Index

Activité 1 page 14

Considérons la lampe n° n où $n \in \mathbb{N}^*$

Soit $\mathcal{D}$ la liste des diviseurs de n.

$\mathcal{D}$ contient au moins deux éléments 1 et n dès que $n \geqslant 2$.

Au départ, les lampes sont éteintes.

Lorsque à l'étape n, la lampe est dans un état, elle reste ensuite dans cet état puisque aucun diviseur de n n'est strictement supérieur à n.

Si le nombre de diviseurs est pair alors la lampe est éteinte. En effet, la lampe est éteinte au départ et on retrouve ce même état lors de **deux** interventions successives sur l'interrupteur.

Si le nombre de diviseurs est impair alors la lampe est allumée. En effet, un nombre impair est le suivant d'un nombre pair. On allume alors la lampe lors de l'action suivante.

Les nombres entiers ayant un nombre impair de diviseurs sont les carrés parfaits.

Activité 3 page 15

Corriger dans l'énoncé : La clé de contrôle est 0 si $r = 0$

La clé de contrôle est $10 - r$ si $0 < r \leqslant 9$.

1 a) b) c) La somme $S_1 + 3S_2 = 110$.

La clé de contrôle est donc 0 reste de la division de 110 par 10.

En règle générale, le chiffre des unités est le reste dans la division euclidienne par 10.

2 a) En inversant le premier et troisième terme S_1 ne change pas. La clé de contrôle ne détecte pas cette inversion.

b) Lorsqu'un seul chiffre est faux, la clé sera fausse. L'erreur est détectée.

En effet, $S_1 = a \times 10 + b$ où $a \in \mathbb{N}$ et $0 \leqslant b \leqslant 9$

$S_2 = c \times 10 + d$ où $c \in \mathbb{N}$ et $0 \leqslant d \leqslant 9$

d prend toutes les valeurs de l'ensemble $\{0 ; 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6 ; 7 ; 8 ; 9\}$

d	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**
$3d$	0	3	6	9	12	15	18	21	24	27

Or, le chiffre des unités de $3d$ prend **une et une seule fois** l'une des valeurs de $\{0 ; 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6 ; 7 ; 8 ; 9\}$

Si un seul chiffre est faux, le chiffre des unités soit de S_1 , soit de S_2 est changé.

2 c) Il est possible que si deux des douze premiers chiffres du code sont faux la clé reste correcte et ne détecte pas cette erreur.

Exemple : Le code donné en début d'exercice : 9782278069484

$S_1 = 9 + 8 + 2 + 8 + 6 + 4 = 37$

$S_2 = 7 + 2 + 7 + 0 + 9 + 8 = 33$

$S = 37 + 3\times 33 = 136$ La clé de contrôle est $10 - 6 = 4$

Si on remplace un des chiffres de S_1 et l'un de S_2 de façon à avoir le même chiffre des unités dans S, la clé ne détectera pas l'erreur.

En tapant par exemple : 9782178769484

$S_1 = 9 + 8 + 1 + 8 + 6 + 4 = 36$

$S_2 = 7 + 2 + 7 + 7 + 9 + 8 = 40$

$S = 36 + 3\times 40 = 156$ La clé de contrôle est $10 - 4 = 6$

Complément et remarque :

la clé de contrôle détecte la plupart des inversions de deux chiffres consécutifs, sauf, si la différence de ces dux chiffres est 5.

9782728069484

$S_1 = 9 + 8 + 7 + 8 + 6 + 4 = 42$

$S_2 = 7 + 2 + 2 + 0 + 9 + 8 = 28$

$S = 42 + 3\times 28 = 126$ La clé de contrôle est $10 - 4 = 6$

Activité 5 page 17 Chiffrement affine

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25
A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z

La fonction permettant de chiffrer (coder) la lettre est une fonction affine f telle que $f(x) = ax + b$

x est le rang de la lettre à coder, $r(x)$ est le rang de la lettre codée où $r(x)$ est le reste de $f(x)$ par 26.
le couple (a, b) est la clé du codage.
Les tableurs ont une fonction permettant de donner les code ASCII pour une lettre donnée, et, la lettre ayant un code ASCII
Pour OpenCalc : " =CODE(lettre) " renvoie le code ASCII, et " = CAR(nombre) " renvoie la lettre.
=CODE(E) renvoie 69 (Faire =CODE(lettre)–65 pour retrouver x)
= CAR(69) renvoie E (Faire =CAR(r(x) + 65) pour obtenir le caractère chiffré)

1) clé de codage (7, 17)

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z	AA	AB	AC	AD	AE	AF
1	Clé	a=	7		b=	17																										
2	Texte en clair	E	T	S	I	L	N	E	N	R	E	S	T	E	Q	U	U	N	J	E	S	E	R	A	I	C	E	L	U	I	L	A
3	ax+b	45	150	143	73	94	108	45	108	136	45	143	150	45	129	157	157	108	80	45	143	45	136	17	73	31	45	94	157	73	94	17
4	r(x)	19	20	13	21	16	4	19	4	6	19	13	20	19	25	1	1	4	2	19	13	19	6	17	21	5	19	16	1	21	16	17
5	texte chiffré	T	U	N	V	Q	E	T	E	G	T	N	U	T	Z	B	B	E	C	T	N	T	G	R	V	F	T	Q	B	V	Q	R

2) clé de codage (5, 11)

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z	AA	AB	AC	AD	AE	AF
1	Clé	a=	5		b=	11																										
2	Texte en clair	E	T	S	I	L	N	E	N	R	E	S	T	E	Q	U	U	N	J	E	S	E	R	A	I	C	E	L	U	I	L	A
3	ax+b	31	106	101	51	66	76	31	76	96	31	101	106	31	91	111	111	76	56	31	101	31	96	11	51	21	31	66	111	51	66	11
4	r(x)	5	2	23	25	14	24	5	24	18	5	23	2	5	13	7	7	24	4	5	23	5	18	11	25	21	5	14	7	25	14	11
5	texte chiffré	F	C	X	Z	O	Y	F	Y	S	F	X	C	F	N	H	H	Y	E	F	X	F	S	L	Z	V	F	O	H	Z	O	L

Clé de codage (31,11)

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z	AA	AB	AC	AD	AE	AF
1	Clé	a=	31		b=	11																										
2	Texte en clair	E	T	S	I	L	N	E	N	R	E	S	T	E	Q	U	U	N	J	E	S	E	R	A	I	C	E	L	U	I	L	A
3	ax+b	135	600	569	259	352	414	135	414	538	135	569	600	135	507	631	631	414	290	135	569	135	538	11	259	73	135	352	631	259	352	11
4	r(x)	5	2	23	25	14	24	5	24	18	5	23	2	5	13	7	7	24	4	5	23	5	18	11	25	21	5	14	7	25	14	11
5	texte chiffré	F	C	X	Z	O	Y	F	Y	S	F	X	C	F	N	H	H	Y	E	F	X	F	S	L	Z	V	F	O	H	Z	O	L

Clé de codage (265,37)

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z	AA	AB	AC	AD	AE	AF
1	Clé	a=	265		b=	37																										
2	Texte en clair	E	T	S	I	L	N	E	N	R	E	S	T	E	Q	U	U	N	J	E	S	E	R	A	I	C	E	L	U	I	L	A
3	ax+b	1097	5072	4807	2157	2952	3482	1097	3482	4542	1097	4807	5072	1097	4277	5337	5337	3482	2422	1097	4807	1097	4542	37	2157	567	1097	2952	5337	2157	2952	37
4	r(x)	5	2	23	25	14	24	5	24	18	5	23	2	5	13	7	7	24	4	5	23	5	18	11	25	21	5	14	7	25	14	11
5	texte chiffré	F	C	X	Z	O	Y	F	Y	S	F	X	C	F	N	H	H	Y	E	F	X	F	S	L	Z	V	F	O	H	Z	O	L

b) Les trois textes codés sont identiques au 2/a) mais différents du texte chiffré au 1/
au 2a) les différences $a - a'$ et $b - b'$ sont des multiples de 26.
Soit x un nombre entier : $f(x) = ax + b$ et $f(x) = 26\times q + r(x)$ avec $0 \leqslant r(x) < 26$
$g(x) = a'x + b'$ et $g(x) = 26\times q' + r'(x)$ avec $0 \leqslant r'(x) < 26$
$a' = a + 26k$ et $b' = b + 26k'$.
$g(x) = (a + 26k)x + b + 26k' = f(x) + 26kx + 26k' = 26\times q + r(x) + 26kx + 26k'$
$= 26(q + kx + k') + r(x)$ avec $0 \leqslant r(x) < 26$
Les restes sont donc égaux.
(Cette activité a pour but de préparer à la notion de congruence).
Données : $f(x) = 26\times q + r(x)$ avec $0 \leqslant r(x) < 26$
$g(x) = 26\times q' + r'(x)$ avec $0 \leqslant r'(x) < 26$
$a - a'$ et $b - b'$ sont des multiples de 26.
D'où :
$f(x) \equiv r(x)$ (26) avec $0 \leqslant r(x) < 26$, et, $g(x) \equiv r'(x)$ (26) avec $0 \leqslant r'(x) < 26$
$a - a'$ et $b - b'$ sont des multiples de 26, d'où, $a - a' \equiv 0$ (26) et $b - b' \equiv 0$ (26), soit : $a \equiv a'$ (26) et $b \equiv b'$ (26)
Comme $f(x) = ax + b$, on a : $f(x) \equiv a'x + b'$ (26)
Conclusion : $f(x) \equiv g(x)$ (26)

c) A priori, il existe : $25^2 = 625$ chiffrements possibles.

