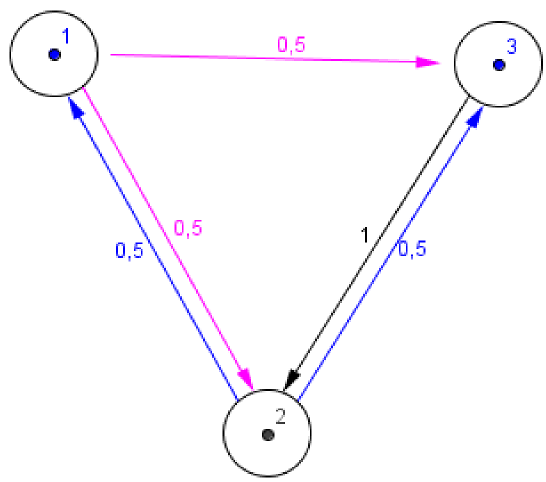
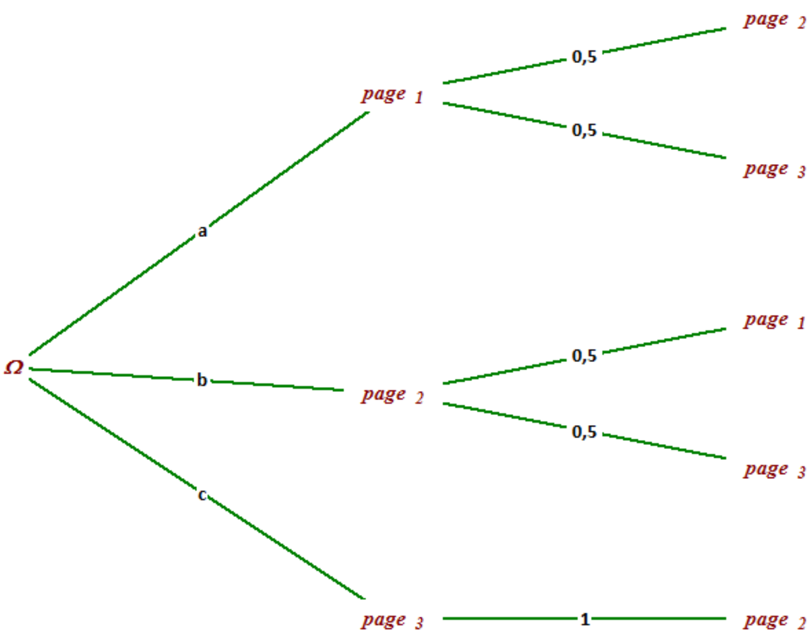
Index

objectif bac page 168 Étude asymptotique d'une marche aléatoire....1
objectif bac page 169 Étude d'une suite de matrices....5
TP1 page 170 le modèle des urnes d'Ehrenfest....8
TP3 page 174 Modèle proies-prédateurs de Lokta-Volterra....16
9 page 176....19
10 page 176....21
48 page 184 Étude asymptotique d'une marche aléatoire....21
51 page 185 Approximation de nombres réels....24
Remarque et complément : Suite de Fibonacci....30
57 page 188 Le modèle de Leslie....32

objectif bac page 168 Étude asymptotique d'une marche aléatoire

Un graphe probabiliste : Étant sur une page, le lien est choisi équitablement.





ou un arbre

1) La matrice $(p_{i,j})$ où les coefficients $p_{i,j}$ désigne la probabilité, étant à la page *i*, d'aller à la page *j*. (*i* et *j* sont les entiers 1 ou 2 ou 3).

Remarque : $p_{i,j}$ est la probabilité conditionnelle qui pourrait être notée $p_i(j)$ avec les notations utilisées en probabilités dans le programme obligatoire.

$$M = (p_{i,j}) = \begin{pmatrix} 0 & 0{,}5 & 0{,}5 \\ 0{,}5 & 0 & 0{,}5 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

2) P_n en fonction de M et de P_0.

X_n est la variable aléatoire donnant la page sur laquelle se trouve le surfeur au *n*-ième clic.

P_n est la matrice ligne donnant dans cet ordre : le surfeur est à la page 1, à la page 2, à la page 3 ;

$P_n = (P(X_n = 1) \quad P(X_n = 2) \quad P(X_n = 3))$

$P_0 = (a \quad b \quad c)$ avec $0 \leqslant a \leqslant 1$; $0 \leqslant b \leqslant 1$; $0 \leqslant c \leqslant 1$ et $a + b + c = 1$. État probabiliste initial.

$P_1 = P_0 M$ et $P_{n+1} = P_n M$ Par récurrence, on montre que : $P_n = P_0 M^n$.

3) Soit la matrice P = $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -4 \\ 1 & -2 & 4 \end{pmatrix}$. On admet que P est inversible et que $P^{-1} = \frac{1}{18}\begin{pmatrix} 4 & 8 & 6 \\ 8 & -2 & -6 \\ 3 & -3 & 0 \end{pmatrix}$.

a) Q = P^{-1} MP.

$$Q = \frac{1}{18}\begin{pmatrix} 4 & 8 & 6 \\ 8 & -2 & -6 \\ 3 & -3 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0{,}5 & 0{,}5 \\ 0{,}5 & 0 & 0{,}5 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -4 \\ 1 & -2 & 4 \end{pmatrix} = \frac{1}{18}\begin{pmatrix} 4 & 8 & 6 \\ -1 & -2 & 3 \\ -1{,}5 & 1{,}5 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -4 \\ 1 & -2 & 4 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{18}\begin{pmatrix} 18 & 0 & 0 \\ 0 & -9 & 18 \\ 0 & 0 & -9 \end{pmatrix}.$$

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -0{,}5 & 1 \\ 0 & 0 & -0{,}5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -0{,}5 & 0 \\ 0 & 0 & -0{,}5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

On pose : D = $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -0{,}5 & 0 \\ 0 & 0 & -0{,}5 \end{pmatrix}$ et T = $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, d'où, Q = D + T.

3 b) $T^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 0_3$.

$$DT = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -0{,}5 & 0 \\ 0 & 0 & -0{,}5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -05 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = -0{,}5\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = -0{,}5T$$

$$TD = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -0{,}5 & 0 \\ 0 & 0 & -0{,}5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -05 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = -0{,}5T$$

Remarquer :

Lorsqu'une ligne *i* de la matrice à gauche est nulle, la ligne *i* de la matrice produit est nulle.

Lorsqu'une colonne *j* de la matrice à droite est nulle, la colonne *j* de la matrice produit est nulle.

Montrons l'égalité : Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $D^n T = (-0{,}5)^n T$.

Par récurrence :

Initialisation : $n = 1$. Le calcul précédent initialise la proposition.

Hérédité : Soit un entier $n \geqslant 1$ tel que $D^n T = (-0{,}5)^n T$.

$D^{n+1} T = D.\ D^n T = D((-0{,}5)^n T) = (-0{,}5)^n DT = (-0{,}5)^n (-0{,}5T) = (-0{,}5)^{n+1} T$.

Conclusion : D'après l'axiome de récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $D^n T = (-0{,}5)^n T$.

3c) Proposition à démontrer par récurrence: Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathrm{Q}^n = \mathrm{D}^n + n(-0{,}5)^{n-1}\,\mathrm{T}$.

Initialisation : $n = 1$.

$\mathrm{Q} = \mathrm{D} + \mathrm{T}$ et $\mathrm{D} + 1\times(-0{,}5)^0\,\mathrm{T} = \mathrm{D} + \mathrm{T}$ L'égalité est vérifiée.

Hérédité : Soit un entier $n \geqslant 1$ tel que $\mathrm{Q}^n = \mathrm{D}^n + n(-0{,}5)^{n-1}\,\mathrm{T}$.

$\mathrm{Q}^{n+1} = \mathrm{Q}^n\,\mathrm{Q} = (\mathrm{D}^n + n(-0{,}5)^{n-1}\,\mathrm{T})(\mathrm{D} + \mathrm{T})$

$= \mathrm{D}^{n+1} + n(-0{,}5)^{n-1}\,\mathrm{TD} + \mathrm{D}^n\,\mathrm{T} + n(-0{,}5)^{n-1}\,\mathrm{T}^2$

Or, $\mathrm{T}^2 = 0_3$, $\mathrm{TD} = -0{,}5\mathrm{T}$ et $\mathrm{D}^n\,\mathrm{T} = (-0{,}5)^n\,\mathrm{T}$.

On a donc : $\mathrm{Q}^{n+1} = \mathrm{D}^{n+1} + n(-0{,}5)^{n-1}(-0{,}5\mathrm{T}) + (-0{,}5)^n\,\mathrm{T}$

$= \mathrm{D}^{n+1} + n(-0{,}5)^n\,\mathrm{T} + (-0{,}5)^n\,\mathrm{T}$

$= \mathrm{D}^{n+1} + (n+1)(-0{,}5)^n\,\mathrm{T}$.

Conclusion : D'après l'axiome de récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathrm{Q}^n = \mathrm{D}^n + n(-0{,}5)^{n-1}\,\mathrm{T}$.

d) On sait : $\mathrm{Q} = \mathrm{P}^{-1}\mathrm{MP}$.

En multipliant à gauche par P et à droite par P^{-1}, on a :

$\mathrm{PQ}\,\mathrm{P}^{-1} = \mathrm{P}(\mathrm{P}^{-1}\mathrm{MP})\,\mathrm{P}^{-1}$ Par associativité :

$\mathrm{PQ}\,\mathrm{P}^{-1} = (\mathrm{P}\,\mathrm{P}^{-1})\mathrm{M}(\mathrm{P}\,\mathrm{P}^{-1}) = \mathrm{M}$ puisque $\mathrm{P}\,\mathrm{P}^{-1} = \mathrm{P}\,\mathrm{P}^{-1} = \mathrm{I}_3$.

On a : $\mathrm{M}^2 = \mathrm{PQ}\,\mathrm{P}^{-1}\,\mathrm{PQ}\,\mathrm{P}^{-1} = \mathrm{PQ}^2\,\mathrm{P}^{-1}$ (et par récurrence ...)

$\mathrm{M}^n = \mathrm{P}\,\mathrm{Q}^n\,\mathrm{P}^{-1}$

3 e) **Étude de la limite en $+\infty$ de la suite (Q^n).**

On sait : pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathrm{Q}^n = \mathrm{D}^n + n(-0{,}5)^{n-1}\,\mathrm{T}$.

Étude de D^n en $+\infty$.

