^2 \equiv 26 - 1$ modulo 26. *(Condition pour appliquer a))*

D'après le a) $5\times 5^3 \equiv 1$ modulo 26.

On peut donc prendre pour k_1 le nombre entier $5^3 = 125$.

$125 \equiv 21$ modulo 26 car $125 = 4\times 26 + 21$

On admettra que l'unique entier k tel que $0 \leqslant k \leqslant 25$ et $5k \equiv 1$ modulo 26 vaut 21.

Commentaire : *penser à l'utilité de cette égalité. 5 et 21 sont inverses modulo 26, d'où, l'utilité pour résoudre une équation de la forme $5x = a$ modulo 26.*

Les solutions seront les entiers x tels que $x \equiv 21a$ modulo 26

2- On donne les matrices $A = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}$, $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ *et* $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$.

a) Calculer la matrice $6A - A^2$.

$$A^2 = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4\times 4+1\times 3 & 4\times 1+1\times 2 \\ 3\times 4+2\times 3 & 3\times 1+2\times 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 19 & 6 \\ 18 & 7 \end{pmatrix}.$$

$$6A - A^2 = \begin{pmatrix} 24 & 6 \\ 18 & 12 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 19 & 6 \\ 18 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} = 5I.$$

b) En déduire que A est inversible et que sa matrice inverse, notée A^{-1}, peut se noter sous la forme $A^{-1} = \alpha I + \beta A$, où α et β sont deux réels que l'on déterminera.

On vient de montrer que $6A - A^2 = 5I$.

Or, $6A - A^2 = (6I - A)A = A(6I - A)$.

En multipliant par $\frac{1}{5}$ les deux membres de l'égalité du 2a), il vient : $(\frac{6}{5}I - \frac{1}{5}A)A = A(\frac{6}{5}I - \frac{1}{5}A) = I$.

Ce qui prouve que la matrice A est inversible et que $A^{-1} = \frac{6}{5}I - \frac{1}{5}A$.

On en déduit le réel $\alpha = \frac{6}{5}$ et le réel $\beta = -\frac{1}{5}$.

c) Vérifier que : $B = 5\,A^{-1}$

$5\,A^{-1} = 6I - A = \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 4 \end{pmatrix} = B.$

L'égalité est vérifiée.

d) Démontrer que si $AX = Y$ alors $5X = BY$.

Donnée : $AX = Y$

en multipliant les deux membres à gauche par B , on a : $BAX = BY$.

Or, $B = 5\,A^{-1}$, d'où, $BA = 5\,A^{-1}\,A = 5$.

conclusion : $5X = BY$.

L'implication est bien démontrée.

Partie B : procédure du codage

Coder le mot « ET », en utilisant la procédure de codage décrite ci-dessous.

** Le mot à coder est remplacer par la matrice $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$, où x_1 est l'entier représentant la première lettre du mot et x_2 l'entier représentant la deuxième selon le tableau ci-dessous :*

A	*B*	*C*	*D*	*E*	*F*	*G*	*H*	*I*	*J*	*K*	*L*	*M*
0	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*	*7*	*8*	*9*	*10*	*11*	*12*

N	*O*	*P*	*Q*	*R*	*S*	*T*	*U*	*V*	*W*	*X*	*Y*	*Z*
13	*14*	*15*	*16*	*17*	*18*	*19*	*20*	*21*	*22*	*23*	*24*	*25*

** La matrice X est transformée est transformée en la matrice $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$ telle que : $Y = AX$.*

** La matrice Y est transformée en la matrice $R = \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \end{pmatrix}$, où r_1 est le reste de la division euclidienne de y_1 par 26 et r_2 le reste de la division euclidienne de y_2 par 26.*

** Les entiers r_1 et r_2 donnent les lettres du mot codé, selon le tableau de correspondance ci-dessus.*

Exemple : *OU (mot à coder) $\to X = \begin{pmatrix} 14 \\ 20 \end{pmatrix} \to Y = \begin{pmatrix} 76 \\ 82 \end{pmatrix} \to R = \begin{pmatrix} 24 \\ 4 \end{pmatrix} \to$ « YE » (mot codé).*

Codage de « ET »

$X = \begin{pmatrix} 4 \\ 19 \end{pmatrix}$.

$AX = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ 19 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4\times 4+1\times 19 \\ 3\times 4+2\times 19 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 35 \\ 50 \end{pmatrix}$, donc, $Y = \begin{pmatrix} 35 \\ 50 \end{pmatrix}$.