3) $a = 13$
a)

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z	AA	AB	AC	AD	AE	AF
1	Clé	a=	13		b=	37																										
2	Texte en clair	E	T	S	I	L	N	E	N	R	E	S	T	E	Q	U	U	N	J	E	S	E	R	A	I	C	E	L	U	I	L	A
3	ax+b	89	284	271	141	180	206	89	206	258	89	271	284	89	245	297	297	206	154	89	271	89	258	37	141	63	89	180	297	141	180	37
4	r(x)	11	24	11	11	24	24	11	24	24	11	11	24	11	11	11	11	24	24	11	11	11	24	11	11	11	11	24	11	11	24	11
5	texte chiffré	L	Y	L	L	Y	Y	L	Y	Y	L	L	Y	L	L	L	L	Y	Y	L	L	L	Y	L	L	L	L	Y	L	L	Y	L

Le message chiffré ne contient que deux lettres différentes.
b) $13x + b = 26q + r(x)$ et $13x' + b = 26q' + r(x')$ avec q, q' entiers et $0 \leqslant r(x) < 26$ et $0 \leqslant r(x') < 26$
$r(x) - r(x') = 13(x - x') - 26(q - q') = 13(x - x' - 2q + 2q')$ et $x - x' - 2q + 2q'$ est un entier.
D'autre part : $-26 < r(x) - r(x') < 26$
Les seuls multiples de 13 strictement compris entre –26 et 26 sont : –13, 0 et 13.
Comme –13 et 13 ont le même reste 13 dans la division 26, on n'a que deux valeurs possibles pour le codage.
On a un reste r et l'autre $r + 13$ (ou $r - 13$). (Dans l'exemple du 3a/ : 11 et 24)

c) 13 est un diviseur de 26.
Lorsque $a = 2$ (autre diviseur de 26), la même démarche va amener :
$r(x) - r(x')$ est un multiple de 2.
On n'a alors 13 lettres dans le codage (deux lettres différentes sont codées par la même lettre :
Le A (0) et le N (13), le B(1) et le O(14), ..., le E(4) et le R(17) .... ,

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z	AA	AB	AC	AD	AE	AF
1	Clé	a=	2		b=	37																										
2	Texte en clair	E	T	S	I	L	N	E	N	R	E	S	T	E	Q	U	U	N	J	E	S	E	R	A	I	C	E	L	U	I	L	A
3	ax+b	45	75	73	53	59	63	45	63	71	45	73	75	45	69	77	77	63	55	45	73	45	71	37	53	41	45	59	77	53	59	37
4	r(x)	19	23	21	1	7	11	19	11	19	19	21	23	19	17	25	25	11	3	19	21	19	19	11	1	15	19	7	25	1	7	11
5	texte chiffré	T	X	V	B	H	L	T	L	T	T	V	X	T	R	Z	Z	L	D	T	V	T	T	L	B	P	T	H	Z	B	H	L

Objectif bac page 26 Utiliser les propriétés des congruences (Antilles Guyane juin2005)
1 a) Un première **recherche** montre un cycle de trois restes : 1 ; 7 ; 4 ; … d'où, l'étude des trois cas :

Exposant	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**	**...**
Puissance de 7	1	7	49	343	2401	
Division par 9	$1 = 9\times0 + 1$	$7 = 9\times0 + 7$	$49 = 9\times5 + 4$	$343 = 9\times38 + 1$	$2401 = 9\times266 + 7$	
Reste	1	7	4	1	7	

Comme à chaque fois, on multiplie le précédent par 7, le cycle est " évident " … mais, **il faut le prouver** :

Preuve : (trois cas)

$n = 3k$ l'exposant est un multiple de 3 ou le reste de la division de n par 3 est 0.

$n = 3k + 1$ le reste de la division de n par 3 est 1

$n = 3k + 2$ le reste de la division de n par 3 est 2.

$7^{3k} = (7^3)^k$ (propriété des puissances)

Comme $7^3 \equiv 1$ (9), voir tableau, on a par propriété des congruences : $(7^3)^k \equiv 1^k$ (9)

Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a : $7^{3k} \equiv 1$ (9)

$7^{3k+1} = 7^{3k} \times 7$ (propriété des puissances), d'où, $7^{3k+1} \equiv 1 \times 7$ (9) (propriété des congruences)

$7^{3k+2} = 7^{3k} \times 7^2$ (propriété des puissances), d'où, $7^{3k+2} \equiv 1 \times 7^2$ (9) (propriété des congruences)

Comme $7^2 \equiv 4$ (9) (voir tableau), on a : $7^{3k+2} \equiv 4$ (9)

Conclusion : …....

b) étude de $(2005)^{2005}$

Le 1a) suggère d'une part de chercher le reste de 2005 dans la division par 9 (le facteur 2005)

d'autre part de chercher le reste de 2005 dans la division par 3 (l'exposant 2005)

$2005 = 9 \times 222 + 7$, d'où, $2005 \equiv 7$ (9)

$2005 = 3 \times 668 + 1$ donc $2005 = 3k + 1$ (référence au 1a)

$(2005)^{2005} \equiv 7^{3k+1}$ (9) et d'après 1a) : $(2005)^{2005} \equiv 7$ (9)

2) a) $10^0 = 1$, d'où, $10^0 \equiv 1$ (9)

$10^1 = 9 + 1$, d'où, $10^1 \equiv 1$ (9) ….

Deux pistes possibles de démonstration :

Directement : $10 \equiv 1$ (9), d'où, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $10^n \equiv 1^n$ (9) CQFD

Par récurrence : Soit un entier n tel que $10^n \equiv 1$ (9)

alors, comme $10^{n+1} = 10^n \times 10$, on a : $10^{n+1} \equiv 1 \times 1$ (9)

On a montré : Initialisation et hérédité ….

N = $\overline{a_n a_{n-1} \dots a_0}^{10}$ les a_i sont des chiffres. $a_i \in \{0 ; 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6 ; 7 ; 8 ; 9\}$

N = $a_n \times 10^n + \dots + a_0$ (un terme quelconque de cette somme est $a_i \times 10^i$)

Par propriété des congruences (compatibilité des opérations et congruences) : *tous les* $10^i \equiv 1$ *(9)*

N $\equiv a_n + a_{n-1} + \dots + a_0$ (9)

Or, S = $a_n + a_{n-1} + \dots + a_0$ (définition de S)

Conclusion : N $\equiv$ S (9)

c) On doit démontrer une équivalence (s'assurer de " l'aller-retour ".)

Proposition 1 : N est divisible par 9

Proposition 2 : S est divisible par 9.

" N est divisible par 9 " équivaut à " N $\equiv$ 0 (9) " (par définition de la divisibilité, le reste est 0)

équivaut à " S $\equiv$ 0 (9) " (on vient de montrer que N $\equiv$ S (9) et transitivité de la relation de congruence) équivaut à " S est divisible par 9 "

(C'est cette propriété qui s'appelle la preuve par 9)

3) On pose A = 2005^{2005}

a) La somme des chiffres de A est B, d'où, A ≡ B (9) (d'après 2b))

La somme des chiffres de B est C, d'où, B ≡ C (9) (d'après 2b))

La somme des chiffres de C est D, d'où, C ≡ D (9) (d'après 2b))

Par transitivité : A ≡ D (9)

b) 2005 < 10 000 (c'-à-d : 2005 < 10^4)

2005 < 10^4 En élevant à la puissance 2005, on conserve l'ordre

$2005^{2005} < (10^4)^{2005}$ or, $(10^4)^{2005} = 10^{(4\times 2005)} = 10^{8020}$

et, 10^{8020} a 8020 chiffres.

Chaque chiffre vaut au plus 9 … donc, la somme des chiffres fait au plus 9×8020 = 72 180

La somme des chiffres de A, notée B, vérifie donc : B ⩽ 72 180

c) B possède donc au plus 5 chiffres, et, chaque chiffre vaut au maximum 9. (9×5 = 45)

La somme des chiffres de B, notée C, vérifie donc : C ⩽ 45

d) Parmi tous les nombres inférieurs à 45, la somme maximale des chiffres est celle obtenue avec 39

(de 0 à 39, la somme maximale est obtenue avec 39, et, 40, 41, 42, 43, 44, 45 ont la somme de leurs chiffres inférieure à 12)

La somme des chiffres de C notée D vaut au maximum 12

D ⩽ 12

e) Résumons : A ≡ 7 (9) (montré à la question 1b)

A ≡ D (9) (montré à la question 3a)

D ⩽ 12 (montré à la question 3d)

On a donc : D ≡ 7 (9) et D ∈ ℕ.

Le seul entier naturel inférieur à 12 et congru à 7 est 7.

Conclusion : D = 7

Objectif bac page 27 Utiliser les propriétés de divisibilités d'entiers (Polynésie juin2011)

Soit (u_n) la suite d'entiers naturels définis par $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = 10u_n + 21 \end{cases}$, $n \in \mathbb{N}$.

1 a) $u_1 = 31$, $u_2 = 331$, $u_3 = 3331$

(On peut déjà remarquer comment sont les chiffres de ces premiers termes de la suite.

On conjecture : $u_n = 3\times 10^n + 3\times 10^{n-1} + ... + 3\times 10 + 1$

On multiple par 10, donc, 10 u_n *a pour chiffre des dizaines 1 et chiffre des unités 0, puis on ajoute 2 dizaines et une unité, d'où,* u_{n+1} *a trois dizaines et une unité.*

On peut donc ici faire une récurrence.

Initialisation : faite par la donnée de u_0

Hérédité : Soit un entier n tel que $u_n = 3\times 10^n + 3\times 10^{n-1} + ... + 3\times 10 + 1$

On a alors : $u_{n+1} = 10u_n+21 = 10(3\times 10^n + 3\times 10^{n-1} + ... + 3\times 10 + 1) + 21$

$= 3\times 10^{n+1} + 3\times 10^n + ... + 3\times 10^2 + 10 + 21$

$= 3\times 10^{n+1} + 3\times 10^n + ... + 3\times 10^2 + 3\times 10 + 1$

Conclusion : d'après l'axiome ....)

b) Proposition à démontrer : Pour tout entier naturel n, $3u_n = 10^{n+1} - 7$ (P(n))

Initialisation :

$3u_0 = 3\times 1 = 3$ et $10^{0+1} - 7 = 10 - 7 = 3$ P(0) est vérifiée.

Hérédité :

Soit un entier n tel que $3u_n = 10^{n+1} - 7$

Évaluons u_{n+1}

Par définition de (u_n) : $u_{n+1} = 10u_n+21$

d'où : $3u_{n+1} = 3\times(10u_n+21) = 10\times 3u_n + 63$

Comme par hypothèse de récurrence : $3u_n = 10^{n+1} - 7$, on obtient : $3u_{n+1} = 10\times 10^{n+1} - 70 + 63$

Soit : $3u_{n+1} = 10^{(n+1)+1} - 7$

On a montré : P(n) implique P(n+1)

Conclusion : D'après l'axiome de récurrence, la proposition est vraie pour tout $n\in\mathbb{N}$.

c) $3u_n = 10^{n+1} - 7$ équivaut à $3u_n + 7 = 10^{n+1} = 1\overbrace{0...0}^{(n+1)\ zéros}$

En retranchant 7, on a : $3u_n = \overbrace{9...9}^{n\ fois\ 9}3$,

puis en divisant par 3 : $u_n = \overbrace{3...3}^{n\ fois\ 3}1$.