Comme $-1 < -0{,}5 < 1$, on sait : $\lim\limits_{n\to+\infty} (-0{,}5)^n = 0$

La matrice D étant une matrice diagonale, on a : $\mathrm{D}^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & (-0{,}5)^n & 0 \\ 0 & 0 & (-0{,}5)^n \end{pmatrix}$ et quand n tend vers $+\infty$, (D^n) tend vers la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Étude de la limite de $n(-0{,}5)^{n-1}$

$n(-0{,}5)^{n-1} = 2\,\dfrac{n}{2} \times (-1)^{n-1} \times \dfrac{1}{2^{n-1}} = (-1)^{n-1} \times 2 \times \dfrac{n}{2^n}$

Il reste à étudier la limite de $\dfrac{n}{2^n}$

Comme $2^n = \mathrm{e}^{n\ln 2}$, posons $x = n\ln 2$, et, étudions la limite de $\dfrac{1}{\ln 2}\,\dfrac{x}{\mathrm{e}^x}$

D'autre part, on sait : $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\mathrm{e}^x}{x} = +\infty$, d'où, $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x}{\mathrm{e}^x} = 0$, (soit : $\lim\limits_{x\to+\infty} x\,\mathrm{e}^{-x} = 0$.)

La limite en $+\infty$ de $\dfrac{n}{2^n}$ est la limite en $+\infty$ (car ln2 > 0) de $\dfrac{1}{\ln 2}\,\dfrac{x}{e^x}$, donc, $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n}{2^n} = 0$.

Comme, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $(-1)^{n-1} = -1$ ou 1, $\lim\limits_{n\to+\infty} (-1)^{n-1} \times 2 \times \dfrac{n}{2^n} = 0$

la matrice Q^n a donc pour limite en $+\infty$, la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Étude de la limite en +∞ de la suite (M^n) .

Comme $M^n = P\,Q^n\,P^{-1}$, on a quand n tend vers $+\infty$, M^n tend vers $P\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}P^{-1}$.

Calcul de : $\dfrac{1}{18}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -4 \\ 1 & -2 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 & 8 & 6 \\ 8 & -2 & -6 \\ 3 & -3 & 0 \end{pmatrix} = \dfrac{1}{18}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 & 8 & 6 \\ 8 & -2 & -6 \\ 3 & -3 & 0 \end{pmatrix}$

$$= \frac{1}{18}\begin{pmatrix} 4 & 8 & 6 \\ 4 & 8 & 6 \\ 4 & 8 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{9} & \frac{4}{9} & \frac{3}{9} \\ \frac{2}{9} & \frac{4}{9} & \frac{3}{9} \\ \frac{2}{9} & \frac{4}{9} & \frac{3}{9} \end{pmatrix}.$$

On note M_∞ la matrice $\begin{pmatrix} \frac{2}{9} & \frac{4}{9} & \frac{3}{9} \\ \frac{2}{9} & \frac{4}{9} & \frac{3}{9} \\ \frac{2}{9} & \frac{4}{9} & \frac{3}{9} \end{pmatrix}$.

4) $P_0 = (a \;\; b \;\; c)$ avec $0 \leqslant a \leqslant 1$; $0 \leqslant b \leqslant 1$; $0 \leqslant c \leqslant 1$ et $a + b + c = 1$. État probabiliste initial.

$P_n = P_0\,M^n$ donc P_n tend vers la matrice

$$P_\infty = P_0\,M_\infty = (a \;\; b \;\; c)\begin{pmatrix} \frac{2}{9} & \frac{4}{9} & \frac{3}{9} \\ \frac{2}{9} & \frac{4}{9} & \frac{3}{9} \\ \frac{2}{9} & \frac{4}{9} & \frac{3}{9} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{9}(a+b+c) & \frac{4}{9}(a+b+c) & \frac{3}{9}(a+b+c) \end{pmatrix}$$

Comme $a + b + c = 1$, la suite (P_n) converge vers $P_\infty = \begin{pmatrix} \frac{2}{9} & \frac{4}{9} & \frac{3}{9} \end{pmatrix}$.

la page 2 est celle qui est la plus probable après de nombreux clics.

objectif bac page 169 Étude d'une suite de matrices

$X_n = \begin{pmatrix} p_n \\ q_n \\ r_n \end{pmatrix}$ avec $X_0 = \begin{pmatrix} 12 \\ 16 \\ 10 \end{pmatrix}$ et $X_{n+1} = A X_n + C$ où $A = \begin{pmatrix} 0,5 & 0,25 & 0,25 \\ 0,25 & 0,5 & 0,25 \\ 0,25 & 0,25 & 0,5 \end{pmatrix}$ et $C = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix}$.

1 a) Soit $X = \begin{pmatrix} 16 \\ 20 \\ 12 \end{pmatrix}$. $AX + C = \begin{pmatrix} 0,5 & 0,25 & 0,25 \\ 0,25 & 0,5 & 0,25 \\ 0,25 & 0,25 & 0,5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 16 \\ 20 \\ 12 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8+5+3 \\ 4+10+3 \\ 4+5+6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 16 \\ 20 \\ 12 \end{pmatrix} = X$

Remarques et point-méthode :

1) recherche et existence de X

On cherche s'il existe une matrice constante X vérifiant AX + C = X.

Si cette matrice existe, elle vérifie $(I_3 - A)X = C$.

On pose $B = I_3 - A$.

Lorsque B est inversible $X = B^{-1} C$.

2) Dans l'étude des suites arithmético-géométriques, l'étude est semblable.

Soit $u_{n+1} = au_n + b$.

On résout : $ax + b = x$. *si* $a \neq 1$, *il existe un réel* $\alpha = \dfrac{b}{1-a}$ *tel que* $\alpha = a\alpha + b$.

par différence : $u_{n+1} - \alpha = a(u_n - \alpha)$, *d'où, l'introduction de la suite* (v_n) *définie par* $v_n = u_n - \alpha$.

(v_n) *est une suite géométrique de raison a.* $v_n = a^n v_0$, *puis :* $u_n - \alpha = a^n (u_0 - \alpha)$

$u_n = a^n (u_0 - \alpha) + \alpha$.

b) On pose $Y_n = X_n - X$.

Plusieurs méthodes pour disposer les calculs ….

On cherche Y_{n+1}, on pose donc par définition Y_{n+1}, et, on remplace X_{n+1} par $A X_n + C$ et X par $AX + C$.

$Y_{n+1} = X_{n+1} - X = A X_n + C - (AX + C) = A(X_n - X) = A Y_n$

ou bien on pose les deux égalités : $X_{n+1} = A X_n + C$ et $X = AX + C$, puis on fait la différence membre-à-membre ,

$\begin{cases} X_{n+1} = A X_n + C \\ X = AX + C \end{cases}$ mène à $X_{n+1} - X = A X_n - AX = A(X_n - X) = A Y_n$, soit : $Y_{n+1} = A Y_n$

Une récurrence évidente permet alors de montrer : $Y_n = A^n Y_0$

Comme $Y_n = X_n - X$ et $Y_0 = X_0 - X$, il vient : $X_n - X = A^n (X_0 - X)$

Conclusion : $X_n == A^n (X_0 - X) + X$

2 a) $4A - 2I_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = B$

b) $B^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = 2I_3 + B.$

On pose $A^n = \alpha_n I_3 + \beta_n B$ avec $\begin{cases} \alpha_{n+1} = \frac{1}{2}\alpha_n + \frac{1}{2}\beta_n \\ \beta_{n+1} = \frac{1}{4}\alpha_n + \frac{3}{4}\beta_n \end{cases}$

initialisation :

$A^0 = I_3 = 1.I_3 + 0.B$ $\qquad \alpha_0 = 1$ et $\beta_0 = 0$

$A = \frac{1}{2} I_3 + \frac{1}{4} B$ $\qquad \alpha_1 = \frac{1}{2}$ et $\beta_1 = \frac{1}{4}$ $\qquad \alpha_1 = \frac{1}{2} \times \alpha_0 + \frac{1}{2} \times \beta_0$

$\beta_1 = \frac{1}{4} \times \alpha_0 + \frac{3}{4} \times \beta_0$

hérédité :

Soit un entier n tel que $A^n = \alpha_n I_3 + \beta_n B$.

$A^{n+1} = A^n A = (\alpha_n I_3 + \beta_n B)(\frac{1}{2} I_3 + \frac{1}{4} B)$

$= \frac{1}{2} \alpha_n I_3 + \frac{1}{4} \alpha_n B + \frac{1}{2} \beta_n B + \frac{1}{4} \beta_n B^2$ $\qquad$ comme $B^2 = 2I_3 + B$,

on a : $A^{n+1} = (\frac{1}{2} \alpha_n + \frac{1}{2} \beta_n)I_3 + \frac{1}{4} \alpha_n B + \frac{1}{2} \beta_n B + \frac{1}{4} \beta_n B$

$= (\frac{1}{2} \alpha_n + \frac{1}{2} \beta_n)I_3 + (\frac{1}{4} \alpha_n + \frac{3}{4} \beta_n)B$

On obtient : $\alpha_{n+1} = \frac{1}{2} \alpha_n + \frac{1}{2} \beta_n$ et $\beta_{n+1} = \frac{1}{4} \alpha_n + \frac{3}{4} \beta_n$.

Conclusion : pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $A^n = \alpha_n I_3 + \beta_n B$ avec $\begin{cases} \alpha_{n+1} = \frac{1}{2}\alpha_n + \frac{1}{2}\beta_n \\ \beta_{n+1} = \frac{1}{4}\alpha_n + \frac{3}{4}\beta_n \end{cases}$ et $\alpha_0 = 1$ et $\beta_0 = 0$.

3a) $U_n = \begin{pmatrix} \alpha_n \\ \beta_n \end{pmatrix}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

a) Le système suivant se traduit par l'égalité matricielle $\begin{pmatrix} \alpha_{n+1} \\ \beta_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,5 & 0,5 \\ 0,25 & 0,75 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_n \\ \beta_n \end{pmatrix}$.

En posant $M = \begin{pmatrix} 0,5 & 0,5 \\ 0,25 & 0,75 \end{pmatrix}$, on a : $U_{n+1} = M U_n$.

Une récurrence évidente permet alors de montrer : $U_n = M^n\ U_0$ avec $U_0 = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$

b) On pose V = $\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$ et W = $\begin{pmatrix}-2\\1\end{pmatrix}$.

MV = $\begin{pmatrix}0,5 & 0,5\\0,25 & 0,75\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$ = V et MW = $\begin{pmatrix}0,5 & 0,5\\0,25 & 0,75\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-2\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-0,5\\0,25\end{pmatrix} = \frac{1}{4}$ W.

c) d'après le 3b), les valeurs propres de la matrice M sont 1 et $\frac{1}{4}$ associées aux vecteurs V et W.

On a donc en posant P = $\begin{pmatrix}1 & -2\\1 & 1\end{pmatrix}$, $P^{-1} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix}1 & 2\\-1 & 1\end{pmatrix}$, D = $\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & \frac{1}{4}\end{pmatrix}$, M = PD P^{-1}

et $M^n = P\,D^n\,P^{-1}$

3 d) Comme dét(P) = 3, $P^{-1} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix}1 & 2\\-1 & 1\end{pmatrix}$.