35 = 1×26 + 9 et 50 = 1×26 + 24, d'où, $R = \begin{pmatrix} 9 \\ 24 \end{pmatrix}$ ce qui donne « JY »

Partie C : procédure de décodage (on conserve les mêmes notations que pour le codage)

Lors du codage, la matrice X a été transformée en la matrice Y = $\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$ *telle que : Y = AX.*

1- Démontrer que : $\begin{cases} 5x_1 = 2y_1 - y_2 \\ 5x_2 = -3y_1 + 4y_2 \end{cases}$.

On sait : $Y = AX$.

D'après la partie A/2d/ en multipliant à gauche par B, on a : $5X = BY$.

Soit : $5\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$.

Ce qui donne : $\begin{pmatrix} 5x_1 \\ 5x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2y_1 - y_2 \\ -3y_1 + 4y_2 \end{pmatrix}$

On obtient bien le système : $\begin{cases} 5x_1 = 2y_1 - y_2 \\ 5x_2 = -3y_1 + 4y_2 \end{cases}$

2- En utilisant la question 1. b. de la ***partie A****, établir que:*

$\begin{cases} x_1 \equiv 16y_1 + 5y_2 \\ x_2 \equiv 15y_1 + 6y_2 \end{cases}$ *modulo 26*

On a admis que 21 était l'inverse de 5 modulo 26, c'est-à-dire : 21×5 ≡ 1 modulo 26.

En multipliant chaque ligne du système obtenu au c/1/ par 21 , il vient :

$\begin{cases} 21\times 5x_1 = 42y_1 - 21y_2 \\ 21\times 5x_2 = -63y_1 + 84y_2 \end{cases}$

Comme 21×5 ≡ 1 modulo 26,

42 = 26 + 16, soit 42 ≡ 16 modulo 26,

–21 = –26 + 5, soit –21 ≡ 5 modulo 26

84 = 3×26 + 6, soit : 84 ≡ 6 modulo 26, on a :

$\begin{cases} 21\times 5x_1 = 42y_1 - 21y_2 \\ 21\times 5x_2 = -63y_1 + 84y_2 \end{cases}$ implique $\begin{cases} x_1 \equiv 16y_1 + 5y_2 \\ x_2 \equiv 15y_1 + 6y_2 \end{cases}$ modulo 26.

3- Décoder le mot « QP ».

Le mot « QP » mène à $y_1 = 16$ et $y_2 = 15$.

16×16 + 5×15 = 331 = 12×26 + 19.

$x_1 = 19$ (lettre T)

15×16 + 6×15 = 330 = 12×26 + 18

$x_2 = 18$ (lettre S)

« QP » est décodé par « TS »

Polynésie 13 juin 2014

Dans cet exercice, on appelle numéro du jour de naissance le rang de ce jour dans le mois et numéro du mois de naissance, le rang du mois dans l'année.
Par exemple, pour une personne née le 14 mai, le numéro du jour de naissance est 14 et le numéro du mois de naissance est 5.

Partie A

Lors d'une représentation, un magicien demande aux spectateurs d'effectuer le programme de calcul (A) suivant :
« Prenez le numéro de votre jour de naissance et multipliez-le par 12. Prenez le numéro de votre mois de naissance et multipliez-le par 37. Ajoutez les deux nombres obtenus. Je pourrai alors vous donner la date de votre anniversaire » .

Un spectateur annonce 308 *et en quelques secondes, le magicien déclare :*

« Votre anniversaire tombe le 1^er^ août ! » .

1. Vérifier que pour une personne née le 1er août, le programme de calcul (A) donne effectivement le nombre 308.

Pour une personne née le 1er août, $j = 1$ et $m = 8$, d'où, 1×12 + 8×37 = 308

2. a. Pour un spectateur donné, on note j *le numéro de son jour de naissance,* m *celui de son mois de naissance et* z *le résultat obtenu en appliquant le programme de calcul (A).*
Exprimer z *en fonction de* j *et de* m *et démontrer que* z *et* m *sont congrus modulo 12.*

$z = 12j + 37m$ et comme $12 \equiv 0$ modulo 12, on a évidemment : $z \equiv 37m$ modulo 12

d'autre part : 37 = 3×12 + 1 d'où, $37 \equiv 1$ modulo 12

Finalement : $z \equiv m$ modulo 12

b. Retrouver alors la date de l'anniversaire d'un spectateur ayant obtenu le nombre 474 *en appliquant le programme de calcul (A).*

474 = 39×12 + 6 Comme $1 \leqslant 6 \leqslant 12$, le mois $m = 6$ (juin)

$474 = 12 \times j + 37 \times 6$, donc, $j = \dfrac{474 - 37\times 6}{12} = 21$.

La date anniversaire est donc le 21 juin.