2) Un nombre est divisible par 2 si et seulement si son chiffre des unités est pair.

Un nombre est divisible par 5 si et seulement si son chiffre des unités est 0 ou 5.

Pour tout $n\in\mathbb{N}$, u_n se termine par 1, donc, u_n n'est divisible ni par 2, ni par 5.

u_n = est un multiple de 3 plus 1, donc u_n n'est pas divisible par 3.

3 a) On a montré au 2a) $3u_n = 10^{n+1} - 7$

Comme $10 \equiv (-1)$ modulo 11 et $-7 \equiv 4$ modulo 11,

par compatibilité des opérations et congruences, on obtient : $3u_n \equiv (-1)^{n+1} + 4$ (11)

Or, $(-1)^{n+1} = -1\times(-1)^n$ d'où, $3u_n \equiv 4 - 1\times(-1)^n$ (11)

b) Rappel : u_n divisible par 11 si et seulement si $u_n \equiv 0 \quad (11)$.
Supposons u_n divisible par 11, en ce cas, on doit avoir : $3u_n \equiv 0 \quad (11)$.
Or, $3u_n \equiv 3\ (11)$ lorsque n est pair
$3u_n \equiv 5\ (11)$ lorsque n est impair.
Dans tous les cas, $3u_n$ n'est pas divisible par 11.
Conclusion : u_n n'est pas divisible par 11.

4) Algorithme :

```
INITIALISATION : Affecter à n la valeur 0
                 Affecter à r la valeur 1
TRAITEMENT :     Tant que r ≠ 0 Faire
                 |  Affecter à r le reste dans la
                 |  division de 10r + 4 par 17.
                 |  Affecter à n la valeur n + 1
                 FinTant que
SORTIE :         Afficher n
```

a) premier passage : $r = 1$
second passage : $r = 14$
troisième passage : r est le reste de la division euclidienne de 144 par 17,
$144 = 8 \times 17 + 8$ le reste est 8.
Les trois premières valeurs de r sont : 1 ; 14 et 8
b) Soit r_n le reste de la division euclidienne de u_n par 17.
Par définition de r_n : $u_n \equiv r_n \quad (17)$
et $u_{n+1} \equiv r_{n+1} \quad (17)$
Par définition de la suite (u_n) : $u_{n+1} = 10u_n + 21$
Comme $21 \equiv 4 \ (17)$
on a par compatibilité des opérations et congruences : $r_{n+1} \equiv 10\ r_n + 4 \quad (17)$

c) lorsque l'algorithme affiche 8, on est sorti de la boucle lorsque $r = 0$
Pour $n = 8$, le reste est nul.
u_8 est donc le premier terme de la suite divisible par 17.

Problème 2 page 28

1) Dans tout l'exercice $n \in \mathbb{N}$, a_n, b_n, q_n, r_n sont des entiers naturels.

$a_n = 4n + 1$, $b_n = n + 3$ (Remarques : (a_n) et (b_n) sont des suites arithmétiques)

Le tableur suggère que pour $n \geqslant 8$, le reste $r_n = n - 8$.

Par définition de la division euclidienne, on cherche un entier r_n tel que $0 \leqslant r_n < b_n$ avec $a_n = b_n \times q_n + r_n$

Comme $4n + 1 = 3(n + 3) + n - 8$, et, $0 \leqslant n - 8 < n + 3$ dès que $n \geqslant 8$, la conjecture est démontrée.

Pour n de 0 à 8, il faut étudier chaque cas.

2) $a_n = 6n^2 + 2$, $b_n = 2n + 1$

Conjecture : pour $n \geqslant 4$, le reste $r_n = n + 4$

Comme $6n^2 + 2 = (3n - 2)(2n + 1) + n + 4$, et, $0 \leqslant n + 4 < 2n + 1$ dès que $n \geqslant 4$, la conjecture est démontrée.

(En effet, $n + 4 > 0$ toujours vrai, et, $n + 4 < 2n + 1$ si $n > 3$)

Pour n de 0 à 4, il faut étudier chaque cas.

b) $a_n = 3n^2 - n + 1$, $b_n = 2n + 1$

Conjecture : deux cas à distinguer

Si n est pair, alors $n = 2k$ et $r_n = 3k + 3$ à partir de $n = 6$

Si n est impair, alors $n = 2k +1$ et $r_n = k + 3$ à partir de $n = 3$

Premier cas : $n = 2k$, $a_n = 12k^2 - 2k + 1$ et $b_n = 4k + 1$

$12k^2 - 2k + 1 = (4k + 1)(3k - 2) + 3k + 3$ avec $0 \leqslant 3k + 3 < 4k + 1$ (d'où, $k > 2$)

Deuxième cas : $n = 2k + 1$, $a_n = 12k^2 + 10k + 3$ et $b_n = 4k + 3$

$12k^2 + 10k + 3 = (4k + 3)\times 3k + k + 3$ avec $0 \leqslant k + 3 < 4k + 3$ (d'où, $k > 0$)

1 page 33

	...	est un	...	de	...	Preuve Dividende = Diviseur × quotient
a)	250	est un	multiple	de	50	$250 = 50 \times 5$
b)	21	est un	diviseur	de	– 2 100	$-2\,100 = 21 \times (-100)$
c)	0	est un	multiple	de	15	$0 = 15 \times 0$
d)	1	est un	diviseur	de	4	$4 = 1 \times 4$
e)	2013	est un	diviseur	de	0	$0 = 2013 \times 0$
f)	37	est un	diviseur	de	37	$37 = 37 \times 1$
	37	est un	multiple	de	37	$37 = 37 \times 1$

2 page 33 le terrain

Les dimensions x et y du terrain sont des entiers positifs ($x \in \mathbb{N}$ et $y \in \mathbb{N}$).

on suppose $x \leqslant y$

1) On sait que $xy = 300$ m²

x en mètres	***y en mètres***
1	300
2	150
3	100
4	75
5	60

***x* en mètres**	***y* en mètres**
6	50
10	30
12	25
15	20

commentaire : $300 = 2^2\times3\times5^2$

Un diviseur de 300 est de la forme $2^{\alpha}\times3^{\beta}\times5^{\gamma}$ où $\alpha \in \{0 ; 1 ; 2\}$, $\beta \in \{0;1\}$, $\gamma \in \{0 ; 1 ; 2\}$

En faisant un arbre de choix des exposants, on trouve tous les diviseurs de 300.

Leur nombre est donc : $3\times2\times3 = 18$

2) La largeur étant un multiple de 3, on peut avoir : 3 (et la longueur est 100) ; 6 (et la longueur est 50) ; 12 (et la longueur est 25) ou 15 (et la longueur est 20).

Comme la longueur est impaire, la seule longueur possible est 25.

dimensions : 12 et 25 mètres.

---

3 page 33

1a) On cherche le nombre d'**entiers** q tels que $1 \leqslant 13\times q \leqslant 1000$

d'où $\frac{1}{13} \leqslant 1 \leqslant q \leqslant 76 \leqslant \frac{1000}{13}$ et $q \in \mathbb{N}$.

Il existe 76 multiples de 13 compris entre 1 et 1000

b) Leur somme est un multiple de 13.

en effet, notons $m_i = 13\times i$ avec $1 \leqslant i \leqslant 76$ les multiples de 13

$$M = \sum_{i=1}^{i=76} m_i = \sum_{i=1}^{i=76} 13\times i = 13\times \sum_{i=1}^{i=76} i = \frac{13\times(1+76)\times76}{2} = 13\times2\,926$$

2a) On cherche le nombre d'**entiers** q tels que $10\,000 \leqslant 75\times q \leqslant 20\,000$

d'où $\frac{10000}{75} \leqslant 134 \leqslant q \leqslant 266 \leqslant \frac{20000}{75}$ et $q \in \mathbb{N}$.

Il existe $266 - 134 + 1 = 133$ multiples de 75 compris entre 10 000 et 20 000

b) Leur somme est un multiple de 75.

en effet, notons $m_i = 75\times i$ avec $134 \leqslant i \leqslant 266$ les multiples de 75

$$M = \sum_{i=134}^{i=266} m_i = \sum_{i=134}^{i=266} 75\times i = 75\times \frac{(134+266)\times133}{2} = 75\times 26\,600$$

Commentaires :

Les multiples d'un entier k s'écrivent $m_i = k\times q_i$ où les nombres q_i sont des entiers.

Leur somme est donc de de la forme $M = k\times \sum q_i = k\times Q$

Comme la somme d'entiers est un entier, le nombre $Q = \sum q_i$ est un entier naturel.

4 page 33

On cherche des entiers x et y tels que $y = \dfrac{12}{x}$, soit : $\begin{cases} x \neq 0 \\ x \in \mathbb{Z} \\ y \in \mathbb{Z} \end{cases}$ et $xy = 12$

Les couples de coordonnées sont donc (–12 ; –1) ; (–6 ; –2) ; (–4 ; –3) ; (–3 ; –4) ;(–2 ; –6) ; (–1 ; –12) ; (1 ; 12) ; (2 ; 6) ; (3 ; 4) ; (4 ; 3) ; (6 ; 2) ; (12 ; 1)

5 page 33 Parité

+	**Pair**	**Impair**
Pair	Pair	Impair
Impair	Impair	Pair

$\times$	**Pair**	**Impair**
Pair	Pair	Pair
Impair	Pair	Impair

Preuve :

Un entier pair p s'écrit $p = 2k$ où $k \in \mathbb{Z}$.

Un entier impair q s'écrit $q = 2k + 1$ où $k \in \mathbb{Z}$.

Soit p et p' deux entiers pairs : on a donc $p + p' = 2k + 2k' = 2(k + k') = 2k''$

et $p \times p' = 2k \times 2k' = 2(2k \times k') = 2k'''$

Comme la somme de deux entiers est un entier et le produit de deux entiers est un entier, les nombres k'' et k''' sont aussi des entiers.