D étant une matrice diagonale, $D^n = \begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 0,25^n\end{pmatrix}$.

$$M^n = \frac{1}{3}\begin{pmatrix}1 & -2\\1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 0,25^n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 2\\-1 & 1\end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{3}\begin{pmatrix}1 & -2\times 0,25^n\\1 & 0,25^n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 2\\-1 & 1\end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix}1+2\times 0,25^n & 2-2\times 0,25^n\\1-0,25^n & 2+0,25^n\end{pmatrix}$$

e) Comme 0 < 0,25 < 1, $\lim_{n\to+\infty} 0,25^n = 0$

La limite en +∞ de M^n est donc la matrice $\begin{pmatrix}\frac{1}{3} & \frac{2}{3}\\\frac{1}{3} & \frac{2}{3}\end{pmatrix}$

Or, $U_n = M^n\ U_0$ avec $U_0 = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$, d'où la matrice U_n converge vers $\begin{pmatrix}\frac{1}{3} & \frac{2}{3}\\\frac{1}{3} & \frac{2}{3}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\frac{1}{3}\\\frac{1}{3}\end{pmatrix}$.

Les deux suites (α_n) et (β_n) convergent vers $\frac{1}{3}$.

4) Comme $A^n = \alpha_n I_3 + \beta_n B$

la suite (A_n) converge vers $\frac{1}{3}I_3 + \frac{1}{3}B = \begin{pmatrix}\frac{1}{3} & 0 & 0\\0 & \frac{1}{3} & 0\\0 & 0 & \frac{1}{3}\end{pmatrix} + \frac{1}{3}\begin{pmatrix}0 & 1 & 1\\1 & 0 & 1\\1 & 1 & 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3}\\\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3}\\\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3}\end{pmatrix}$

Comme $X_n == A^n(X_0 - X) + X$, avec $X_0 = \begin{pmatrix} 12 \\ 16 \\ 10 \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} 16 \\ 20 \\ 12 \end{pmatrix}$, donc, $X_0 - X = \begin{pmatrix} -4 \\ -4 \\ -2 \end{pmatrix}$

la suite (X_n) converge vers $\begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -4 \\ -4 \\ -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 16 \\ 20 \\ 12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{-10}{3} \\ \frac{-10}{3} \\ \frac{-10}{3} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 16 \\ 20 \\ 12 \end{pmatrix}$

$$= \begin{pmatrix} \frac{38}{3} \\ \frac{50}{3} \\ \frac{26}{3} \end{pmatrix}.$$

Les suites (p_n), (q_n) et (r_n) convergent respectivement vers $\frac{38}{3}$, $\frac{50}{3}$ et $\frac{26}{3}$.

TP1 page 170 le modèle des urnes d'Ehrenfest

Le monde est-il irréversible ?

On fait les hypothèses suivantes :

* $n = 0$ Toutes les particules sont dans le même compartiment.
* À une date *n,* une et une seule particule change de compartiment.
* La probabilité qu'une particule donnée change de compartiment est la même en tout temps.

Le modèle mathématique :

On dispose de deux urnes A et B.

Les particules sont représentées par N boules numérotées de 1 à N.

Les tirages d'une boule sont équiprobables.

On tire une boule numérotée i et on la change d'urne.

A – Simulation (Voir exercice 49 page 184)

B – Étude du cas où N = 4

X_n est la variable aléatoire égale au nombre de particules dans A après le transfert numéro *n*.

$X_0 = 4$

1 a) X_n peut prendre l'une des cinq valeurs entières de 0 à 4 inclus.

b) **Un arbre.**

La probabilité de tirer un numéro entre 1 et 4 est $\frac{1}{4}$.

Si la boule est dans A, le nombre de boules dans A diminue de 1 et celui de B augmente de 1.

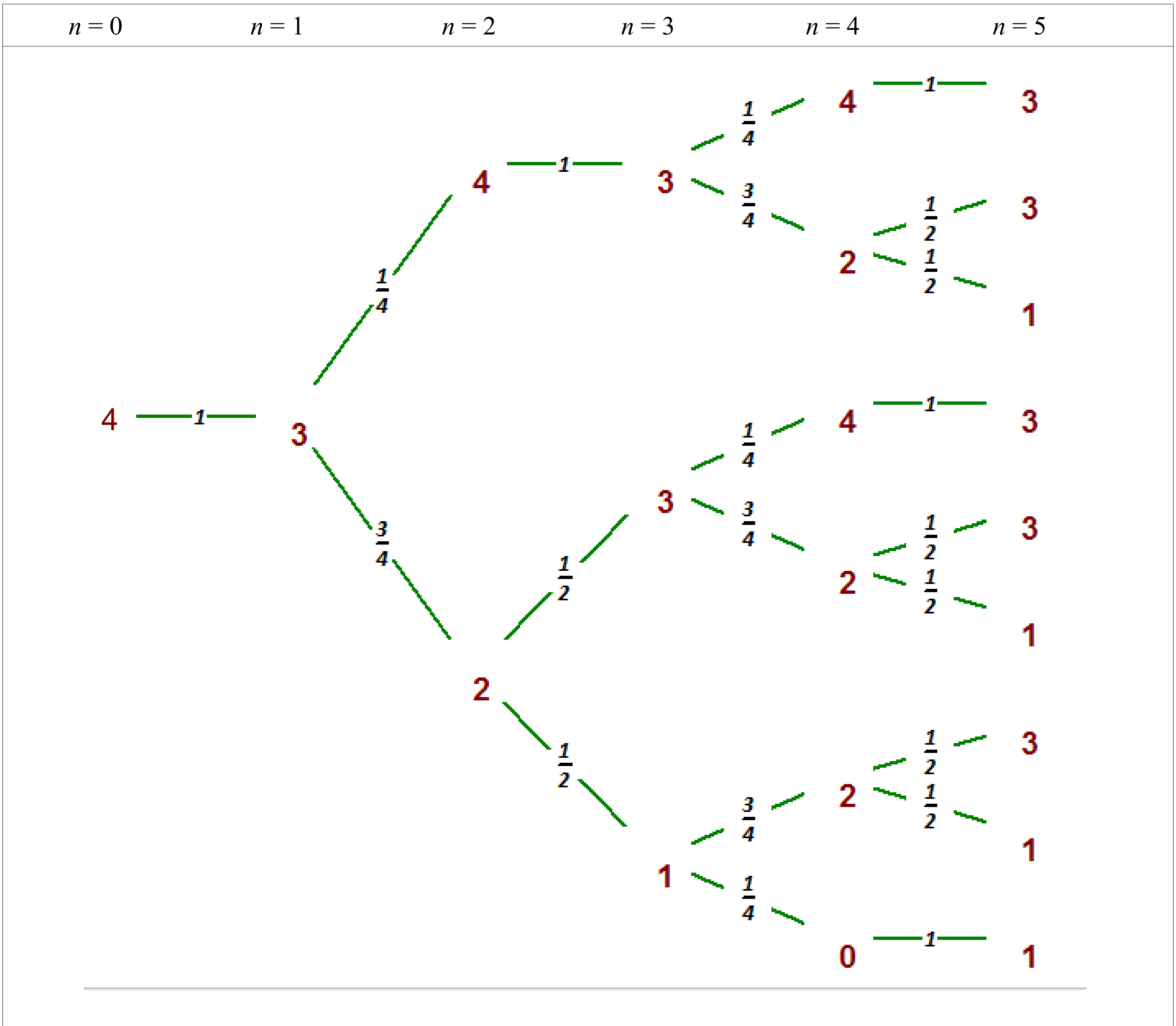
Si la boule est dans B, le nombre de boules dans A augmente de 1 et celui de B diminue de 1.

Au premier tirage, toutes les boules sont dans A.

On tire une boule qui est mise dans B. Le nombre de boules dans A est 3 (et B contient une boule).

Quand A contient k boules ($k \geqslant 1$) (et B contient $4 - k$ boules), la probabilité de tirer une boule de A est $\frac{k}{4}$ et en ce cas, le nombre de boules de A est $k - 1$.

Si $k = 0$, la probabilité d'avoir 1 boule de B mise dans A est 1.



c) Soit $0 \leqslant k \leqslant 3$.

À l'étape n, l'urne A contient k boules, et, à l'étape n + 1, l'urne A contient k +1 boules.

$P_{(X_n=k)}(X_{n+1}=k+1)$ est la probabilité de tirer une boule de B et de la mettre dans A sachant que A contient k boules.

Le nombre de boules dans B est $4 - k$, d'où $P_{(X_n=k)}(X_{n+1}=k+1) = \frac{4-k}{4}$.

À l'étape n, l'urne A contient k +1 boules, et, à l'étape n + 1, l'urne A contient k boules.
$P_{(X_n=k+1)}(X_{n+1}=k)$ est la probabilité de tirer une boule de A et de la mettre dans B sachant que A contient $k+1$ boules.

Le nombre de boules dans A est $k+1$, d'où $P_{(X_n=k+1)}(X_{n+1}=k) = \frac{k+1}{4}$.

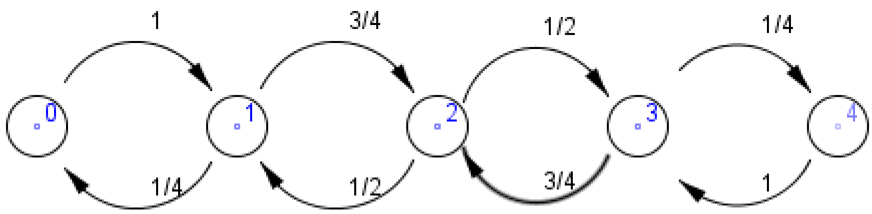
Ces probabilités sont indépendantes du n° n du tirage.

À l'étape n + 1, l'urne A contient k boules, et, à l'étape précédente n, l'urne A contient k + 1 boules.

$$P_{(X_{n+1}=k)}(X_n=k+1) = \frac{P((X_n=k+1)\cap(X_{n+1}=k))}{P(X_{n+1}=k)} = \frac{P_{(X_n=k+1)}(X_{n+1}=k)\times P(X_n=k)}{P(X_{n+1}=k+1)}$$

$$= \frac{k+1}{4}\times\frac{P(X_n=k+1)}{P(X_{n+1}=k)}$$ cette probabilité dépend de n.

2 a) un diagramme



Lorsque A contient k boules à la date n, alors, à la date $n+1$, A contient $k+1$ boules avec la probabilité $\frac{4-k}{4}$ et contient $k-1$ boules avec la probabilité $\frac{k}{4}$.

b) La matrice de transition $T = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{4} & 0 & \frac{3}{4} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{3}{4} & 0 & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

3) a) La matrice ligne L_n représente l'état probabiliste de l'urne A après le transfert n° n.

$L_0 = (0\ \ 0\ \ 0\ \ 0\ \ 1)$ $P(X_0=4) = 1$ (Seule possibilité)

$L_1 = (0\ \ 0\ \ 0\ \ 1\ \ 0)$ $P(X_1=3) = 1$ (Seule possibilité)

$L_2 = (0\ \ 0\ \ \frac{3}{4}\ \ 0\ \ \frac{1}{4})$ $P(X_2=4) = P(X_1=3)\times\frac{1}{4}$ L'urne A contient 4 boules, lorsqu'on a tiré la boule de B, et $P(X_2=2) = P_{(X_1=3)}\times\frac{3}{4}$ L'urne A contient 2 boules, lorsqu'on a tiré une des trois boules de A.