Partie B

Lors d'une autre représentation, le magicien décide de changer son programme de calcul. Pour un spectateur dont le numéro du jour de naissance est j et le numéro du mois de naissance est m, le magicien demande de calculer le nombre z défini par $z=12j+31m$. Dans les questions suivantes, on étudie différentes méthodes permettant de retrouver la date d'anniversaire du spectateur.

1. Première méthode :
On considère l'algorithme suivant :

Variables :	*j et m sont des entiers naturels*
Traitement :	*Pour m allant de 1 à 12 faire :* *Pour j allant de 1 à 31 faire :* *z prend la valeur $12j+31m$* *Afficher z* *Fin Pour* *Fin Pour*

Modifier cet algorithme afin qu'il affiche toutes les valeurs de j et de m telles que $12j+31m=503$.

On peut introduire une instruction conditionnelle pour l'affichage.

Code de l'algorithme

```
VARIABLES
  j EST_DU_TYPE NOMBRE
  m EST_DU_TYPE NOMBRE
  z EST_DU_TYPE NOMBRE
DEBUT_ALGORITHME
  POUR m ALLANT_DE 1 A 12
    DEBUT_POUR
    POUR j ALLANT_DE 1 A 31
      DEBUT_POUR
      z PREND_LA_VALEUR 12*j+31*m
      SI (z==503) ALORS
        DEBUT_SI
        AFFICHER j
        AFFICHER m
        FIN_SI
      FIN_POUR
```

Console

```
***Algorithme lancé***
29
5

***Algorithme terminé***
```

2. Deuxième méthode :

a. Démontrer que $7m$ et z ont le même reste dans la division euclidienne par 12.

$31 = 2\times 12 + 7$ donc, $31 \equiv 7$ modulo 12.

$12j + 31m \equiv 7m$ modulo 12.

On a bien : $z \equiv 7m$ modulo 12.

b. Pour m variant de 1 à 12, donner le reste de la division euclidienne de $7m$ par 12.

Sous forme de tableau

m	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$7m$	7	14	21	28	35	42	49	56	63	70	77	84
division	0×12 + 7	1×12 + 2	1×12 + 9	2×12 + 4	2×12 + 11	3×12 + 6	4×12 + 1	4×12 + 8	5×12 + 3	5×12 + 10	6×12 + 5	7×12 + 0
reste	7	2	9	4	11	6	1	8	3	10	5	0

c. En déduire la date de l'anniversaire d'un spectateur ayant obtenu le nombre 503 avec le programme de calcul (B).

$503 = 41\times 12 + 11$, d'où, $503 \equiv 11$ modulo 12.

Comme 503 et $7m$ ont le même reste 11 dans la division euclidienne par 12, d'après le tableau, le mois est 5.

D'autre part : $12j + 31\times 5 = 503$, donc : $j = \dfrac{503-31\times 5}{12} = 29$

La date anniversaire est le 29 mai.

3. Troisième méthode :

a. Démontrer que le couple $(-2;17)$ est solution de l'équation $12x+31y=503$.

On vérifie : $12\times(-2) + 31\times 17 = -24 + 527 = 503$

b. En déduire que si un couple d'entiers relatifs $(x;y)$ est solution de l'équation $12x+31y=503$, alors $12(x+2)=31(17-y)$.

Soit $(x ; y)$ un couple d'entiers solution de l'équation, on a alors l'égalité :

$12x + 31y = 12\times(-2) + 31\times 17$

En réorganisant le calcul : $12(x + 2) = 31(17 - y)$.

c. Déterminer l'ensemble de tous les couples d'entiers relatifs $(x;y)$, solutions de l'équation $12x+31y=503$.

D'après la question 3b/,

si $(x ; y)$ un couple d'entiers solution de l'équation alors $(x ; y)$ est solution de l'équation $12(x + 2) = 31(17 - y)$.

Comme 12 et 31 sont premiers entre eux, on a d'après le théorème de Gauss,

12 divise $17 - y$.

Il existe un entier k tel que $17 - y = 12k$.

En substituant dans l'équation $12(x + 2) = 31(17 - y)$, il vient : $12(x + 2) = 31\times 12k$

On a donc : $x = -2 + 31k$, $y = 17 - 12k$ et k entier relatif.

Une solution de l'équation est donc un couple de la forme $(-2 + 31k\ ;\ 17 - 12k)$, $k \in \mathbb{Z}$.

Réciproquement : Soit un couple $(-2 + 31k\ ;\ 17 - 12k)$ où k est un entier, on a :

$(-2 + 31k)\times 12 + (17 - 12k)\times 31 = 503$.