Soit q et q' deux entiers impairs : on a donc $q + q' = 2k + 1 + 2k' + 1 = 2(k + k' + 1) = 2k''$

et $q \times q' = (2k + 1)\times(2k' + 1) = 2\times 2kk' + 2k + 2k' + 1$

$= 2(2kk' + k + k') + 1 = 2k''' + 1$

Comme la somme de deux entiers est un entier et le produit de deux entiers est un entier, les nombres k'' et k''' sont aussi des entiers.

Soit p un entier pair et q un entier impair.

$p + q = 2k + (2k' + 1) = 2(k + k') + 1$ et $p \times q = 2k(2k' + 1) = 2(2kk' + k)$

2) Soit un entier a.

a et $a^2 = a \times a$ ont la même parité, puisque le produit de deux entiers pairs est pair et celui de deux entiers impairs est impair.

6 page 33

x et y sont deux entiers vérifiant l'égalité (1) : $5x + y = 8$.

(Si l'exercice précédent est résolu, il suffit de l'appliquer en distinguant les 2 cas de parité de x).

Raisonnement par disjonction des cas :

cas où x est pair :

On peut écrire $x = 2k$ avec $k \in \mathbb{Z}$.

On a alors d'après (1) : $y = 8 - 5\times 2k = 2(4 - 5k)$

Comme $k \in \mathbb{Z}$ alors $k' = 4 - 5k \in \mathbb{Z}$.

y, étant de la forme $2k'$, est donc un nombre pair.

cas où x est impair :

On peut écrire $x = 2k + 1$ avec $k \in \mathbb{Z}$.

On a alors d'après (1) : $y = 8 - 5\times(2k + 1) = 3 - 5\times 2k = 2 + 1 - 5\times 2k = 2(1 - 5k) + 1$

Comme $k \in \mathbb{Z}$ alors $k' = 1 - 5k \in \mathbb{Z}$.

y, étant de la forme $2k' + 1$, est donc un nombre impair.
Conclusion :
dans tous les cas x et y ont même parité.

---

7 page 33
soit $\mathscr{L}1$, la liste des diviseurs de $N = 12\ 496$

$12\ 496 = 2\times 6\ 248 = 2\times 2\times 3\ 124 = 2\times 2\times 2\times 1\ 562 = 2\times 2\times 2\times 2\times\ 781 = 2\times 2\times 2\times 2\times\ 11\times 71 = 2^4\times 11\times 71$

12 496 a donc : $5\times 2\times 2 = 20$ diviseurs

$\mathscr{L}1 = \{1 ; 2 ; 4 ; 8 ; 11 ; 16 ; 22 ; 44 ; 71 ; 88 ; 142 ; 176 ; 284 ; 568 ; 781 ; 1\ 136 ; 1\ 562 ; 3\ 124 ; 6\ 248 ; 12496\}$

La somme des diviseurs autres que lui-même est :

$\mathscr{S}1 = 1 + 2 + 4 + 8 + 11 + 16 + 22 + 44 + 71 + 88 + 142 + 176 + 284 + 568 + 781 + 1136 + 1562 + 3124 + 6248$

$= 14\ 288$

soit $\mathscr{L}2$, la liste des diviseurs de 14 288

$\mathscr{L}2 = \{1 ; 2 ; 4 ; 8 ; 16 ; 19 ; 38 ; 47 ; 76 ; 94 ; 152 ; 188 ; 304 ; 376 ; 752 ; 893 ; 1786 ; 3572 ; 7144 ; 14288\}$

La somme des diviseurs autres que lui-même est :

$\mathscr{S}2 = 1+ 2+ 4+ 8+ 16+ 19+ 38+ 47+ 76+ 94+ 152+ 188+ 304+ 376+ 752+ 893+ 1786+ 3572+ 7144 = 15\ 472$

$\mathscr{L}3 = \{1 ; 2 ; 4 ; 8 ; 16 ; 967 ; 1\ 934 ; 3\ 868 ; 7\ 736 ; 15\ 472\}$

$\mathscr{S}3 = 1+ 2+ 4+ 8+ 16+ 967+ 1\ 934+ 3\ 868+ 7\ 736 = 14\ 536$

$\mathscr{L}4 = \{1 ; 2 ; 4 ; 8 ; 23 ; 46 ; 79 ; 92 ; 158 ; 184 ; 316 ; 632 ; 1817 ; 3634 ; 7268\}$

$\mathscr{S}4 = 1+ 2+ 4+ 8+ 23+ 46+ 79+ 92+ 158+ 184+ 316+ 632+ 1817+ 3634 = 14\ 264$

$\mathscr{L}5 = \{1 ; 2 ; 4 ; 8 ; 1783 ; 3566 ; 7132 ; 14264\}$

$\mathscr{S}5 = 1+ 2+ 4+ 8+ 1783+ 3566+ 7132 = 12\ 496$

On retrouve le nombre N.

---

11 page 34
On cherche les entiers a tels que $a^2 - 1$ est divisible par 4.

Supposons que a est pair :

$a = 2k$ avec $k \in \mathbb{Z}$.
$a^2 - 1 = 4k^2 - 1$ est donc un nombre impair.
Si a est pair alors $a^2 - 1$ n'est pas divisible par 4

Supposons que a est impair :

$a = 2k + 1$ avec $k \in \mathbb{Z}$.
$a^2 - 1 = 4k^2 + 4k = 4(k^2 + k)$ est donc un multiple de 4.
Si a est impair alors $a^2 - 1$ est divisible par 4.

Conclusion : $a^2 - 1$ est divisible par 4 si et seulement si a est impair.

---

12 page 34

Énoncé du livre :

1)

	A	B	C	D
1	p	p-1	p+11	(p+11)/(p-1)
2	2	1	13	13
3	3	2	14	7
4	4	3	15	5
5	5	4	16	4
6	6	5	17	3,4
7	7	6	18	3
8	8	7	19	2,714285714
9	9	8	20	2,5
10	10	9	21	2,333333333
11	11	10	22	2,2
12	12	11	23	2,090909091
13	13	12	24	2
14	14	13	25	1,923076923
15	15	14	26	1,857142857
16	16	15	27	1,8
17	17	16	28	1,75
18	18	17	29	1,705882353

Conjecture : Les quotients sont entiers lorsque $p \in \{2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 7 ; 13\}$

Il apparaît que les quotients vont en décroissant (la fonction : $p \mapsto \dfrac{p+11}{p-1}$ *est décroissante sur* $]1 ; +\infty[$).

On n'aura jamais un quotient égal à 1, car, $p + 11 \neq p - 1$.

2) ***démonstration de l'équivalence : "*** $p + 11 = k(p - 1)$ " $\Leftrightarrow$ " $(p - 1)(k - 1) = 12$ " avec k entier naturel.

On étudie la première égalité :

$p + 11 = k(p - 1) \Leftrightarrow p + 11 = kp - k \Leftrightarrow 12 - 1 + p = kp - k \Leftrightarrow 12 = kp - k - p + 1$

On étudie la deuxième égalité :

Or, $(p - 1)(k - 1) = kp - k - p + 1$, d'où, $(p - 1)(k - 1) = 12 \Leftrightarrow 12 = kp - k - p + 1$

L'équivalence est démontrée.

Commentaires : *Il s'agit de monter que (p) $\Leftrightarrow$ (q).*
En montrant : (p) $\Leftrightarrow$ (r) et (q) $\Leftrightarrow$ (r), on a montré : (p) $\Leftrightarrow$ (q)

3) p est un entier supérieur ou égal à 2, donc, $p - 1$ est un entier naturel non nul.

" $p - 1$ divise $p + 11$ " équivaut à " il existe un entier k tel que $p + 11 = k(p - 1)$ "
D'après l'équivalence du 2/, on cherche les produits de deux facteurs égaux à 12.

$p - 1 = 1$ et $k - 1 = 12$. soit : $p = 2$ ($p - 1 = 1$ et $p + 11 = 13$)
$p - 1 = 2$ et $k - 1 = 6$. soit : $p = 3$ ($p - 1 = 2$ et $p + 11 = 14$)
$p - 1 = 3$ et $k - 1 = 4$. soit : $p = 4$ ($p - 1 = 3$ et $p + 11 = 15$)
$p - 1 = 4$ et $k - 1 = 3$. soit : $p = 5$ ($p - 1 = 4$ et $p + 11 = 16$)
$p - 1 = 6$ et $k - 1 = 2$. soit : $p = 7$ ($p - 1 = 6$ et $p + 11 = 18$)
$p - 1 = 12$ et $k - 1 = 1$. soit : $p = 13$ ($p - 1 = 12$ et $p + 11 = 24$)

Une autre méthode : (sans suivre l'énoncé)

p est un entier supérieur ou égal à 2, donc, $p - 1$ est un entier naturel non nul.

Si $p - 1$ divise $p + 11$ alors,

comme $p - 1$ divise $p - 1$ et $p - 1$ divise $p + 11$, $p - 1$ divise toute combinaison linéaire de $p - 1$ et $p + 11$.

$p - 1$ divise $p + 11 - (p - 1) = 12$
$p - 1 \in \{1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 6 ; 12\}$
$p \in \{2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 7 ; 13\}$
Réciproquement :
Si $p = 2$ alors $p + 11 = 13$ et $p - 1 = 1$ divise 13.
Si $p = 3$ alors $p + 11 = 14$ et $p - 1 = 2$ divise 14.
Si $p = 4$ alors $p + 11 = 15$ et $p - 1 = 3$ divise 15.
Si $p = 5$ alors $p + 11 = 16$ et $p - 1 = 4$ divise 16.
Si $p = 7$ alors $p + 11 = 18$ et $p - 1 = 6$ divise 18.
Si $p = 13$ alors $p + 11 = 24$ et $p - 1 = 12$ divise 24.

---

18 page 35

Tous les produits de trois facteurs donnant 36 et la somme de ces facteurs :

$1\times1\times36$ $1 + 1 + 36 = 38$

$1\times2\times18$ $1 + 2 + 18 = 21$

$1\times3\times12$ $1 + 3 + 12 = 16$

$1\times4\times9$ $1 + 4 + 9 = 14$

$1\times6\times6$ $1 + 6 + 6 = 13$

$2\times3\times6$ $2 + 3 + 6 = 11$

$2\times2\times9$ $2 + 2 + 9 = 13$

$3\times3\times4$ $3 + 3 + 4 = 10$

Comme la somme est connue, les seuls cas insuffisants sont les cas où cette somme vaut 13.

mais comme, il n'y a qu'un seul aîné, les âges sont : 2 ; 2 et 9

---

35 page 36

$(x, y) \in \mathbb{Z}^2$, $A = x + y$ et $B = 2x + 3y$.