$L_3 = (0\ \ \frac{3}{8}\ \ 0\ \ \frac{5}{8}\ \ 0)$ $P(X_3=1) = P(X_2=2)\times\frac{1}{2}$ et $P(X_3=3) = P(X_2=2)\times\frac{1}{2} + P(X_2=4)\times 1$

b)

$L_n = L_0 T^n$ pour $n \geqslant 1$.

Démonstration évidente par récurrence.

Il semble que la position des 0 dépendent de la parité de n. (La preuve sera apportée au e/)

c) $A = T^2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & 0 & \frac{3}{4} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{5}{8} & 0 & \frac{3}{8} & 0 \\ \frac{1}{8} & 0 & \frac{3}{4} & 0 & \frac{1}{8} \\ 0 & \frac{3}{8} & 0 & \frac{5}{8} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{3}{4} & 0 & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$

d) $L_{n+2} = L_n T^2 = L_n A$.

Soit $n \geqslant 4$.

premier cas : ***n* pair** (On peut poser $n = 2p$)

$L_0 = (0 \ \ 0 \ \ 0 \ \ 0 \ \ 1)$

$L_2 = (0 \ \ 0 \ \ \frac{3}{4} \ \ 0 \ \ \frac{1}{4})$

Propriété à montrer : pour tout $n \geqslant 4$ et $n = 2p$, $b_{2p} = d_{2p} = 0$

Initialisation :

$n = 4$

$L_4 = L_2 A = (\frac{3}{32} \ \ 0 \ \ \frac{3}{4} \ \ 0 \ \ \frac{5}{32})$ On a bien : $b_4 = d_4 = 0$

Hérédité :

Soit un indice $p \geqslant 2$ tel que $b_{2p} = d_{2p} = 0$

$L_{2p} = (a_{2p} \ \ 0 \ \ c_{2p} \ \ 0 \ \ e_{2p})$

On a alors $L_{2(p+1)} = L_{2p+2} = L_{2p} A = (\frac{1}{4} a_{2p} + \frac{1}{8} c_{2p} \ \ 0 \ \ \frac{3}{4}(a_{2p} + c_{2p} + e_{2p} \ \ 0 \ \ \frac{1}{8} c_{2p} + \frac{1}{4} e_{2p})$

La propriété est vraie au rang $p + 1 = n + 2$

Conclusion :

pour tout $n \geqslant 4$ et $n = 2p$, $b_{2p} = d_{2p} = 0$

Interprétation : au bout d'un nombre pair d'étapes, on ne peut pas avoir 1 ou 3 boules dans A.

On a : 0 ou 2 ou 4 boules.

deuxième cas : ***n* impair** (On peut poser $n = 2p + 1$)

$L_1 = (0 \ \ 0 \ \ 0 \ \ 1 \ \ 0)$

$L_3 = (0 \quad \frac{3}{8} \quad 0 \quad \frac{5}{8} \quad 0)$

Propriété à montrer : pour tout $n \geqslant 4$ et $n = 2p + 1$, $a_{2p+1} = c_{2p+1} = e_{2p+1} = 0$

Initialisation :

$n = 5$

$L_5 = L_3 A = (0 \quad \frac{15}{32} \quad 0 \quad \frac{17}{32} \quad 0)$ On a bien : $a_5 = c_5 = e_5 = 0$

Hérédité :

Soit un indice $p \geqslant 2$ tel que $a_{2p+1} = c_{2p+1} = e_{2p+1} = 0$

$L_{2p+1} = (0 \quad b_{2p+1} \quad 0 \quad d_{2p+1} \quad 0)$

On a alors $L_{2(p+1)+1} = L_{2p+1+2} = L_{2p+1} A = (0 \quad \frac{5}{8} b_{2p+1} + \frac{3}{8} d_{2p+1} \quad 0 \quad \frac{3}{8} b_{2p+1} + \frac{5}{8} d_{2p+1} \quad 0)$

La propriété est vraie au rang $p + 1 = n + 2$

Conclusion :

pour tout $n \geqslant 5$ et $n = 2p + 1$, $a_{2p+1} = c_{2p+1} = e_{2p+1} = 0$

Interprétation : au bout d'un nombre impair d'étapes, on ne peut pas avoir 0 ou 2 ou 4 boules dans A.

On a : 1 ou 3 boules.

Recherche d'une limite éventuelle :

Supposons que la suite (L_n) ait une limite L.

L'unicité de la limite implique : $\lim_{p \to +\infty} L_{2p} = \lim_{p \to +\infty} L_{2p+1} = L$

On a donc : L = (0 0 0 0 0). Comme L est un état probabiliste, la somme des coefficients est égale à 1.

Il y a contradiction.

La suite (L_n) ne possède pas de limite.

Interprétation physique :

A chaque étape, le nombre de boules dans A augmente ou diminue de 1.

Ce nombre change donc de parité.

Si à une étape *n*, A possède un nombre pair (resp. impair) de boules alors à l'étape *n* + 1, A possède un nombre impair (resp. pair) de boules et à l'étape *n* + 2, A possède un nombre pair (resp. impair) de boules

4) **Utilisation de Xcas (voir livre pages 9-10)**

La matrice T

T:=[[0,1,0,0,0],[1/4,0,3/4,0,0],[0,1/2,0,1/2,0],[0,0,3/4,0,1/4],[0,0,0,1,0]]

Diagonalisation de T :

P,D:=jordan(T) (On obtient la matrice P et la matrice diagonale D telle que T = PD P^{-1}

La matrice P

P:=egv(T) (matrice des vecteurs propres)

La matrice D

D:=egvl(T) (matrice diagonale des valeurs propres)

Puissance entière d'une matrice

assume(n,integer) (n est un entier naturel)

Tn:=matpow(T,n) afficher(matpow(T,n))

La matrice L_0 *:*

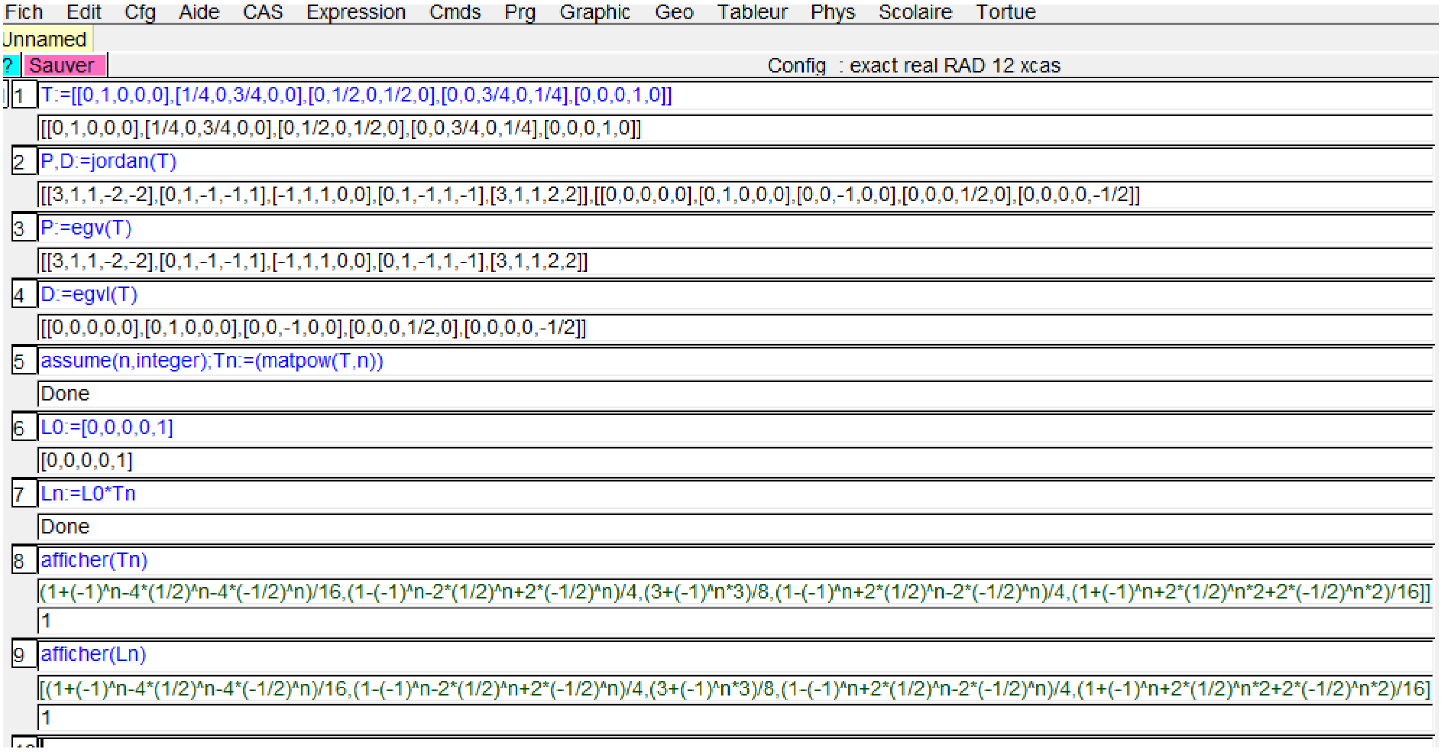
L0:=[0,0,0,0,1]

la matrice Ln

Ln:=L0*Tn

$[1/16-(1/4)(-1/2)^n+(-1/4)(1/2)^n+(-1^n)/16, 1/4-(1/2)(1/2)^n+(1/2)(-1/2)^n+(-1)^n/(-4),$

$(-1)^n*3/8+3/8, 1/4+(1/2)(1/2)^n-(1/2)(-1/2)^n+(-1)^n/(-4), 1/16+(1/4)(1/2)^n+(1/4)(-1/2)^n+(-1)^n/16]$



a) **Si *n* est pair**, $(-1)^n = 1$ et $\left(\frac{-1}{2}\right)^n = \frac{1}{2^n}$.

$$L_n = [\ \frac{1}{16} - \frac{1}{4}\times\frac{1}{2^n} - \frac{1}{4}\times\frac{1}{2^n} + \frac{1}{16} \quad \frac{1}{4} - \frac{1}{2}\times\frac{1}{2^n} + \frac{1}{2}\times\frac{1}{2^n} - \frac{1}{4} \quad \frac{3}{8} + \frac{3}{8} \quad \frac{1}{4} + \frac{1}{2}\times\frac{1}{2^n} - \frac{1}{2}\times\frac{1}{2^n} - \frac{1}{4} \quad \frac{1}{16} + \frac{1}{4}\times\frac{1}{2^n} + \frac{1}{4}\times\frac{1}{2^n} + \frac{1}{16}\ ]$$

$$L_n = [\ \frac{1}{8} - \frac{1}{2^{n+1}} \quad 0 \quad \frac{3}{4} \quad 0 \quad \frac{1}{8} + \frac{1}{2^{n+1}}\ ]$$

Si *n* est impair, $(-1)^n = -1$ et $\left(\frac{-1}{2}\right)^n = -\frac{1}{2^n}$.