Conclusion :

l'ensemble des solutions de l'équation $12x + 31y = 503$ est l'ensemble des couples $(-2 + 31k\ ;\ 17 - 12k)$, $k \in \mathbb{Z}$.

d. Démontrer qu'il existe un unique couple d'entiers relatifs $(x;y)$ *tel que* $1 \leqslant y \leqslant 12$.

En déduire la date d'anniversaire d'un spectateur ayant obtenu le nombre 503 *avec le programme de calcul (B).*

On veut : k entier et $1 \leqslant 17 - 12k \leqslant 12$, soit : k entier et $\dfrac{5}{12} \leqslant k \leqslant \dfrac{16}{12}$

L'unique entier k vérifiant ces conditions est 1.

Conclusion : $j = -2 + 31\times 1 = 29$ et $m = 17 - 12\times 1 = 5$.

On retrouve la date anniversaire : 29 mai.

Asie juin 2014 18 juin 2014

Partie A

Le but de cette partie est de démontrer que l'ensemble des nombres premiers est infini, en raisonnant par l'absurde.

1. On suppose qu'il existe un nombre fini n de nombres premiers, notés p_1, p_2, ..., p_n.

On considère le nombre E, produit de tous les nombres premiers augmentés de 1 :

$$E = p_1 \times p_2 \times \ldots \times p_n + 1$$

démontrer que E est un entier supérieur ou égal à 2, et, que E est premier avec chacun des nombres p_1, p_2, ..., p_n.

Pour i entier et $1 \leqslant i \leqslant n$, $p_i \geqslant 2$, donc, le produit E est supérieur ou égal à 2.

D'autre part : $E - p_1 \times p_2 \times \ldots \times p_n = 1$

Pour chacun des entiers p_i, il existe un couple d'entiers $(1\ ;\ P)$ avec P le produit des nombres p_j, $j \neq i$ tel que $1\times E - P \times p_i = 1$.

D'après l'identité de Bézout, E et p_i sont premiers entre eux.

2. En utilisant le fait que E admet un diviseur premier, conclure.

Soit $\mathscr{L}$ la liste finie de nombres premiers donnée en 1/.

Si E admet un diviseur premier p alors $p \notin \mathscr{L}$.

Ce qui est en contradiction avec la supposition donnée au 1./

Complément :

disjonction des cas :

soit E est premier, soit E admet au moins un diviseur premier p autre que les éléments de $\mathscr{L}$.

Si E est premier, E est un nombre premier qui n'est pas dans la liste.

Dans les deux cas, on obtient une contradiction.

Conclusion : l'ensemble des nombres premiers est infini.

Partie B

Pour tout entier naturel k ⩾ 2, on pose $M_k = 2^k - 1$.

On dit que M_k *est le k-ième nombre de Mersenne.*

1. a) Reproduire et compléter le tableau suivant, qui donne quelques valeurs de M_k .

k	2	3	4	5	6	7	8	9	10
M_k	3	7	15	31	63	127	255	511	1023
			3×5		7×3^2		$3\times5\times17$	7×73	$3\times11\times31$

b) D'après le tableau précédent, si k est un nombre premier, peut-on conclure que le nombre M_k *est premier ?*

Les entiers k premiers du tableau sont : 2 ; 3 ; 5 ; 7

Les nombres M_k correspondants sont : 3 ; 7 ; 31 ; 127 qui sont des nombres premiers.

Commentaire : La seule proposition qui a du sens est :

si k n'est pas un nombre premier alors M_k n'est pas nécessairement premier.

2. Soient p et q deux entiers naturels non nuls.

a) Justifier l'égalité : $1 + 2^p + (2^p)^2 + (2^p)^3 + \dots + (2^p)^{q-1} = \dfrac{(2^p)^q - 1}{2^p - 1}$.

On reconnaît la somme de q termes consécutifs d'une suite géométrique de raison 2^p.

Rappel :

On multiplie chaque terme de la somme $\mathscr{S}$ par la raison 2^p.

On a alors $2^p\mathscr{S} = 2^p + (2^p)^2 + (2^p)^3 + \dots + (2^p)^{q-1} + (2^p)^q$

Par différence : $2^p\mathscr{S} - \mathscr{S} = (2^p)^q - 1$

Comme $p \geqslant 1$, $2^p \neq 1$, on peut donc après factorisation diviser par $2^p - 1$.

$$\mathscr{S} = \frac{(2^p)^q - 1}{2^p - 1}.$$

b) En déduire que $2^{pq} - 1$ *est divisible par* $2^p - 1$.

La somme $\mathscr{S}$ est une somme d'entiers, donc $\mathscr{S}$ est un entier.