1) Soit d un diviseur commun à x et y.

A et B sont des combinaisons linéaires à coefficients entiers de x et y.

Comme d divise x et d divise y alors d divise toute combinaison linéaire à coefficients entiers de x et y, don, d divise A et B.

L'ensemble $\mathcal{D}$ des diviseurs communs à x et y est inclus dans l'ensemble $\mathcal{E}$ des diviseurs communs à A et B.

Conclusion 1: $\mathcal{D} \subset \mathcal{E}$.

2) $3A - B = 3x + 3y - 2x - 3y = x$

$B - 2A = 2x + 3y - 2x - 2y = y$.

Ainsi, x et y sont des combinaisons linéaires à coefficients entiers de A et B.

Un diviseur commun à A et B est donc un diviseur commun à x et y.

Conclusion 2 : $\mathcal{E} \subset \mathcal{D}$.

Des conclusions 1 et 2, il vient : $\mathcal{D} = \mathcal{E}$.

3. Application :

Proposition à démontrer :

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $2^n + 3^n$ et $2^{n+1} + 3^{n+1}$ sont premiers entre eux.

On pose $x = 2^n$, $y = 3^n$, $A = x + y = 2^n + 3^n$, $B = 2x + 3y = 2^{n+1} + 3^{n+1}$

$n = 0$, $x = 1$, $y = 1$, $A = 2$ et $B = 5$. A et B sont premiers entre eux.

$n \geqslant 1$, pour prouver que A et B sont premiers entre eux, il suffit de prouver que 2^n et 3^n sont premiers entre eux d'après la conclusion des questions 1 et 2.

Or, les diviseurs de 2^n sont 1 et les puissances de 2 qui sont des entiers pairs.

Les diviseurs de 3^n sont nécessairement impairs.

1 est le seul diviseur commun à 2^n et 3^n. CQFD

---

44 page 37

$n \in \mathbb{N}$,
a) l'égalité $2^{n+1} + 1 = (2^n - 1) \times 2 + 3$
Si le diviseur est 2, 3 étant supérieur à 2, ce n'est pas une division euclidienne.
Si le diviseur est $2^n - 1$, il faut : $0 \leqslant 3 < 2^n - 1$, soit : $2^n > 4$.
Lorsque $n \geqslant 3$, on a la division euclidienne de $2^{n+1} + 1$ par $(2^n - 1)$.
Le quotient est 2, le reste est 3.

b) $(n - 2)^2 = (n - 4)n + 4$
Si le diviseur est $n - 4$, il faut : $0 \leqslant 4 < n - 4$, soit : $n \geqslant 9$.
Lorsque $n \geqslant 9$, on a la division euclidienne de $(n - 2)^2$ par $(n - 4)$.
Le quotient est n, le reste est 4.

Si le diviseur est n, il faut : $0 \leqslant 4 < n$, soit : $n \geqslant 5$.
Lorsque $n \geqslant 5$, on a la division euclidienne de $(n - 2)^2$ par n.
Le quotient est $n - 4$, le reste est 4.

c) $(3n + 1)^2 = 3(3n^2 + 2n) + 1$.

Si le diviseur est 3 , il faut : $0 \leqslant 1 < 3$. Ce qui est vrai
On a la division euclidienne de $(3n + 1)^2$ par 3.
Le quotient est $(3n^2 + 2n)$, le reste est 1.

Si le diviseur est $(3n^2 + 2n)$, il faut : $0 \leqslant 1 < (3n^2 + 2n)$. Ce qui est vrai dès que $n \geqslant 1$.
Lorsque $n \geqslant 1$, on a la division euclidienne de $(3n + 1)^2$ par $(3n^2 + 2n)$.
Le quotient est 3, le reste est 1.

---

49 page 50

a) $132 \equiv 47\ (15)$ est faux, car, $132 - 47 = 85$ et 85 n'est pas un multiple de 15

ou encore : $132 = 15\times8 + 12$ et $47 = 15\times3 + 2$ $\quad 12 \neq 2$.

b) $-209 \equiv 131\ (28)$ est faux, car, $131 - (-209) = 340$ et 340 n'est pas un multiple de 28.

ou encore : $-209 = 28\times(-8) + 15$ et $131 = 28\times4 + 19$ $\quad 15 \neq 19$

c) $1214 \equiv -8\ (44)$ est faux, car, $1214 - (-8) = 1222$ et 1222 n'est pas un multiple de 44.

ou encore : $1214 = 44\times27 + 26$ et $-8 = 44\times(-1) + 36$ $\quad 27 \neq 36$

d) $899 \equiv -1\ (45)$ est vrai, car, $899 - (-1) = 900$ et $900 = 45\times20$
ou encore : $899 = 45\times19 + 44$ et $-1 = 45\times(-1) + 44$.

---

50 page 37

x est un entier.
a) $218 \equiv x\ (11)$ et $0 < x < 11$.
Comme $218 = 11\times19 + 9$, on obtient : $x = 9$
b) $-1\,116 \equiv x\ (23)$ et $-23 < x < 0$.
Comme $-1\,116 = 23\times(-48) - 12$, on obtient $x = -12$.
Attention : $-1\,116 = 23\times(-48) - 12$ n'est pas la division euclidienne de $-1\,116$ par 23
c) $7\,000 \equiv x\ (102)$ et $-102 < x < 0$
Comme $7\,000 = 29\times102 - 38$, on obtient $x = -38$.
Attention : $7\,000 = 29\times102 - 38$ n'est pas la division euclidienne de 7 000 par 102.

---

66 page 38

I- Méthode générale à retenir pour étudier des " grandes " puissances ….

Propriétés utiles :

$a \equiv a'\ (b)$ implique $a^n \equiv a'^n\ (b)$ où $n\in\mathbb{N}$. (Propriété de congruences)
Si $n = pq + r$ alors $a^n = a^{pq+r} = (a^p)^q\times a^r$ Propriété des puissances.

Dans un premier temps, on cherche *(s'il existe)* un entier p tel que $a^p \equiv 1\ (b)$ et on aura alors : $a^n \equiv a^r\ (b)$
où r est le reste dans la division euclidienne de n par p.
L'existence sera étudiée plus tard.
Pour en savoir plus, vous pouvez consulter : http://fr.wikipedia.org/wiki/Congruence_sur_les_entiers
Vous ne comprendrez pas tout du premier coup, mais presque ….

Application : étude de $2013^{8001}\ (16)$

1 a) 2 013 = 16×125 + 13 , donc, 2013 ≡ 13 (16) ou encore 2013 ≡ –3 (16)

en élevant à la puissance 4 : $2013^4 \equiv (-3)^4$ (16)

Comme $(-3)^4 = 81$ et que 81 = 16×5 + 1, on obtient : $\mathbf{2013^4 \equiv 1\ (16)}$

On peut aussi étudier 13^4 : $13^4 = (13^2)^2$ $13^2 = 169 = 16\times10 + 9$

donc : $13^2 \equiv 9$ (16), puis, $(13^2)^2 \equiv 9^2$ (16). On retrouve le résultat précédent.

Interprétation du résultat :

on a un cycle de 4 restes … 2013 ≡ 13 (16), $2013^2 \equiv 9$ (16), $2013^3 \equiv 5$ (16), $2013^4 \equiv 1$ (16) ….

en multipliant à nouveau par 2013, on retrouve les restes 13, 9, 5, 1 dans la division euclidienne de 2013^n *par 16.*

b) *Maintenant pour étudier* 2013^{8001} *, on va " décomposer " 8001 en regardant combien de fois on a ce cycle de 4 dans le produit de 2013 par 2013 par 2013 …. (8001 fois)*

C'est la division euclidienne de 8001 par 4 qui va nous donner la réponse ….

Comme 8 001 = 4×2000 + 1 on a : $2013^{8001} = (2013^4)^{2000} \times 2013$

d'où, $2013^{8001} \equiv 1^{2000} \times 13$ (16) $\mathbf{2013^{8001} \equiv 13\ (16)}$

II- Récurrence.

Méthode :

Bien structurer sa pensée .

Conseil : commencer par énoncer précisément la proposition (qui est fonction de n) à démontrer.

Initialisation : pour éviter de travailler sur du vide, il est nécessaire de s'assurer qu'il y a au moins un entier n tel que la proposition est vérifiée, et, on prend le premier entier n_0 de la liste …. car, à l'étape suivante, on ne peut pas " remonter " la liste …

Hérédité : dans cette étape, on s'intéresse à la façon de transmettre la proposition. C'est une implication.

Puisqu'il existe au moins **un entier** n pour lequel la proposition est vérifiée, on va montrer que la proposition se transmet à son suivant $n + 1$

Conclusion : Un des axiomes ayant permis de définir ℕ, permet de conclure que la propriété est vérifiée pour **tout** $n \geqslant n_0$

" Si un ensemble d'entiers naturels contient 0 et contient le successeur de chacun de ses éléments, alors cet ensemble est égal à ℕ. "

Pour en savoir plus, vous pouvez consulter : http://fr.wikipedia.org/wiki/Raisonnement_par_récurrence

(fin de l'article dépasse notre niveau, mais, sinon c'est le niveau de terminale)

Application :

la suite (u_n) est définie par : $\begin{cases} u_0 = 2013^2 - 1 \\ u_{n+1} = (u_n + 1)^5 - 1 \end{cases}$

Pour tout entier naturel n, soit la proposition P_n : u_n est divisible par 4.

Démontrons que la proposition est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Initialisation :

$n = 0$ (On vérifie que le nombre u_0 est divisible par 4).

$u_0 = 2013^2 - 1$ Or, $2013 = 2012 + 1$ et $2012 = 4\times503$, donc : $2013 \equiv 1\ (4)$

$u_0 \equiv 1^2 - 1\ (4)$, soit : $u_0 \equiv 0\ (4)$

u_0 est un multiple de 4.

(Autre calcul : $u_0 = (2013 - 1)(2013 + 1) = 2012\times2014$ et 2012 est un multiple de 4.)

P_0 est vraie

Hérédité :

Soit un entier naturel n tel que P_n est vérifiée.