$L_n = [\frac{1}{16} + \frac{1}{4}\times\frac{1}{2^n} - \frac{1}{4}\times\frac{1}{2^n} - \frac{1}{16} \quad \frac{1}{4} - \frac{1}{2}\times\frac{1}{2^n} - \frac{1}{2}\times\frac{1}{2^n} + \frac{1}{4} \quad \frac{-3}{8} + \frac{3}{8} \quad \frac{1}{4} + \frac{1}{2}\times\frac{1}{2^n} + \frac{1}{2}\times\frac{1}{2^n} + \frac{1}{4} \quad \frac{1}{16} + \frac{1}{4}\times\frac{1}{2^n} - \frac{1}{4}\times\frac{1}{2^n} - \frac{1}{16}]$

$L_n = [0 \quad \frac{1}{2} - \frac{1}{2^n} \quad 0 \quad \frac{1}{2} + \frac{1}{2^n} \quad 0]$

b) Comme $0 < \frac{1}{2} < 1$, on a : $\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} = 0$

Si *n* est pair, $\lim_{n\to+\infty} L_n = [\frac{1}{8} \quad 0 \quad \frac{3}{4} \quad 0 \quad \frac{1}{8}]$ (ou encore $\lim_{p\to+\infty} L_{2p} = [\frac{1}{8} \quad 0 \quad \frac{3}{4} \quad 0 \quad \frac{1}{8}]$)

Si *n* est impair, $\lim_{n\to+\infty} L_n = [0 \quad \frac{1}{2} \quad 0 \quad \frac{1}{2} \quad 0]$ (ou encore : $\lim_{p\to+\infty} L_{2p+1} = [0 \quad \frac{1}{2} \quad 0 \quad \frac{1}{2} \quad 0]$)

c) Calcul de l'espérance $E(X_n)$.

Si *n* est pair, $E(X_n) = 0\times(\frac{1}{8} - \frac{1}{2^{n+1}}) + 1\times0 + 2\times\frac{3}{4} + 3\times0 + 4\times(\frac{1}{8} + \frac{1}{2^{n+1}}) = 2 + \frac{1}{2^{n-1}}$.

Si *n* est impair, $E(X_n) = 0\times0 + 1\times(\frac{1}{2} - \frac{1}{2^n}) + 2\times0 + 3\times(\frac{1}{2} + \frac{1}{2^n} + 4\times0 = 2 + \frac{1}{2^{n-1}}$.

Interprétation : $E(X_n)$ est la moyenne du nombre de boules dans l'urne A

Cette moyenne tend vers 2 puisque $\frac{1}{2^{n-1}}$ tend vers 0 quand *n* tend vers $+\infty$.

5) retour à l'état initial .

a) b) On a calculé $L_2 = (0 \;\; 0 \;\; \frac{3}{4} \;\; 0 \;\; \frac{1}{4})$ $\qquad P(X_2=4) = \frac{1}{4}$.

Le retour à l'état initial en deux transferts est possible avec la probabilité $\frac{1}{4}$.

$L_4 = (\frac{3}{32} \;\; 0 \;\; \frac{3}{4} \;\; 0 \;\; \frac{5}{32})$ $\qquad P(X_4=4) = \frac{5}{32}$.

Le retour à l'état initial en quatre transferts est possible avec la probabilité $\frac{5}{32}$.

C – Cas général.

N > 2 est un entier quelconque et à $n = 0$ l'urne B est vide.

Les notations dans la partie C sont celles de la partie B en remplaçant 4 par N pour le nombres de boules.

1 a) la matrice T = (t_{ij}) où les coefficients t_{ij} sont les probabilités conditionnelles $P_{(X_n=i)}(X_{n+1}=j)$.

i et *j* sont deux entiers compris entre 0 et N inclus (N + 1 entiers entre 0 et N inclus)
T est une matrice carrée de format (N + 1)×(N + 1).

b) Soit un entier *i*.

À l'étape *n*, l'urne A contient *i* boules, l'urne B contient N – *i* boules.
L'état de l'urne A est modifié de plus ou moins une boule à l'étape *n* + 1.

Si on tire une boule de A, l'urne A contient *i* – 1 boule à l'étape *n* + 1, d'où, $P_{(X_n=i)}(X_{n+1}=i-1) = \frac{i}{N}$.

On a donc $t_{i,i-1} = \frac{i}{N}$

Si on tire une boule de B, l'urne A contient *i* + 1 boule à l'étape *n* + 1, d'où, $P_{(X_n=i)}(X_{n+1}=i+1) = \frac{N-i}{N}$.

On a donc $t_{i,i+1} = \frac{N-i}{N}$
Si $|j-i| > 1$ où si *i* = *j*, alors $P_{(X_n=i)}(X_{n+1}=i) = P_{(X_n=i)}(X_{n+1}=j) = 0$.
Tous les termes de la diagonale sont nuls : $t_{i,i} = 0$.
Si *j* > *i* + 1 ou *j* < *i* – 1, $t_{ij} = 0$.
Les termes t_{ij} sont indépendants de *n*.

$$T = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{N} & 0 & \frac{N-1}{N} & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2}{N} & 0 & \frac{N-2}{N} & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & \frac{N-2}{N} & 0 & \frac{2}{N} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & \frac{N-1}{N} & 0 & \frac{1}{N} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

2) On admet que $E(X_n) = \frac{N}{2} + \left(1-\frac{2}{N}\right)^n \left(E(X_0)-\frac{N}{2}\right)$.

Si N > 2, alors 0 < 1 – $\frac{2}{N}$ < 1, d'où, $\left(1-\frac{2}{N}\right)^n$ tend vers 0 quand *n* tend vers +∞.

La limite en +∞ de $E(X_n)$ est $\frac{N}{2}$.

Le nombre de boules dans l'urne A tend vers $\frac{N}{2}$.

Avec le temps passe, le nombre de boules dans chaque urne est à peu près égal.

3) On admet que le temps moyen pour retrouver l'état initial est 2^N.

Si N est le nombre d'Avogadro (N = 6,02$\times$ 10^{23}), le nombre 2^{N} est « inimaginable »

2^6 = 64, donc, $2^{N} > 64^{10^{23}}$

Le nombre $10^{10^{23}}$ est un nombre qui s'écrit avec 1 suivi de 10^{23} zéros ….

En supposant la terre avec 15 milliards d'année, soit : $15\times 10^9 \times 365 \times 24 \times 3600$ secondes

qu'on peut arrondir à 5×10^{16} secondes, on est encore très, très, …, très loin de $10^{10^{23}}$

et même en supposant un changement d'urne toutes les nanosecondes ou picosecondes …. ….

TP3 page 174 Modèle proies-prédateurs de Lokta-Volterra

A- Modélisation discrète

s_n est le nombre de proies (sardines) et r_n le nombre de prédateurs (requins) à la date *n* (en mois) après le début de l'observation (*n* = 0).

1) ***Sans prédateurs*** (dans des conditions permettant le développement, (nourriture …), le nombre de proies croît indéfiniment.

Sans proies, le nombre de prédateurs tend vers 0.

Si ***proies et prédateurs coexistent***,

le nombre de proies doit diminuer lorsque le nombre de prédateurs augmente.

le nombre de prédateurs doit augmenter lorsque le nombre de proies augmente.

2) Soit le système (S) : $\begin{cases} s_{n+1}=(1+a)s_n-b\,s_n r_n \\ r_{n+1}=(1-d)r_n+c\,s_n r_n \end{cases}$ où *a*, *b*, *c* et *d* sont des réels de]0 ; 1[.

Vérifications des observations du 1) :

Sans prédateurs , $(r_n=0)$ et 1 + *a* > 1, la suite (s_n) est une suite géométrique de raison strictement supérieure à 1, donc, (s_n) est strictement croissante et (s_n) tend vers +∞.

Sans proies, $(s_n=0)$ et 0 < 1 – *d* < 1, la suite (r_n) est une suite géométrique de raison strictement comprise entre 0 et 1, donc, (r_n) est strictement décroissante et (r_n) tend vers 0.

proies et prédateurs coexistent,

$s_{n+1} - s_n = (a - b\,(r_n))\,(s_n)$ est strictement est strictement négatif dès que $r_n > \dfrac{a}{b}$.

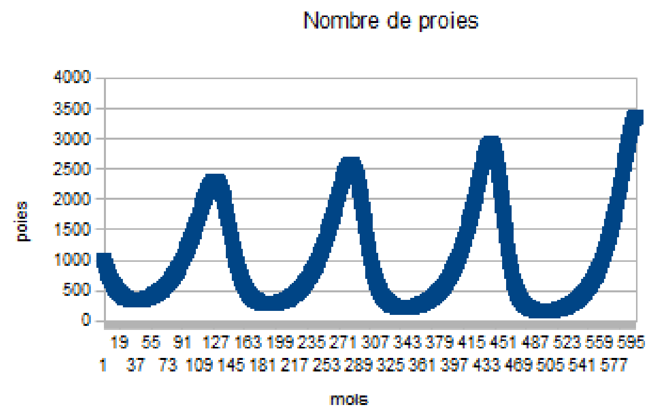
Donc, dès que le nombre de prédateurs augmente et devient supérieur à un nombre $\dfrac{a}{b}$, la population de proies diminue.

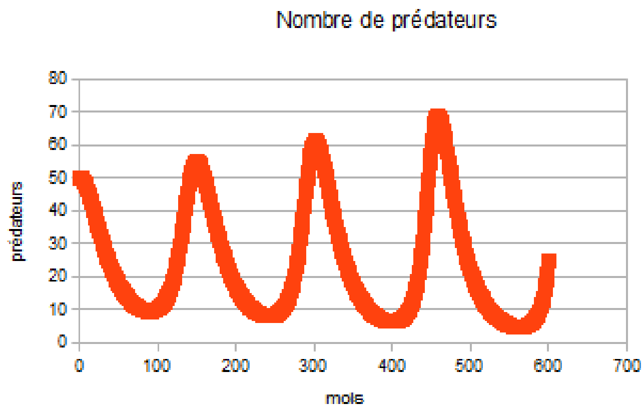
$r_{n+1} - r_n = (-d + c\,(s_n))\,(r_n)$ est strictement positif dès que $(s_n) > \dfrac{d}{c}$.

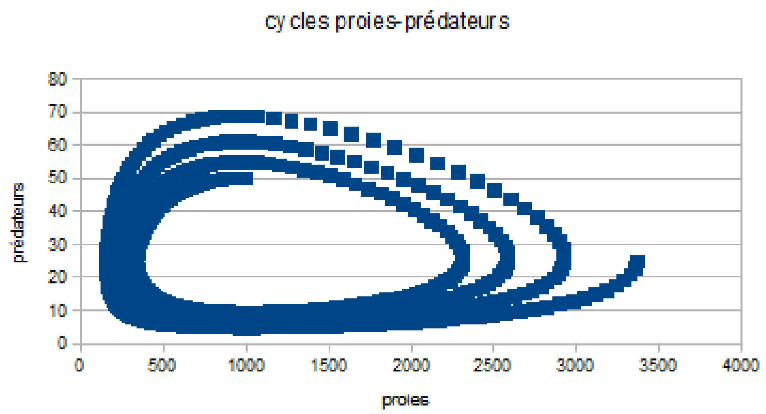
Donc, dès que le nombre de proies augmente et devient supérieur à un nombre $\dfrac{d}{c}$, la population de prédateurs augmente.