On a donc : $2^{pq} - 1 = (2^p)^q - 1 = (2^p - 1)\times\mathscr{S}$ avec $\mathscr{S}$ entier.

c) En déduire que, si un entier k supérieur ou égal à 2 n'est pas premier, alors M_k ne l'est pas non plus.

Soit k un entier non premier supérieur ou égal à 2.

Il existe deux entiers p et q supérieurs à 2 tels que $k = pq$.

D'après le 2b/, $M_k = 2^k - 1 = 2^{pq} - 1 = (2^p - 1) \times \mathcal{S}$

$p \geqslant 2$ implique $2^p - 1 \geqslant 3$ et $\mathcal{S} \geqslant 4$.

M_k n'est pas un nombre premier.

3 a) Prouver que le nombre de Mersenne M_{11} n'est pas premier.

$M_{11} = 2047 = 23 \times 89$ n'est pas un nombre premier.

b) Que peut-on en déduire concernant la conjecture de la question 1.b) ?

Que l'auteur veut nous induire en erreur … alors qu'on sait bien qu'on ne peut pas généraliser à partir d'exemples.

Partie C

Le test de Lucas-Lehmer permet de déterminer si un nombre de Mersenne donné est premier. Ce test utilise la suite numérique (u_n) définie par $u_0 = 4$ et, pour tout entier naturel n :

$$u_{n+1} = u_n^2 - 2 .$$

Si n est un entier supérieur ou égal à 2, le test permet d'affirmer que le nombre M_k est premier si et seulement si $u_{n-2} \equiv 0$ modulo M_n. Cette propriété est admise dans la suite.

1. Utiliser le test de Lucas-Lehmer pour vérifier que le nombre de Mersenne M_5 est premier.

$M_5 = 31$

On cherche à montrer $u_3 \equiv 0$ (modulo 31)

$u_0 = 4$, $u_1 = 4^2 - 2 = 14$,
$u_2 = 14^2 - 2 = 194$ et $194 \equiv 8$ (modulo 31)
$u_3 \equiv 8^2 - 2 \equiv 62 \equiv 2 \times 31 \equiv 0$ (modulo 31).

2. Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 3.

L'algorithme suivant, qui est incomplet, doit permettre de vérifier si le nombre de Mersenne M_n est premier, en utilisant le test de Lucas-Lehmer.

Variables :	u, M, n et i sont des entiers naturels.
Initialisation :	u prend la valeur 4
Traitement :	Demander un entier $n \geqslant 3$
	M prend la valeur $\mathbf{2^n - 1}$
	Pour i allant de 1 à $\boldsymbol{n-2}$ faire
	u prend la valeur $\boldsymbol{u^2 - 2}$
	Fin Pour
	Si M divise u alors afficher " M **est un nombre premier** "
	sinon afficher " M **n'est pas un nombre premier** "

Recopier et compléter cet algorithme afin qu'il remplisse la condition voulue.

Antilles-Guyane 19 juin 2014

En montagne, un randonneur a effectué des réservations dans deux types d'hébergements : l'hébergement A et l'hébergement B.

Une nuit en hébergement A coûte 24 € et une nuit en hébergement B coûte 45 €.

Il se rappelle que le coût total de sa réservation est de 438 €.

On souhaite retrouver les nombres x et y de nuitées passées respectivement en hébergement A et en hébergement B.

1. a) Montrer que les nombres x et y sont respectivement inférieurs ou égaux à 18 et à 9.

On sait : $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$ et $24x + 45y = 438$.

On a donc : $24x \leqslant 438$, soit : $x \leqslant \dfrac{438}{24}$. Comme $x \in \mathbb{N}$ et $\dfrac{438}{24} = 18{,}25$, on obtient : $x \leqslant 18$.

$45y \leqslant 438$, soit : $y \leqslant \dfrac{438}{45}$. Comme $y \in \mathbb{N}$ et $\dfrac{438}{45} \approx 9{,}7$, on obtient : $y \leqslant 9$.

b) Recopier et compléter les lignes (1), (2) et (3) de l'algorithme suivant afin qu'il affiche les couples (x ; y) possibles.

Entrées:	x et y sont deux nombres	
Traitement :	Pour x variant de 0 à **18**	(1)
	Pour y variant de 0 à **9**.	(2)
	Si $\mathbf{24x + 45y = 438}$	(3)
	Afficher x et y	
	Fin Si	

Fin Pour

Fin Pour

Fin traitement

2. Justifier que le coût total de la réservation est un multiple de 3.

Le coût total de la réservation est : $24x + 45y = 3(8x + 15y)$.

Donc le coût total de la réservation est un multiple de 3.

3. a) Justifier que l'équation $8x + 15y = 1$ admet pour solution au moins un couple d'entiers relatifs.