On a donc : $u_n \equiv 0\ (4)$ (Hypothèse de récurrence) *(on cherche alors comment parvenir à u_{n+1} à partir de sa définition)*

Or, $u_{n+1} = (u_n + 1)^5 - 1$ définition de la suite (u_n).

d'où, $u_{n+1} \equiv (0 + 1)^5 - 1\ (4)$ *compatibilité des congruences et des opérations, et hypothèse de récurrence*

$u_{n+1} \equiv 1^5 - 1\ (4)$

$u_{n+1} \equiv 0\ (4)$ (Autrement dit : u_{n+1} est divisible par 4)

P_{n+1} est vérifiée.

On a montré : P_0 vraie et $\mathrm{P}_n \Rightarrow \mathrm{P}_{n+1}$

Conclusion :

D'après l'axiome de récurrence, la proposition P_n est vraie pour tout entier naturel n.

---

72 page 39 différents raisonnements

Proposition à démontrer : Si a^2 est impair alors a est impair.

1) **Contraposée** : Si a n'est pas impair alors a^2 n'est pas impair

Soit : Si a est pair alors a^2 est pair.

Rappel : L'implication $(A \Rightarrow B)$ est équivalente à l'implication $(\overline{B} \Rightarrow \overline{A})$

L'implication $(\overline{B} \Rightarrow \overline{A})$ est équivalente à l'implication $(A \Rightarrow B)$.

$a = 2k$ avec $k \in \mathbb{Z}$, d'où, $a^2 = 4k^2 = 2\times2k^2$ avec $2k^2$ entier.
On a montré : Si a est pair alors a^2 est pair.
Conclusion: Si a^2 est impair alors a est impair.

2) **Par l'absurde :**
Rappel : On pose en hypothèses, la condition suffisante (donnée) et la négation de la condition nécessaire (conclusion) et, on montre qu'il y a une contradiction.
Comme la donnée est certaine, la contradiction est due à la négation de la conclusion.
Ici:
Condition suffisante: a^2 impair

Négation de la condition nécessaire: a pair

Démonstration :
Supposons a^2 impair (donnée) et a pair (négation de la conclusion).
la somme $a^2 + a$ est impaire.
Or, $a^2 + a = a(a + 1)$
Parmi les entiers a et $a + 1$, un des entiers est pair, donc, le produit est pair.
On a donc une contradiction.
Il est impossible d'avoir a pair lorsque a^2 est impair.
Conclusion: Si a^2 est impair alors a est impair.

autre démonstration: k et k' sont des entiers.
a^2 impair s'écrit sous la forme $a^2 = 2k + 1$
a pair s'écrit sous la forme $a = 2k'$.
On a alors: $a^2 = 4k'^2$
L'égalité: $2k + 1 = 4k'^2$ mène à $1 = 2(2k'^2 - k)$, soit: 1 est un multiple de 2.
On a donc une contradiction.
Il est impossible d'avoir a pair lorsque a^2 est impair.
Conclusion: Si a^2 est impair alors a est impair.

3) **Disjonction des cas :**
Donnée : a entier et a^2 impair.
On a deux cas possibles, a est pair ou a est impair.
Si a est pair, le carré a^2 est pair (voir 1))
Si a est impair, on peut écrire $a^2 = (2k + 1)^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 2(2k^2 + 2k) + 1$ avec $2k^2 + 2k$ entier.
a^2 est donc impair.
Le seul cas où a^2 est impair est le cas où a est impair.
Conclusion: Si a^2 est impair alors a est impair.

---

100 page 42
s est un entier naturel tel que l'équation : $x^2 - sx + 2012 = 0$ admette deux solutions entières.

1) Pour toute équation du second degré $ax^2 + bx + c = 0$ ayant deux solutions :

$x_1 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$, on a :

$$S = x_1 + x_2 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} + \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = -\frac{b}{a} \text{ et } P = x_1x_2 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} \times \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{b^2-\Delta}{4a^2} = \frac{c}{a}.$$

Le produit P des racines est $P = 2012$ et la somme de ces racines est s.

Savoir : si on connaît la somme S de deux nombres réels et le produit P de ces deux nombres alors ces nombres sont solutions d'une équation du second degré de la forme $x^2 - Sx + P = 0$

Réciproquement, si une équation du second degré $ax^2 + bx + c = 0$ a deux solutions alors la somme de ces solutions vaut $-\dfrac{b}{a}$ et le produit vaut $\dfrac{c}{a}$.

2) Les valeurs possibles de s.

P	x_1	x_2	***s***
2012	–1	–2012	–2013

P	x_1	x_2	***s***
2012	–2	–1006	–1008
2012	–4	–503	–507
2012	1	2012	2013
2012	2	1006	1008
2012	4	503	507

104 page 42

On pose pour tout $n\in\mathbb{N}$, $u_n = 3^{2n+1} + 2^{n+2}$

1)

n	3^{2n+1}	2^{n+2}	u_n	**division par 7**
0	3	$2^2 = 4$	7	$7 = 7\times1 + 0$
1	$3^3 = 27$	$2^3 = 8$	35	$35 = 7\times5 + 0$
2	$3^5 = 243$	$2^4 = 16$	259	$259 = 7\times37 + 0$
3	$3^7 = 2\,187$	$2^5 = 32$	2219	$2219 = 7\times317 + 0$
4	$3^9 = 19\,683$	$2^6 = 64$	19747	$19747 = 7\times2821 + 0$
5	$3^{11} = 177\,147$	$2^7 = 128$	177275	$177275 = 7\times25325 + 0$

2) Par définition de la (u_n) : $u_{n+1} = 3^{2(n+1)+1} + 2^{(n+1)+2}$

$u_{n+1} = 3^{2n+3} + 2^{n+3}$

Une méthode :

faire apparaître 2^{n+2} dans l'écriture de u_{n+1} et remplacer par $u_n - 3^{2n+1}$ d'après la définition de u_n.

$u_{n+1} = 3^{2n+3} + 2^{n+3} = 3^{2n+1+2} + 2^{n+2+1} = 9\times 3^{2n+1} + 2\times(u_n - 3^{2n+1})$

$u_{n+1} = 7\times 3^{2n+1} + 2\times u_n$

Une autre méthode :

développer le second membre : $7\times 3^{2n+1} + 2\times u_n = 7\times 3^{2n+1} + 2\times(3^{2n+1} + 2^{n+2}) = 9\times 3^{2n+1} + 2\times2^{n+2}$

Comme $9\times 3^{2n+1} + 2\times2^{n+2} = 3^{2n+3} + 2^{n+3}$,

l'égalité : $u_{n+1} = 7\times 3^{2n+1} + 2\times u_n$ est démontrée.

3) **Initialisation** : faite au 1/

Hérédité :

Soit un entier $n\in\mathbb{N}$ tel que u_n est divisible par 7.

On a donc : $u_n \equiv 0\ (7)$

Or, $7\times 3^{2n+1} \equiv 0\ (7)$ et $2\times u_n \equiv 0\ (7)$, donc, la somme $7\times 3^{2n+1} + 2\times u_n \equiv 0\ (7)$

D'après le 2/ : $u_{n+1} \equiv 0\ (7)$

Conclusion : D'après l'axiome de récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : u_n divisible par 7.

Remarque :

On peut prouver directement que u_n est divisible par 7.

En effet : $3^{2n+1} + 2^{n+2} = 3^{2n} \times 3 + 2^n \times 2^2 = 9^n \times 3 + 2^n \times 2^2$

Or, $9 \equiv 2\ (7)$, $3 \equiv -4\ (7)$, d'où : $9^n \times 3 \equiv -4 \times 2^n\ (7)$

D'où, la somme $9^n \times 3 + 2^n \times 2^2 \equiv 0\ (7)$

---

105 page 42

P est un polynôme à coefficients entiers.

Pour tout i, $0 \leqslant i \leqslant n$, $a_i \in \mathbb{Z}$.

$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$.

1) Soit r une racine **entière** du polynôme P.

On a donc : $P(r) = 0$, soit : $a_n r^n + a_{n-1} r^{n-1} + \ldots + a_1 r + a_0 = 0$

On en déduit : $a_0 = -(a_n r^n + a_{n-1} r^{n-1} + \ldots + a_1 r)$

En factorisant r, on obtient : $a_0 = r(- a_n r^{n-1} - a_{n-1} r^{n-2} - \ldots - a_1)$

Le nombre $q = - a_n r^{n-1} - a_{n-1} r^{n-2} - \ldots - a_1$ est un entier puisque r et tous les a_i sont des entiers.

Conclusion : Si r est une racine entière de P alors elle divise a_0 .

2) **Application** :

$P(x) = x^3 - 2x^2 + 4x - 10$

Supposons une racine r entière.

D'après le 1/, r est un diviseur de -10, donc, $r \in \{-10 ; -5 ; -2 ; -1 ; 1 ; 2 ; 5 ; 10\}$

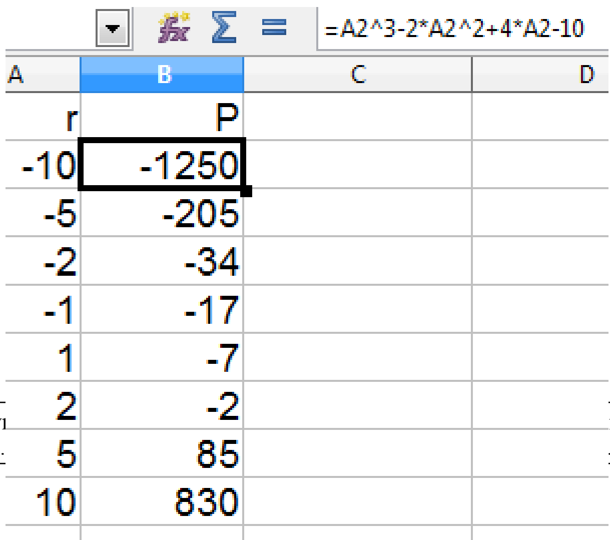
Il resta à calculer les images par P de ces entiers ….

r	**–10**	**–5**	**–2**	**–1**	**1**	**2**	**5**	**10**
P(r)	–1250	–205	–34	–17	–7	–2	85	830

On n'a jamais $P(r) = 0$

Le polynôme P n'a pas de racines entières.

Utilisation d'un tableur :


=A2^3-2*A2^2+4*A2-10

r	P
-10	-1250
-5	-205
-2	-34
-1	-17
1	-7
2	-2
5	85
10	830

110 page 43

Soit x l'âge du petit-dernier ....