3) **Tableur** :

$s_0 = 1\,000$, $r_0 = 50$, $a = 0{,}05$, $b = 0{,}002$, $c = 0{,}000\,04$ $d = 0{,}04$ $\qquad \dfrac{a}{b} = 25$ et $\dfrac{d}{c} = 1\,000$







b) On observe les variations décrites précédemment sans jamais obtenir un état stable.

les variations observées sont importantes (forte croissance et forte décroissance simultanées)

c) $s_{n+1} = s_n$ et $r_{n+1} = r_n$ si et seulement si $(a - b\,(r_n)\,)\,(s_n) = 0$ et $(-d + c\,(s_n)\,)\,(r_n) = 0$

$s_n = 0$ et $r_n = 0$

ou $r_n = \dfrac{a}{b}$ et $s_n = \dfrac{d}{c}$

Les suites sont constantes dans deux cas :

- les deux suites sont constamment égales à 0.

On pose $s_0 = 0$ et $r_0 = 0$, et, une récurrence évidente implique :

pour tout $n \in \mathbb{N}$, $s_{n+1} = s_n = 0$ et $r_{n+1} = r_n = 0$

- $\begin{cases} s_n = \dfrac{d}{c} = 1000 \\ r_n = \dfrac{a}{b} = 25 \end{cases}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

On pose $s_0 = 1000$ et $r_0 = 25$ (avec les coefficients donnés au début de la question 3/ et la preuve est évidente).

d) en prenant des valeurs proches de 1000 et de 25, les variations sont beaucoup plus faibles et les valeurs restent proches de l'état d'équilibre.

4) **Cas général** :

a) Les calculs précédents ont montré qu'à part le cas trivial où les suites sont nulles, l'état d'équilibre est donné par les conditions initiales : $s_0 = \dfrac{d}{c}$ et $r_0 = \dfrac{a}{b}$.

Un récurrence (immédiate) prouve que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $s_n = s_0$ et $r_n = r_0$

b) $u_n = s_n - \dfrac{d}{c}$ et $v_n = r_n - \dfrac{a}{b}$.

Soit $\begin{cases} s_n = u_n + \dfrac{d}{c} \\ r_n = v_n + \dfrac{a}{b} \end{cases}$

(S) : $\begin{cases} s_{n+1} = (1+a)s_n - b\,s_n r_n \\ r_{n+1} = (1-d)r_n + c\,s_n r_n \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_{n+1} + \dfrac{d}{c} = (1+a)\left(u_n + \dfrac{d}{c}\right) - b\left(u_n + \dfrac{d}{c}\right)\left(v_n + \dfrac{a}{b}\right) \\ v_{n+1} + \dfrac{a}{b} = (1-d)\left(v_n + \dfrac{a}{b}\right) + c\left(u_n + \dfrac{d}{c}\right)\left(v_n + \dfrac{a}{b}\right) \end{cases}$

En développant :

$$(1+a)\left(u_n + \frac{d}{c}\right) - b\left(u_n + \frac{d}{c}\right)\left(v_n + \frac{a}{b}\right) = u_n + \frac{d}{c} + a \times u_n + \frac{ad}{c} - bu_n v_n - au_n - \frac{bd}{c}v_n - \frac{ad}{c} = u_n + \frac{d}{c} - bu_n v_n - \frac{bd}{c}v_n$$

$$(1-d)\left(v_n + \frac{a}{b}\right) + c\left(u_n + \frac{d}{c}\right)\left(v_n + \frac{a}{b}\right) = v_n + \frac{a}{b} - dv_n - \frac{ad}{b} + cu_n v_n + \frac{ac}{b}u_n + dv_n + \frac{ad}{b} = v_n + \frac{a}{b} + c\,u_n v_n + \frac{ac}{b}u_n$$

(S) $\Leftrightarrow \begin{cases} u_{n+1} + \dfrac{d}{c} = u_n + \dfrac{d}{c} - bu_n v_n - \dfrac{bd}{c}v_n \\ v_{n+1} + \dfrac{a}{b} = v_n + \dfrac{a}{b} + c\,u_n v_n + \dfrac{ac}{b}u_n \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_{n+1} = u_n - \dfrac{bd}{c}v_n - b\,u_n v_n \\ v_{n+1} = \dfrac{ac}{b}u_n + v_n + c\,u_n v_n \end{cases}$

c) b et c sont des nombres compris strictement entre 0 et 1, d'où, lorsqu'on est proche de l'état d'équilibre on peut supposer que pour certain indice n,

$-10^{-p} < b\,u_n < 10^{-p}$ et $-10^{-q} < c\,v_n < 10^{-q}$ (p et q entiers positifs), les produits $b\,u_n v_n$ et $c\,u_n v_n$ sont tels qu'ils deviennent négligeables par rapport à u_n et v_n.

d)e) En restant proche de l'état d'équilibre, le système (S′) $\begin{cases} u_{n+1} = u_n - \dfrac{bd}{c}v_n \\ v_{n+1} = \dfrac{ac}{b}u_n + v_n \end{cases}$ remplace le système (S) par un système linéaire plus facile à étudier :

$\begin{pmatrix} u_{n+1} \\ v_{n+1} \end{pmatrix}$ = A $\begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix}$ avec A = $\begin{pmatrix} 1 & \dfrac{-bd}{c} \\ \dfrac{ac}{b} & 1 \end{pmatrix}$

On a donc : $\begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix} = \mathrm{A}^n \begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \end{pmatrix}$

soit $\begin{pmatrix} s_n \\ r_n \end{pmatrix} = \mathrm{A}^n \begin{pmatrix} s_0 - \dfrac{d}{c} \\ r_0 - \dfrac{a}{b} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \dfrac{d}{c} \\ \dfrac{a}{b} \end{pmatrix}$.

B- modélisation continue

Les suites proposées sont des fonctions discrètes (non continues) puisqu'une suite est une fonction définie sur $\mathbb{N}$

Si on cherche un modèle " continu "équivalent à ce qui est proposé, on peut considérer deux fonctions *f* et *g* telles que $\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h} = f(x)\times(a-b\times g(x))$ à rapprocher de $s_{n+1} - s_n = (a - b\,(r_n))\,(s_n)$

et $\dfrac{g(x+h)-g(x)}{h} = g(x)\times(-d+c\times f(x))$ à rapprocher de $r_{n+1} - r_n = (-d + c\,(s_n))\,(r_n)$.

Quand *h* tend vers 0, on obtient un système de deux équations différentielles : $\begin{cases} f'(x)=f(x)\times(a-b\times g(x)) \\ g'(x)=g(x)\times(-d+c\times f(x)) \end{cases}$

Les fichiers proposés donnent une représentation des fonctions solutions de ce système différentiel.

---

9 page 176

(a_n), (b_n), (c_n) sont trois suites.

$a_0 = 2$, $b_0 = 1$ et $c_0 = –2$, et, pour tout $n\in\mathbb{N}$, $\begin{cases} a_{n+1}=2a_n+b_n \\ b_{n+1}= \quad 2b_n+c_n \\ c_{n+1}= \quad\quad 2c_n \end{cases}$

$\mathrm{X_n} = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix}$.

1) On a donc : $\begin{pmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \\ c_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix}$, soit : $\mathrm{X_{n+1}} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \mathrm{X_n}$

On pose A = $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

2) A = D + T avec D = $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ et T = $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

3) T² = $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ … $\mathrm{T}^3 = 0_3$.

4) Proposition à démontrer :

$n \in \mathbb{N}^*$, $\mathrm{A^n} = 2^n\,\mathrm{I}_3 + n\,2^{n-1}\,\mathrm{T} + 2^{n-2}\dfrac{n(n-1)}{2}\,\mathrm{T}^2$.

Initialisation : (on vérifie l'égalité lorsque *n* = 1 en calculant séparément les deux membres de l'égalité)

$n = 1$ On sait : $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = D + T$

d'autre part : Pour $n = 1$, $2^n I_3 + n\,2^{n-1} T + 2^{n-2}\dfrac{n(n-1)}{2} T^2$ donne

$$2I_3 + 1\times 2^0 T + 0_3 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} + T = D + T$$

L'égalité est vérifiée.

Hérédité :

Il existe un entier n non nul tel que l'égalité est vraie : $A^n = 2^n I_3 + n\,2^{n-1} T + 2^{n-2}\dfrac{n(n-1)}{2} T^2$.

Comme D est une matrice diagonale, $D = 2I_3$

Calculons A^{n+1}

$A^{n+1} = A^n.A = (2^n I_3 + n\,2^{n-1} T + 2^{n-2}\dfrac{n(n-1)}{2} T^2)(2I_3 + T)$

$= 2^n I_3\times 2I_3 + n\,2^{n-1} T\times 2I_3 + 2^{n-2}\dfrac{n(n-1)}{2} T^2 \times 2I_3 + 2^n I_3 T + n\,2^{n-1} T\,T + 2^{n-2}\dfrac{n(n-1)}{2} T^2\,T$

Comme $T^3 = 0_3$, on a :

$A^{n+1} = 2^{n+1} I_3 + n\,2^n T + 2^{n-1}\dfrac{n(n-1)}{2} T^2 + 2^n T + n\,2^{n-1} T^2$

$= 2^{n+1} I_3 + (n + 1)\,2^n T + (2^{n-1}\dfrac{n(n-1)}{2} + n\,2^{n-1})T^2$

Comme $2^{n-1}\dfrac{n(n-1)}{2} + n\,2^{n-1} = 2^{n-1}\dfrac{n(n-1+2)}{2} = 2^{n-1}\dfrac{(n+1)n}{2}$

$A^{n+1} = 2^{n+1} I_3 + (n + 1)\,2^n T + (2^{n-1}\dfrac{(n+1)n}{2})T^2$

Conclusion :

La proposition est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

Remarque et rappel : $\dfrac{(n+1)n}{2} = 1 + 2 + \ldots + n$.

5) On a $X_0 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ et $X_n = A^n X_0$ si $n \neq 0$.

$A^n = \begin{pmatrix} 2^n & n\,2^{n-1} & 2^{n-2}\dfrac{n(n-1)}{2} \\ 0 & 2^n & n\,2^{n-1} \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix}$, d'où, $X_n = \begin{pmatrix} 2^{n+1} + n\,2^{n-1} - 2^{n-2} n(n-1) \\ 2^n - n\,2^n \\ -2^{n+1} \end{pmatrix}$.

$a_n = 2^{n+1} + n\,2^{n-1} - 2^{n-2} n(n-1)$,

$b_n = 2^n - n\,2^n$,

$c_n = -2^{n+1}$

On vérifie pour $n = 0$.