8 et 15 sont premiers entre eux, donc, d'après l'identité de Bézout, il existe au moins un couple d'entiers relatifs solution de (E).

b) Déterminer une telle solution.

une solution évidente : $(2 ; -1)$
Rappel : Algorithme d'Euclide :
$15 = 1\times 8 + 7$

$8 = 1\times 7 + 1$,

d'où, $1 = 8 - 1\times 7 = 8 - 1\times(15 - 8) = -1\times 15 + 2\times 8$

c) Résoudre l'équation (E) : $8x + 15y = 146$ où x et y sont des nombres entiers relatifs.

On a d'après b) : $8\times(2\times 146) + 15\times(-146) = 146$

(E) devient : $8x + 15\,y = 8\times 292 + 15\times(-146)$ qui équivaut à $8(x - 292) = 15(-146 - y)$.

Si $(x ; y)$ est une solution de (E), comme 8 divise le produit $15(-146 - y)$. et est premier avec 15, alors, d'après le théorème de Gauss, 8 divise $-146 - y$.

Il existe un entier k tel que : $-146 - y = 8k$.

En substituant dans l'équation, on a : $8(x - 292) = 15\times 8k$.

Un couple solution est de la forme $(292 + 15k, -146 - 8k)$ où $k \in \mathbb{Z}$.

Réciproquement : Comme $8(292+ 15k) + 15(-146 - 8k) = 8\times(292) + 8\times 15k + 15\times(-146) - 15\times 8k = 146$,

les solutions de (E) sont tous les couples $(292 + 15k, -146 - 8k)$ où $k \in \mathbb{Z}$.

4. Le randonneur se souvient d'avoir passé au maximum 13 nuits en hébergement A.

Montrer alors qu'il peut retrouver le nombre exact de nuits passées en hébergement A et celui des nuits passées en hébergement B.

Comme $8x + 15y = 146$ équivaut à $24x + 45y = 438$.

On résout : $k \in \mathbb{Z}$ et $0 \leqslant 292 + 15k \leqslant 13$, ce qui mène à $\dfrac{-292}{15} \leqslant k \leqslant \dfrac{-279}{15}$.

le seul entier vérifiant cet encadrement est -19.

Comme –146 – 8×(–19) = 6 est positif, la solution est unique

Calculer ces nombres.

Le nombre de nuitées en hébergement A est : 292 + 15×(–19) = 7 et en hébergement B est : 6

Code de l'algorithme

```
VARIABLES
  x EST_DU_TYPE NOMBRE
  y EST_DU_TYPE NOMBRE
DEBUT_ALGORITHME
  POUR x ALLANT_DE 0 A 18
    DEBUT_POUR
    POUR y ALLANT_DE 0 A 9
      DEBUT_POUR
      SI (24*x+45*y==438) ALORS
        DEBUT_SI
        AFFICHER "un couple"
        AFFICHER x
        AFFICHER y
        FIN_SI
      FIN_POUR
    FIN_POUR
FIN_ALGORITHME
```

Résultats

```
***Algorithme lancé***
```

onsole

```
**Algorithme lancé***
un couple
7
6

**Algorithme terminé***
```

Métropole 19 juin 2014

Un pisciculteur dispose de deux bassins A et B pour l'élevage de ses poissons. Tous les ans à la même période :

- *- il vide le bassin B et vend tous les poissons qu'il contenait et transfère tous les poissons du bassin A dans le bassin B ;*
- *- la vente de chaque poisson permet l'achat de deux petits poissons destinés au bassin A.*
  Par ailleurs, le pisciculteur achète en plus 200 *poissons pour le bassin A et* 100 *poissons pour le bassin B.*

Pour tout entier naturel supérieur ou égal à 1, on note respectivement a_n et b_n les effectifs de poissons des bassins A et B au bout de n années.
En début de première année, le nombre de poissons du bassin A est $a_0=200$ et celui du bassin B est $b_0=100$.

1. *Justifier que* $a_1=400$ *et* $b_1=300$ *puis calculer* a_2 *et* b_2.

La vente des 100 poissons du bassin B permet l'achat de 200 poissons pour le bassin A auxquels s'ajoutent les 200 poissons achetés chaque année, donc, $a_1 = 200 + 200 = 400$.

Les 200 poissons du bassin A sont transférés dans le bassin B et on y ajoute les 100 poissons achetés chaque année, donc, $b_1 = 200 + 100 = 300$

La vente des 300 poissons du bassin B permet l'achat de 600 poissons auquel s'ajoute l'achat des 200 poissons :, d'où, $a_2 = 600 + 200 = 800$.

Le transfert des poissons de A dans B auquel s'ajoute l'achat des 100 poissons : $b_2 = 400 + 100 = 500$.