D'après l'énoncé, $37^{BM} = 11\times q + x$ et $32^{B} = 7\times q' + x$ avec $0 < x < 7$.

Comme $37 \equiv 4 \bmod(11)$ et $32 \equiv 4 \bmod(7)$, on a : $4^{BM} \equiv x\ (11)$ et $4^{B} \equiv x\ (7)$

Puissances de 4	**Reste dans la division par 11**		**Puissances de 4**	**Reste dans la division par 7**
4^0	1		4^0	1
4	4		4	4
$4^2 = 16$	5		$4^2 = 16$	2
4^3	9		4^3	1
4^4	3			
4^5	1			

Ce n'est pas 1 puisque le " petit dernier " est scolarisé.

l'âge du petit dernier est par conséquent : 4

117 page 44 Équation de Pell-Fermat

$a^2 - 2b^2 = 1$ où $(a\ ;\ b) \in \mathbb{Z}^2$. (1)
Remarque : il suffit de résoudre l'équation dans $\mathbb{N}^2$.
En effet, comme $(-a)^2 - 2(-b)^2 = a^2 - 2b^2$
si $(a\ ;\ b)$ est solution de (1) alors $(a\ ;\ -b)$, $(-a\ ;\ -b)$ et $(-a\ ;\ b)$ sont solutions de (1).
1) a) Soit $(a\ ;\ b)$ un couple solution de (1), on a alors : $a^2 = 2b^2 + 1$.
Comme $2b^2$ est un multiple de 2, $2b^2$ est pair, donc $2b^2 + 1$ est impair.
a^2 étant impair, ***a* est impair**.

b) On peut alors écrire : $a = 2n + 1$ où $n \in \mathbb{Z}$, d'où, $a^2 - 1 = 4n^2 + 4n + 1 - 1 = 4(n^2 + n)$
$a^2 - 1$ est un multiple de 4.
Comme $2b^2 = a^2 - 1 = 4(n^2 + n)$, il vient : $b^2 = 2(n^2 + n)$.
b² étant pair, ***b* est pair**.

c) Soit d un diviseur commun à a et à b.

d divise toute combinaison linéaire à coefficients entiers de a et b, d'où, d divise $a\times a - (2b)\times b = a^2 - 2b^2 = 1$

d divise 1.

d vaut -1 ou 1.

***a* et *b* sont premiers entre eux.**

2 a) Une solution évidente : (1 ; 0).

(Une autre évidente : $a = 3$, $b = 2$. $3^2 - 2\times 2^2 = 1$.

le couple (3 ; 2) est une solution).

b) (a, b) est une solution de (1) donc : $a^2 - 2b^2 = 1$.

Évaluons : $(3a + 4b)^2 - 2(2a + 3b)^2$

$$\begin{aligned}(3a + 4b)^2 - 2(2a + 3b)^2 &= 9a^2 + 24ab + 16b^2 - 2(4a^2 + 12ab + 9b^2)\\ &= 9a^2 + 24ab + 16b^2 - 8a^2 - 24ab - 18b^2\\ &= a^2 - 2b^2 = 1\end{aligned}$$

Conclusion :
Si (a, b) est une solution de (1) alors $(3a + 4b \,;\, 2a + 3b)$ est une solution de (1).

c) Puisque le couple (1 ; 0) est solution de (1), $(3\times1 + 4\times0, 2\times1 + 3\times0) = (3 ; 2)$ est une autre solution de (1),
(17 ; 12) est une autre solution de (1),
(99 ; 70) est une autre solution de (1),
(577 ; 408) est une autre solution de (1).

3 a) Algorithme.

```
VARIABLES
  a EST_DU_TYPE NOMBRE
  b EST_DU_TYPE NOMBRE
DEBUT_ALGORITHME
  POUR a ALLANT_DE 1001 A 4000
    DEBUT_POUR
    POUR b ALLANT_DE 1000 A 3000
      DEBUT_POUR
      SI (pow(a,2)-2*pow(b,2)==1) ALORS
        DEBUT_SI
        AFFICHER a
        AFFICHER b
        FIN_SI
      FIN_POUR
    FIN_POUR
FIN_ALGORITHME
```

RÉSULTATS :

```
***Algorithme lancé***
3363
2378
***Algorithme interrompu ligne 14 : dépassement de la capacité autorisée pour les boucles***
```

Algobox étant limité en nombre de boucles, l'algorithme s'arrête ... mais, ce n'est qu'un problème matériel.

118 page 44 ***Asie juin 2004***

E est l'ensemble des entiers naturels qui peuvent s'écrire sous la forme $9 + a^2$ où a est un entier naturel non nul.

Autrement dit : $E = \{9 + a^2 / a \in \mathbb{N}^*\}$

1) Étude de l'équation d'inconnue a : $a^2 + 9 = 2^n$ où $a \in \mathbb{N}$, $n \in \mathbb{N}$ et $n \geqslant 4$.

Remarque : on commence à l'entier 4, car, $a^2 + 9 > 9$, et, si $n < 4$, $2^n \leqslant 8$

a) **Par l'absurde** :

Supposons a existe et a pair.

En ce cas : $a = 2p$ et $a^2 = 4p^2$ avec $p \in \mathbb{N}$. a^2 est par conséquent pair, ainsi que $2^n - a^2$

Comme $2^n - a^2 = 9$ et que 9 est impair, on a une contradiction.

Si a existe et si $a^2 + 9 = 2^n$ alors a est impair.

Autre démonstration :

$a^2 = 2^n + 9$.
La somme d'un entier pair et d'un entier est impair, d'où, a^2 est impair.

Or, a et a^2 ont la même parité, d'où, a est impair.

b) On a : $9 \equiv 1\ (4)$

a étant impair, $a = 2p + 1$ et $a^2 = 4p^2 + 4p + 1$, d'où $a^2 \equiv 1\ (4)$
On a donc : $a^2 + 9 \equiv 2\ (4)$
Or, $n \geqslant 4$, d'où, $n = 4 + x$ avec $x \in \mathbb{N}$, $2^n = 2^{4+x} = 16\times 2^x$, d'où $2^n \equiv 0\ (4)$
L'égalité est impossible, l'équation $a^2 + 9 = 2^n$ n'a pas de solution.

2) Étude de l'équation d'inconnue a : $a^2 + 9 = 3^n$ où $a \in \mathbb{N}$, $n\in\mathbb{N}$ et $n \geqslant 3$.
Remarque : on commence à l'entier 3, car, $a^2 + 9 > 9$, *et, si* $n < 3$, $3^n \leqslant 9$

a) $n \geqslant 3$.

Disjonction des cas :

*** n est pair, d'où, $n = 2p$ et $3^n = 9^p$.

Comme $9 \equiv 1\ (4)$, on a : $3^n \equiv 1\ (4)$

*** n est impair, d'où, $n = 2p + 1$ et $3^n = 9^p \times 3$.

Comme $9 \equiv 1\ (4)$, on a : $3^n \equiv 3\ (4)$

b) **Par l'absurde** :

Supposons a existe et a impair.

En ce cas : $a = 2p + 1$ et $a^2 = 4p^2 + 4p + 1$ avec $p \in \mathbb{N}$. a^2 est par conséquent impair.

La somme de deux nombres impairs est paire, d'où, $a^2 + 9$ est paire.

Or, 3^n est impair, on a une contradiction.

Si a existe et si $a^2 + 9 = 3^n$ alors a est pair.

Puisque a est pair, on peut poser $a = 2p$ et $a^2 + 9 = 4p^2 + 9$ avec $p \in \mathbb{N}^*$.

Comme $4p^2 + 9 \equiv 1\ (4)$, il vient : $3^n \equiv 1\ (4)$

Dans le 2a), on a montré que ceci n'est vrai que lorsque n est pair.

Conclusion : Si a existe et si $a^2 + 9 = 3^n$ alors a est pair et n est pair.

c) Puisque n est pair et $n \geqslant 3$, on peut écrire $n = 2p$ avec $p \geqslant 2$.

$3^n - a^2 = 3^{2p} - a^2 = (3^p)^2 - a^2 = (3^p - a)(3^p + a)$

D 'autre part : $(3^p - a)(3^p + a) = 9$

Les diviseurs de 9 sont : 1, 3 et 9.

Comme $a > 0$, $3^p - a < 3^p + a$

La seule possibilité est donc : $\begin{cases} 3^p - a = 1 \\ 3^p + a = 9 \end{cases}$

On en déduit par somme membre-à-membre : $2\times3^p = 10$, soit : $3^p = 5$ ce qui est impossible.

Conclusion : l'équation $a^2 + 9 = 3^n$ n'a pas de solution.

3) Étude de l'équation d'inconnue a : $a^2 + 9 = 5^n$ où $a \in \mathbb{N}$, $n \in \mathbb{N}$ et $n \geqslant 2$.

a) $9 \equiv 0\ (3)$et $5 \equiv -1\ (3)$

Si n est pair, $5^n \equiv 1\ (3)$

Si n impair, $5^n \equiv -1\ (3)$

Si n est impair alors $a^2 \equiv -1\ (3)$

ou encore $a^2 \equiv 2\ (3)$

Or $a \equiv 0\ (3)$ ou $a \equiv 1\ (3)$ ou $a \equiv 2\ (3)$

d'où, $a^2 \equiv 0\ (3)$ ou $a^2 \equiv 1\ (3)$ ou $a^2 \equiv 4 \equiv 1\ (3)$

L'égalité $a^2 \equiv 2\ (3)$ est impossible.

Conclusion : l'équation $a^2 + 9 = 5^n$ n'a pas de solution lorsque n est impair.

b) Puisque n est pair et $n \geqslant 2$, on peut écrire $n = 2p$ avec $p \geqslant 1$.

$5^n - a^2 = 5^{2p} - a^2 = (5^p)^2 - a^2 = (5^p - a)(5^p + a)$

D 'autre part : $(5^p - a)(5^p + a) = 9$

Les diviseurs de 9 sont : 1, 3 et 9.

Comme $a > 0$, $5^p - a < 5^p + a$

La seule possibilité est donc : $\begin{cases} 5^p - a = 1 \\ 5^p + a = 9 \end{cases}$

On en déduit par somme membre-à-membre : $2\times5^p = 10$, soit : $5^p = 5$, donc, $p = 1$.