$a_0 = 2 + 0 - 0 = 2$, $b_0 = 2^0 - 0 = 1$, $c_0 = -2$.

Les relations précédentes sont vraies pour tout $n \in \mathbb{N}$.

(La présentation du système permet de lire la matrice diagonale et la matrice strictement triangulaire d'un seul coup d'œil).

---

10 page 176

M = $\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$ avec A = $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$, B = $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$, C = $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, D = $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$

1) M est une matrice carrée de format 4×4.

2) M = $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 1 \\ 3 & -1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 0 \end{pmatrix}$

3) M² = $\begin{pmatrix} 5 & 1 & 3 & 2 \\ 5 & 3 & -2 & 5 \\ 6 & 0 & 5 & 1 \\ 8 & 2 & 2 & 4 \end{pmatrix}$

a) M² = $\begin{pmatrix} A^2+BC & AB+BD \\ CA+DC & CB+D^2 \end{pmatrix}$

b) A² = $\begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$; BC = $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$; A² + BC = $\begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$

AB = $\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$; BD = $\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$; AB + BD = $\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}$

CA = $\begin{pmatrix} 5 & -1 \\ 5 & -1 \end{pmatrix}$; DC = $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}$; CA + DC = $\begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 8 & 2 \end{pmatrix}$

CB = $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$; D² = $\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$; CB + D² = $\begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$

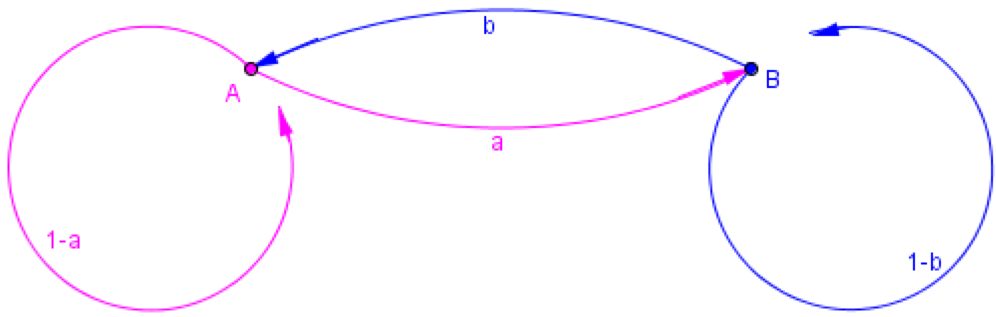
On retrouve le matrice M² ...

---

48 page 184 ***Étude asymptotique d'une marche aléatoire.***

La matrice de transition, dans l'ordre A, B, est M = $\begin{pmatrix} 1-a & a \\ b & 1-b \end{pmatrix}$ avec $0 < a < 1$ et $0 < b < 1$

Le graphe probabiliste associé à M est :



2) **Valeurs propres :**

Compréhension de la définition :

les valeurs propres sont deux réels λ et μ telles que M = P $\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix}$ P^{-1} où P est une matrice carrée

P = [V W] et les matrices V et W deux matrices colonnes (vecteurs propres) à coefficients non proportionnels (les vecteurs ne sont pas colinéaires) tels que MV = λV et MW = μW.

La recherche :

λ et μ se recherchent de la même façon …

On cherche les réels x tels que MV=xV, d'où, $(M - xI_2)V = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. (On a $XV = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ où $X = M - xI_2$)

Or, la matrice V est non nulle et le produit XV est nul impose que X n'est pas inversible.

En effet, si X est inversible, le produit $X^{-1}XV = V = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Comme la matrice X n'est pas inversible, son déterminant est nul.

Les calculs :

$X = \begin{pmatrix} (1-a)-x & a \\ b & (1-b)-x \end{pmatrix}$ et,

dét(X) = $[(1-a)-x][(1-b)-x] - ab = (1-a)(1-b) - x(1-a+1-b) + x^2 - ab$.

dét(X) = $x^2 - (2-a-b)x + (1-a-b)$.

Résolution de l'équation du second degré :

Une racine évidente 1, car, 1 + 1 – a – b = 2 – a – b et l'autre racine est $1 - a - b$.

Si on ne voit pas la racine évidente : discriminant $\Delta = (2-a-b)^2 - 4(1-a-b) = \ldots = (a+b)^2$

et $x_1 = \dfrac{2-a-b+a+b}{2} = 1$ et $x_2 = \dfrac{2-a-b-a-b}{2} = 1-a-b$.

On pose : $\lambda = 1$ et $\mu = 1-a-b$ (Rappel : $0 < a+b < 2$, d'où, $-2 < -a-b < 0$ et $-1 < 1-a-b < 1$)

3) la matrice diagonale D est $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1-a-b \end{pmatrix}$

Les vecteurs propres :

Le vecteur V associé à λ = 1.

$V = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ MV = 1.V mène à $\begin{cases} (1-a)x+ay=x \\ bx+(1-b)y=y \end{cases}$.

La première (ou la deuxième) équation donne : $x = y$. On peut choisir V = $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Le vecteur W associé à $\mu = 1 - a - b$.
W = $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ MW = $(1 - a - b)$.W mène à $\begin{cases} (1-a)x+ay=(1-a-b)x \\ bx+(1-b)y=(1-a-b)y \end{cases}$.
La première (ou la deuxième) équation donne : $bx = -ay$. On peut choisir W = $\begin{pmatrix} -a \\ b \end{pmatrix}$

La matrice P = $\begin{pmatrix} 1 & -a \\ 1 & b \end{pmatrix}$

La matrice $P^{-1} = \dfrac{1}{a+b} \begin{pmatrix} b & a \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{b}{a+b} & \dfrac{a}{a+b} \\ \dfrac{-1}{a+b} & \dfrac{1}{a+b} \end{pmatrix}$.

4) Calcul de M^n.
Montrons par récurrence que pour $n \in \mathbb{N}^*$, $M^n = P D^n P^{-1}$
Initialisation : $M = PD P^{-1}$.
Hérédité :
Soit un entier $n \geqslant 1$ tel que $M^n = P D^n P^{-1}$.
$M^{n+1} = M^n.M = P D^n P^{-1} PD P^{-1} = P D^n D P^{-1} = P D^{n+1} P^{-1}$
Conclusion :
L'axiome de récurrence permet de conclure : pour $n \in \mathbb{N}^*$, $M^n = P D^n P^{-1}$.

Or, D = $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1-a-b \end{pmatrix}$ étant une matrice diagonale, $D^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & (1-a-b)^n \end{pmatrix}$
$P D^n = \begin{pmatrix} 1 & -a(1-a-b)^n \\ 1 & b(1-a-b)^n \end{pmatrix}$ et $P D^n P^{-1} =$

$$\begin{pmatrix} \dfrac{b + a(1-a-b)^n}{a+b} & \dfrac{a - a(1-a-b)^n}{a+b} \\ \dfrac{b - b(1-a-b)^n}{a+b} & \dfrac{a + b(1-a-b)^n}{a+b} \end{pmatrix}$$

Comme $-1 < 1 - a - b < 1$, on sait : $\lim\limits_{n \to +\infty} (1 - a - b)^n = 0$

La suite de matrices (M^n) converge vers la matrice N = $\begin{pmatrix} \dfrac{b}{a+b} & \dfrac{a}{a+b} \\ \dfrac{b}{a+b} & \dfrac{a}{a+b} \end{pmatrix}$.

Comme $P_n = P_0 M^n$, l'état probabiliste tend vers vers un état stable L = $P_0 N$.
Soit $P_0 = (1 \ \ 0)$ ou $P_0 = (0 \ \ 1)$ (au départ, on est en A ou en B)

L = ($\frac{b}{a+b}$ $\frac{a}{a+b}$)

En posant α = $\frac{b}{a+b}$, on a : 1 – α = $\frac{a}{a+b}$

---

51 page 185 Approximation de nombres réels

A- Fraction continue et approximation

1) Algorithme d'Euclide

n	*a*	*b*	*q(n)*	*r(n)*		*n*	*a*	*b*	*q(n)*	*r(n)*
0	77708431	2640858	29	1123549		9	4411	1535	2	1341
1	2640858	1123549	2	393760		10	1535	1341	1	194
2	1123549	393760	2	336029		11	1341	194	6	177
3	393760	336029	1	57731		12	194	177	1	17
4	336029	57731	5	47374		13	177	17	10	7
5	57731	47374	1	10357		14	17	7	2	3
6	47374	10357	4	5946		15	7	3	2	1
7	10357	5946	1	4411		16	3	1	3	0
8	5946	4411	1	1535						

2) par définition de l'algorithme d'Euclide :

$a = b\ q_0 + r_0$ (i) , $b = r_0\ q_1 + r_1$ (ii), $.r_{0..} = r_1\ q_2 + r_2$ (iii), ... , $r_{i-2} = r_{i-1}\ q_i + r_i$ jusqu'au dernier reste nul.

Dans l'exemple : la dernière égalité est : 3 = 1×3 + 0 $r_{14} = 3$, $r_{15} = 1$, $q_{16} = 3$ et $r_{16} = 0$.

En divisant l'égalité (i) par b , on a : $\frac{a}{b} = q_0 + \frac{r_0}{b} = q_0 + \frac{1}{\frac{b}{r_0}}$ (1)

De même en divisant l'égalité (ii) par r_0 , on a : $\frac{b}{r_0} = q_1 + \frac{r_1}{r_0} = q_1 + \frac{1}{\frac{r_0}{r_1}}$, puis, en substituant dans (1), on obtient : (2) $\frac{a}{b} = q_0 + \frac{r_0}{b} = q_0 + \frac{1}{q_1 + \frac{1}{\frac{r_0}{r_1}}}$

De même en divisant l'égalité (iii) par r_1 , on a : $\frac{r_0}{r_1} = q_2 + \frac{r_2}{r_1} = q_2 + \frac{1}{\frac{r_1}{r_2}}$, puis, en substituant dans (2), on obtient : (3) $\frac{a}{b} = q_0 + \frac{r_0}{b} = q_0 + \cfrac{1}{q_1 + \cfrac{1}{\frac{r_0}{r_1}}} = q_0 + \cfrac{1}{q_1 + \cfrac{1}{q_2 + \cfrac{1}{\frac{r_1}{r_2}}}}$

b) par le même procédé, l'égalité suivante est :

(4) $\frac{a}{b} = q_0 + \frac{r_0}{b} = q_0 + \cfrac{1}{q_1 + \cfrac{1}{\frac{r_0}{r_1}}} = q_0 + \cfrac{1}{q_1 + \cfrac{1}{q_2 + \cfrac{1}{\frac{r_1}{r_2}}}} = q_0 + \cfrac{1}{q_1 + \cfrac{1}{q_2 + \cfrac{1}{q_3 + \cfrac{1}{\frac{r_2}{r_3}}}}}$

c) La dernière égalité a lieu au dernier reste non nul.
Dans l'exemple : $r_{16} = 0$, $r_{15} = 1$.

On a donc 16 égalités permettant d'écrire $\frac{77\ 708\ 431}{2\ 640\ 858}$.