2. *On désigne par* A *et* B *les matrices telles que* $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ *et* $B = \begin{pmatrix} 200 \\ 100 \end{pmatrix}$ *et pour tout entier naturel n, on pose* $X_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix}$.

   a. *Expliquer pourquoi pour tout entier naturel n,* $X_{n+1}=AX_n+B$.

$$X_{n+1} = \begin{pmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \end{pmatrix}$$

$a_{n+1} = 2\ b_n + 200$ (chaque poisson du bassin B permet l'achat de deux poissons auquel s'ajoute l'achat des 200 poissons).

$b_{n+1} = a_n + 100$ (transfert des poissons du bassin A auquel s'ajoute l'achat des 100 poissons)

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 200 \\ 100 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0\times a_n+2\times b_n \\ 1\times a_n+0\times b_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 200 \\ 100 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2b_n+200 \\ a_n+100 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \end{pmatrix} = X_{n+1}$$

   b. *Déterminer les réels* x *et* y *tels que* $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}+B$.

On résout le système : $\begin{cases} x=2y+200 \\ y=x+100 \end{cases}$ qui équivaut à $\begin{cases} x=2(x+100)+200 \\ y=x+100 \end{cases}$ qui équivaut à $\begin{cases} x=-400 \\ y=-300 \end{cases}$.

$x = –400$ et $y = –300$.

   c. Pour tout entier naturel n, on pose $Y_n=\begin{pmatrix} a_n+400 \\ b_n+300 \end{pmatrix}$.

   Démontrer que pour tout entier naturel n, $Y_{n+1}=AY_n$.

Pour tout entier naturel n,

$$Y_{n+1} = \begin{pmatrix} a_{n+1}+400 \\ b_{n+1}+300 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2b_n+200+400 \\ a_n+100+300 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2b_n+600 \\ a_n+400 \end{pmatrix}$$

et $AY_n = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_n+400 \\ b_n+300 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2b_n+600 \\ a_n+400 \end{pmatrix}$.

L'égalité est vérifiée.

3. *Pour tout entier naturel n, on pose $Z_n = Y_{2n}$.*

   a. *Démontrer que pour tout entier naturel n, $Z_{n+1} = A^2 Z_n$. En déduire que pour tout entier naturel n, $Z_{n+1} = 2Z_n$.*

Pour tout entier naturel n,

$$Z_{n+1} = Y_{2(n+1)} = Y_{2n+1+1} = AY_{2n+1} = A \times AY_{2n} = A^2 Z_n$$

$$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = 2 I_2$$ où I_2 est la matrice identité d'ordre 2.

(Remarque : A est donc inversible et $A^{-1} = \frac{1}{2} A$.)

On a donc : pour tout entier naturel n, $Z_{n+1} = 2Z_n$

   b. *On admet que cette relation de récurrence permet de conclure que pour tout entier naturel n, $Y_{2n} = 2^n Y_0$*
   En déduire que $Y_{2n+1} = 2^n Y_1$ puis démontrer que pour tout entier naturel n, $a_{2n} = 600 \times 2^n - 400$ et $a_{2n+1} = 800 \times 2^n - 400$.

$Y_{2n+1} = AY_{2n} = A \times 2^n Y_0 = 2^n \; AY_0 = 2^n Y_1$. La relation est démontrée.

Calcul de a_{2n} :

$$Y_0 = \begin{pmatrix} a_0 + 400 \\ b_0 + 300 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 600 \\ 400 \end{pmatrix}$$

$$Y_{2n} = \begin{pmatrix} a_{2n} + 400 \\ b_{2n} + 300 \end{pmatrix} = 2^n \begin{pmatrix} 600 \\ 400 \end{pmatrix}$$

On en déduit : $a_{2n} + 400 = 2^n \times 600$

$a_{2n} = 2^n \times 600 - 400.$

Calcul de a_{2n+1} :

$$Y_{2n+1} = \begin{pmatrix} a_{2n+1} + 400 \\ b_{2n+1} + 300 \end{pmatrix} \text{ et } Y_1 = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 600 \\ 400 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 800 \\ 600 \end{pmatrix}.$$

$$Y_{2n+1} = 2^n \begin{pmatrix} 800 \\ 600 \end{pmatrix}$$

On en déduit : $a_{2n+1} + 400 = 2^n \times 800$

$a_{2n+1} = 2^n \times 800 - 400.$

4. *Le bassin A a une capacité limitée à 10 000 poissons.*

   a. *On donne l'algorithme suivant.*

Variables :	a, p et n sont des entiers naturels
Traitement :	Demander à l'utilisateur la valeur de p.
	Si p est pair
	Affecter à n la valeur $\frac{p}{2}$

Affecter à a la valeur $600 \times 2^n - 400$

Sinon

Affecter à n la valeur $\frac{p-1}{2}$

Affecter à a la valeur $800 \times 2^n - 400$

Fin de Si

Sortie : Afficher a

Que fait cet algorithme ? Justifier la réponse.