On en déduit : $5 - a = 1$, soit $a = 4$.

On a bien : $4^2 + 9 = 5^2$

Conclusion : l'équation $a^2 + 9 = 5^n$ a une et une seule solution : $a = 4$

---

119 page 44

(u_n) est une suite arithmétique de premier terme $u_0 = 4$ et de raison $r = 23$.
On a donc : $u_n = 4 + 23n$ avec $n \in \mathbb{N}$.
Remarques : u_n est le $(n+1)^{\text{ième}}$ terme de la suite.
4 est le reste et n est le quotient dans la division euclidienne de u_n par 23.
1 a) Le premier terme $u_0 = 4 = 2^2$.
le deuxième terme $u_1 = 4 + 23 = 27 = 3^3$.
Le 28ième terme : $u_{27} = 4 + 27\times23 = 625 = 5^4$.
b) Soit $k \in \mathbb{N}$.

Supposons qu'il existe un entier n tel que $u_n = 1^k = 1$
On a donc : $4 + 23n = 1$.
Comme $n \in \mathbb{N}$, cette égalité est impossible.

Supposons qu'il existe un entier n tel que $u_n = 22^k$
Comme $22 \equiv (-1)\ [23]$, on cherche $u_n \equiv (-1)^k\ [23]$
Or, $u_n \equiv 4\ [23]$
Si k est pair alors $4 \equiv 1\ [23]$ impossible.
Si k est impair alors $4 \equiv -1\ [23]$ impossible.
Aucun des termes de la suite (u_n) n'est une puissance de 1, ni de 22.

2. p et k entiers
2 a) $p \equiv p + 23\ [23]$, d'où, $p^k \equiv (p + 23)^k\ [23]$.
on a aussi : q étant un entier : $p \equiv p + 23q\ [23]$, d'où, $p^k \equiv (p + 23q)^k\ [23]$.
b) Proposition à démontrer : Si, pour $p \in \{2 ; 3 ; ... ; 21\}$, p^k n'est pas congru à 4 modulo 23 alors, pour tout n, u_n n'est pas une puissance $k^{\text{ième}}$ d'un entier.

Contraposée de la proposition :
Si, il existe un entier n tel que u_n est une puissance $k^{\text{ième}}$ d'un entier p alors p^k est congru à 4 modulo 23.

Soit un entier n tel que $u_n \equiv p^k\ [23]$
$4 + 23n \equiv 4\ [23]$
Par transitivité : $p^k \equiv 4\ [23]$ (*il suffit de prendre p entier et* $0 \leqslant p < 23$)

par l'absurde :

3) r_k est le reste de la division euclidienne de p^k par 23.
On peut donc écrire : (1) $p^k = 23 \times q + r_k$ avec $0 \leqslant r_k < 23$ et $q \in \mathbb{N}$.
(2) $p^{k+1} = 23 \times q' + r_{k+1}$ avec $0 \leqslant r_{k+1} < 23$ et $q' \in \mathbb{N}$.
En multipliant (1) par l'entier p : (3) $p^{k+1} = (23 \times q) \times p + r_k \times p$
d'où : par comparaison de (1) et (3) : $(23 \times q) \times p + r_k \times p = 23 \times q' + r_{k+1}$,
soit : $r_k \times p \equiv r_{k+1}\ [23]$

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T
1	p / k	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
2																				
3	2	4	8	16	9	18	13	3	6	12	1	2	4	8	16	9	18	13	3	6
4	3	9	4	12	13	16	2	6	18	8	1	3	9	4	12	13	16	2	6	18
5	4	16	18	3	12	2	8	9	13	6	1	4	16	18	3	12	2	8	9	13
6	5	2	10	4	20	8	17	16	11	9	22	18	21	13	19	3	15	6	7	12
7	6	13	9	8	2	12	3	18	16	4	1	6	13	9	8	2	12	3	18	16
8	7	3	21	9	17	4	5	12	15	13	22	16	20	2	14	6	19	18	10	7
9	8	18	6	2	16	13	12	4	9	3	1	8	18	6	2	16	13	12	4	9
10	9	12	16	6	8	3	4	13	2	18	1	9	12	16	6	8	2	19	16	15
11	10	8	11	18	19	6	14	2	20	16	22	13	15	12	5	4	17	9	21	3
12	11	6	20	13	5	9	7	8	19	2	22	12	17	3	10	17	3	2	13	2
13	12	6	3	13	18	9	16	8	4	2	1	12	6	3	13	18	9	16	8	4
14	13	8	12	18	4	6	9	2	3	16	1	13	8	12	21	21	1	14	3	5
15	14	12	7	6	15	3	19	13	21	18	22	9	11	16	17	8	20	4	7	19
16	15	18	17	2	7	13	11	4	14	3	22	8	5	5	15	18	16	15	18	16
17	16	3	2	9	6	4	18	12	8	13	1	16	3	2	9	6	4	18	12	8
18	17	13	14	8	21	12	20	18	7	4	22	6	9	8	7	22	22	20	8	13
19	18	2	13	4	3	8	6	16	12	9	1	18	2	13	4	3	13	17	2	21
20	19	16	5	3	11	2	15	9	10	6	22	4	4	16	14	11	1	7	6	7
21	20	9	19	12	10	16	21	6	5	8	22	3	14	4	11	13	7	2	17	18
22	21	4	15	16	14	18	10	3	17	12	22	2	14	7	7	5	20	19	16	17
23	= MOD($A3^B$1;23)																			

La seule puissance jamais rencontrée est 11.

120 page 45

$N = a\times10^2 + b\times10 + c$ où a, b et c sont des entiers naturels compris entre 1 et 9 , et, a, b, c distincts deux à deux.

1) Par permutation de a, b et c, on a les nombres suivants :

Nombre	centaines	dizaines	unités	écriture du nombre
N	a	b	c	$a\times10^2 + b\times10 + c$
N_1	a	c	b	$a\times10^2 + c\times10 + b$
N_2	b	a	c	$b\times10^2 + a\times10 + c$
N_3	b	c	a	$b\times10^2 + c\times10 + a$
N_4	c	a	b	$c\times10^2 + a\times10 + b$
N_5	c	b	a	$c\times10^2 + b\times10 + a$

La somme $N_1 + N_2 + N_3 + N_4 + N_5 = 1\,607$.

Soit : $\sum_{i=1}^{i=5} N_i = 1\,607$

S est la somme des chiffres de N, d'où, $S = a + b + c$.

Or, $10 \equiv 1$ (9), d'où, $10^2 \equiv 1^2$ (9), par conséquent : (Compatibilité des opérations et des congruences).

$N_i \equiv a + b + c$ (9) pour i entier de 1 à 5.

On obtient : $N_i \equiv S$ (9) pour i entier de 1 à 5.

Par somme de ces 5 égalités : $\sum_{i=1}^{i=5} N_i \equiv 5S$ (9)

Conclusion : $5S \equiv 1607$ (9)

b) $1\ 607 = 9\times178 + 5$

On a donc : $1\ 607 \equiv 5$ (9) (Remarquer : $1 + 6 + 0 + 7 = 14$ et $14 \equiv 5$ (9))

Par transitivité : $5S \equiv 5$ (9).

Table de multiplication des congruences modulo 9 :

$\overline{a}$ représente une classe de congruence
Par exemple : $\overline{1} = \overline{10} = \overline{19} = \overline{-8} = \ldots$ (les entiers 1, 10, 19, –8 ... ont pour reste 1 dans la division euclidienne par 9)
Dans le tableau, pour des raisons pratiques, seul le reste entre 0 et 8 est noté.

	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$	$\overline{5}$	$\overline{6}$	$\overline{7}$	$\overline{8}$	$\overline{0}$
$\overline{1}$	1	2	3	4	5	6	7	8	0
$\overline{2}$	2	4	6	8	1	3	5	7	0
$\overline{3}$	3	6	0	3	6	0	3	6	0
$\overline{4}$	4	8	3	7	2	6	1	5	0
$\overline{5}$	5	1	6	2	7	3	8	4	0
$\overline{6}$	6	3	0	6	3	0	6	3	0
$\overline{7}$	7	5	3	1	8	6	4	2	0
8	8	7	6	5	4	3	2	1	0
$\overline{0}$	0	0	0	0	0	0	0	0	0

D'après le tableau, S est congru à 1 (9).

$S = 9\times k + 1$ où k est un entier naturel.

Or : a , b, c sont des chiffres **distincts** entre 1 et 9

Leur somme S est donc **strictement** comprise entre 3 et 27.

S est égale à 10 ou 19.

2 a) La somme des 6 nombres est égale à $(2a + 2b + 2c)(10^2 + 10 + 1) = 2(a + b + c)\times111 = 222S$.

Remarquer que cette somme est N + 1 607.

b) Si $S = 10$ alors $222S = 2\ 220$ et $N = 2\ 220 - 1\ 607 = 613$

Si S = 19 alors $222S = 4\ 218$ et $N = 4\ 218 - 1\ 607 = 2\ 611$ ce qui est impossible.

Conclusion : $S = 10$ et $N = 613$.

Vérification : $631 + 316 + 361 + 136 + 163 = 1\ 607$

3) Si N s 'écrit avec quatre chiffres a, b, c et d distincts non nuls, on a :

23 autres nombres par permutation de a, b, c, d.

En posant : $S = a + b + c + d$ et d'après la donnée : la somme de tous les nombres différents est égale à 154 056,

on obtient : $23S \equiv 154\,056\ (9)$

Comme $23 \equiv 5\ (9)$ et $154\,056 \equiv 3\ (9)$, on a : $5S \equiv 3\ (9)$

d 'où, $S \equiv 6\ (9)$

La somme S est strictement comprise entre 4 et 36.

Par conséquent : S est égale à 6 ou 15 ou 24 ou 33.

D'autre part, la somme des 24 nombres s'écrit : $(6a + 6b + 6c + 6d)(10^3 + 10^2 + 10 + 1)$, soit :

$6S\times1111 = 6\,666S$

Comme $N = 6\,666S - 154\,056$

étude de tous les cas

S	**6666*S***	***6 666S – 154 056***	**Conclusion**
6	39996	-114060	impossible
15	99990	-54066	impossible
24	159984	5928	possible
33	219978	65922	impossible

Le nombre N est égal à 5928

Vérification : 5982+5289+5298+5892+5829+9582+9528+9852+9825+9258+9285+ ... = 154 056