Cet algorithme calcule le nombre de poissons dans le bassin A pour une année p.

Lorsque p est pair, on $p = 2n$ et on calcule a_{2n} .

Lorsque p est impair, $p = 2n + 1$ et on calcule a_{2n+1} .

Dans les deux cas, on affiche le nombre de poissons dans le bassin A.

b. *Écrire un algorithme qui affiche le nombre d'années pendant lesquelles le pisciculteur pourra utiliser le bassin A.*

On introduit un " TANT QUE " avec la condition d'arrêt : $a \leqslant 10\,000$, et, on demande d'afficher p.

Il faut donc supprimer " Demander à l'utilisateur la valeur de p. ",

initialiser p à 0,

introduire un compteur

et demander d'afficher p

Attention à incrémenter le compteur avant le calcul de a.
Le nombre d'années est 9.

Code de l'algorithme

```
VARIABLES
  a EST_DU_TYPE NOMBRE
  p EST_DU_TYPE NOMBRE
  n EST_DU_TYPE NOMBRE
DEBUT_ALGORITHME
  p PREND_LA_VALEUR 0
  TANT_QUE (a<=10000) FAIRE
    DEBUT_TANT_QUE
    p PREND_LA_VALEUR p+1
    SI (floor(p/2)-p/2==0) ALORS
      DEBUT_SI
      n PREND_LA_VALEUR p/2
      a PREND_LA_VALEUR pow(2,n)*600-400
      FIN_SI
      SINON
        DEBUT_SINON
        n PREND_LA_VALEUR (p-1)/2
        a PREND_LA_VALEUR pow(2,n)*800-400
        FIN_SINON
    FIN_TANT_QUE
  AFFICHER a
  AFFICHER p
FIN_ALGORITHME
```

Console

```
***Algorithme lancé***
12400
9
***Algorithme terminé***
```

Remarque :

on peut créer un algorithme qui donne les valeurs de a_n en utilisant les relations de récurrence trouvées dès le 1.

```
VARIABLES
  a EST_DU_TYPE NOMBRE
  b EST_DU_TYPE NOMBRE
  c EST_DU_TYPE NOMBRE
  d EST_DU_TYPE NOMBRE
  n EST_DU_TYPE NOMBRE
  message EST_DU_TYPE CHAINE
DEBUT_ALGORITHME
  //les variables c et d serviront de mémoire pour a(n) et b(n)
  //initialisation des variables, n=0, a_0=200,b_0=100
  n PREND_LA_VALEUR 0
  a PREND_LA_VALEUR 200
  b PREND_LA_VALEUR 100
  AFFICHER "a(0) = 200, b(0) = 100"
  //La condition d'arrêt du "Tant que" est a <= 10 000 (énoncé)
  TANT_QUE (a<=10000) FAIRE
    DEBUT_TANT_QUE
    c PREND_LA_VALEUR a
    d PREND_LA_VALEUR b
    a PREND_LA_VALEUR 2*d+200
    b PREND_LA_VALEUR c+100
    n PREND_LA_VALEUR n+1
    message PREND_LA_VALEUR " pour n="+n+", le terme a("+n+") prend la valeur "+a+", le terme b("+n+")prend la valeur "+b
    AFFICHER message
    FIN_TANT_QUE
FIN_ALGORITHME
```

Console

```
***Algorithme lancé***
a(0) = 200, b(0) = 100
 pour n=1, le terme a(1) prend la valeur 400, le terme b(1)prend la valeur 300
 pour n=2, le terme a(2) prend la valeur 800, le terme b(2)prend la valeur 500
 pour n=3, le terme a(3) prend la valeur 1200, le terme b(3)prend la valeur 900
 pour n=4, le terme a(4) prend la valeur 2000, le terme b(4)prend la valeur 1300
 pour n=5, le terme a(5) prend la valeur 2800, le terme b(5)prend la valeur 2100
 pour n=6, le terme a(6) prend la valeur 4400, le terme b(6)prend la valeur 2900
 pour n=7, le terme a(7) prend la valeur 6000, le terme b(7)prend la valeur 4500
 pour n=8, le terme a(8) prend la valeur 9200, le terme b(8)prend la valeur 6100
 pour n=9, le terme a(9) prend la valeur 12400, le terme b(9)prend la valeur 9300

***Algorithme terminé***
```