Ainsi, on a obtenu la décomposition de $\frac{77\ 708\ 431}{2\ 640\ 858}$ en fraction continue.

d) Pour tout entier i tel que $r_{i+1} \neq 0$, $0 < r_{i+1} < r_i$,

d'où, $1 < \frac{r_i}{r_{i+1}}$ et en appliquant la fonction inverse strictement décroissante sur]0 ; +∞[, on a : $1 > \cfrac{1}{\frac{r_i}{r_{i+1}}}$

On obtient en négligeant ce terme $\cfrac{1}{\frac{r_i}{r_{i+1}}}$ les approximations successives de $\frac{a}{b}$:

$\frac{a}{b} \approx q_0$, $\frac{a}{b} \approx q_0 + \frac{1}{q_1}$, $\frac{a}{b} \approx q_0 + \cfrac{1}{q_1 + \cfrac{1}{q_2}}$, etc,

ce qui donne pour $\frac{77\ 708\ 431}{2\ 640\ 858}$ ($q_0 = 29$, $q_1 = 2$, $q_2 = 2$, $q_3 = 1$, ….)

$\frac{77\ 708\ 431}{2\ 640\ 858} \approx 29$, approximation par défaut puisque $\frac{a}{b} = q_0 + \frac{r_0}{b}$ et $0 < \frac{r_0}{b} < 1$.

On a donc $\frac{a}{b}$ (valeur exacte) supérieure à q_0 (valeur approchée)

$\frac{77\ 708\ 431}{2\ 640\ 858} \approx 29 + \frac{1}{2} = \frac{59}{2}$,

approximation par excès puisque $q_0 + \cfrac{1}{q_1 + \cfrac{1}{\frac{r_0}{r_1}}} - \left(q_0 + \frac{1}{q_1}\right) = \cfrac{1}{q_1 + \cfrac{1}{\frac{r_0}{r_1}}} - \frac{1}{q_1}$

et, comme $q_1 + \cfrac{1}{\frac{r_0}{r_1}} > q_1 > 0$, on a : $\cfrac{1}{q_1 + \cfrac{1}{\frac{r_0}{r_1}}} < \frac{1}{q_1}$

On a donc $\frac{a}{b}$ (valeur exacte) inférieure à $\frac{1}{q_1}$ (valeur approchée)

$\dfrac{77\ 708\ 431}{2\ 640\ 858} \approx 29 + \dfrac{1}{2+\dfrac{1}{2}} = 29 + \dfrac{1}{\dfrac{5}{2}} = 29 + \dfrac{2}{5} = \dfrac{147}{5}$

approximation par défaut puisque $\dfrac{1}{q_1+\dfrac{1}{q_2+\dfrac{1}{\dfrac{r_1}{r_2}}}} < \dfrac{1}{q_1+\dfrac{1}{q_2}}$.

Preuve : $q_2 + \dfrac{1}{\dfrac{r_1}{r_2}} > q_2 > 0$, donc, leurs inverses sont dans l'ordre inverse.

On ajoute q_1 aux deux membres, on garde ce dernier ordre, puis, on prend l'inverse, d'où, on revient à l'ordre initial.

La même démarche montre qu'on a successivement par défaut et par excès

$\dfrac{77\ 708\ 431}{2\ 640\ 858} \approx 29 + \dfrac{1}{2+\dfrac{1}{2+\dfrac{1}{1}}} = 29 + \dfrac{3}{7} = \dfrac{206}{7}$

(approximation par excès donnée par Huygens (1629- 1695))

3) Les approximations successives de $\dfrac{a}{b}$, appelées réduites, sont écrites sous forme de fractions irréductibles :

$\dfrac{x_0}{y_0}, \dfrac{x_1}{y_1}, \quad \dfrac{x_n}{y_n}$.

Pour calculer la réduite suivante, on admet que, pour tout $n \geqslant 1$, $\begin{pmatrix} x_{n+1} & y_{n+1} \\ x_n & y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q_{n+1} & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_n & y_n \\ x_{n-1} & y_{n-1} \end{pmatrix}$

Pour retrouver l'approximation de Huygens, on doit chercher $\dfrac{x_3}{y_3}$, soit jusqu'à $n = 2$.

On sait : $x_0 = 29$, $y_0 = 1$, $x_1 = 59$, $y_1 = 2$, $q_2 = 2$ et $q_3 = 1$

Quand $n = 1$, $\begin{pmatrix} x_2 & y_2 \\ x_1 & y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q_2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 & y_1 \\ x_0 & y_0 \end{pmatrix}$,

Quand $n = 2$, $\begin{pmatrix} x_3 & y_3 \\ x_2 & y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q_3 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_2 & y_2 \\ x_1 & y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q_3 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 & y_1 \\ x_0 & y_0 \end{pmatrix}$

$$= \begin{pmatrix} q_3 q_2+1 & q_3 \\ q_2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 & y_1 \\ x_0 & y_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\times 2+1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 59 & 2 \\ 29 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 59 & 2 \\ 29 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 206 & 7 \\ 147 & 5 \end{pmatrix}$$

On retrouve : $\dfrac{x_2}{y_2} = \dfrac{147}{5}$ et $\dfrac{x_3}{y_3} = \dfrac{206}{7}$.

B- approximations rationnelles du nombre d'or (noté φ)

Le nombre d'or, noté φ, est la racine positive d l'équation $x^2 = x + 1$

1) Cette équation du second degré a deux solutions $\varphi = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ et $1 - \varphi = 1 - \dfrac{\sqrt{5}}{2}$

Comme $\varphi^2 = 1 + \varphi$, on a en divisant chaque membre de l'égalité par φ,

$\varphi = \frac{1}{\varphi} + 1 = 1 + \frac{1}{\varphi}$ et en remplaçant φ par $1 + \frac{1}{\varphi}$, on obtient successivement :

$\varphi = 1 + \cfrac{1}{1+\cfrac{1}{\varphi}}$, $\varphi = 1 + \cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{\varphi}}}$, etc,

2) On sait que $\sqrt{5}$ n'est pas rationnel, d'où, $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ n'est pas rationnel.

Raisonnement par l'absurde : Supposons φ rationnel, alors, 2φ est rationnel, puis, $2\varphi - 1 = \sqrt{5}$ est rationnel.
Le processus précédent ne s'arrête pas (sinon on pourrait écrire φ sous forme d'une fraction irréductible et φ serait rationnel).

3) a) Approximation de φ.

$\varphi = 1 + \cfrac{1}{1+\cfrac{1}{\dots+\cfrac{1}{\varphi}}}$

En procédant comme dans la partie A, on a : $\frac{x_0}{y_0} = 1$, $\frac{x_1}{y_1} = 1 + \frac{1}{1} = 2$, $\frac{x_2}{y_2} = 1 + \cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1}} = 1+\frac{1}{2} = \frac{3}{2}$ …

(Vous pouvez faire le lien avec la suite de Fibonacci)

$x_0 = 1$, $y_0 = 1$, $x_1 = 2$, $y_1 = 1$, et, pour tout n, $q_n = 1$

Pour calculer les réduites, on a, pour tout $n \geqslant 1$, $\begin{pmatrix} x_{n+1} & y_{n+1} \\ x_n & y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_n & y_n \\ x_{n-1} & y_{n-1} \end{pmatrix}$.

Soit A = $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et B = $\begin{pmatrix} x_1 & y_1 \\ x_0 & y_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

Montrons par récurrence :

Pour tout $n \geqslant 1$, $\begin{pmatrix} x_{n+1} & y_{n+1} \\ x_n & y_n \end{pmatrix} = A^n \begin{pmatrix} x_1 & y_1 \\ x_0 & y_0 \end{pmatrix}$

Initialisation :

$n = 1$ $\begin{pmatrix} x_2 & y_2 \\ x_1 & y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\times2+1\times1 & 1\times1+1\times1 \\ 1\times2+0\times1 & 1\times1+0\times1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$

L'égalité est vérifiée.

hérédité :

Soit un entier $n \geqslant 1$ tel que $\begin{pmatrix} x_{n+1} & y_{n+1} \\ x_n & y_n \end{pmatrix} = A^n \begin{pmatrix} x_1 & y_1 \\ x_0 & y_0 \end{pmatrix}$,

Pour l'entier suivant, on a : $\begin{pmatrix} x_{n+2} & y_{n+2} \\ x_n & y_n \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x_{n+1} & y_{n+1} \\ x_n & y_n \end{pmatrix} = A\ A^n \begin{pmatrix} x_1 & y_1 \\ x_0 & y_0 \end{pmatrix} = A^{n+1} \begin{pmatrix} x_1 & y_1 \\ x_0 & y_0 \end{pmatrix}$

CQFD.

b) Diagonalisation de la matrice A = $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Rappel :

On cherche une matrice diagonale D et une matrice inversible P telles que $PDP^{-1} = A$
La matrice D se trouve en cherchant les valeurs propres de la matrice A (voir n°48) et la matrice P en calculant

les vecteurs propres V et W.

Les valeurs propres sont les solutions de dét($A - xI_2$) = 0

$A - xI_2 = \begin{pmatrix} 1-x & 1 \\ 1 & -x \end{pmatrix}$ qui a pour déterminant : $(1 - x)(-x) - 1 = x^2 - x - 1$

L'équation $x^2 - x - 1 = 0$ a pour solutions réelles φ et 1 – φ (voir B.1). (Rappel : $\varphi - 1 = \frac{1}{\varphi}$).

Soit $D = \begin{pmatrix} \varphi & 0 \\ 0 & 1-\varphi \end{pmatrix}$.

Les vecteurs propres :

Pour la valeur φ : $V \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, AV = φV équivaut à $\begin{pmatrix} x+y \\ x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varphi x \\ \varphi y \end{pmatrix}$

On peut choisir : $V \begin{pmatrix} \varphi \\ 1 \end{pmatrix}$

Pour la valeur 1 – φ : $W \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, AW = φW équivaut à $\begin{pmatrix} x+y \\ x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (1-\varphi) x \\ (1-\varphi) y \end{pmatrix}$

On peut choisir : $W \begin{pmatrix} 1-\varphi \\ 1 \end{pmatrix}$.

Soit $P = \begin{pmatrix} \varphi & 1-\varphi \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $P^{-1} = \frac{1}{2\varphi-1} \begin{pmatrix} 1 & \varphi-1 \\ -1 & \varphi \end{pmatrix}$ $2\varphi - 1 = \sqrt{5}$.

c) $A^n = P\ D^n\ P^{-1}$ (Récurrence voir n° 48)

$D^n = \begin{pmatrix} \varphi^n & 0 \\ 0 & (1-\varphi)^n \end{pmatrix}$

$$A^n = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} \varphi & 1-\varphi \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi^n & 0 \\ 0 & (1-\varphi)^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \varphi-1 \\ -1 & \varphi \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} \varphi^{n+1} & (1-\varphi)^{n+1} \\ \varphi^n & (1-\varphi)^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \varphi-1 \\ -1 & \varphi \end{pmatrix}$$

$$A^n = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} \varphi^{n+1}-(1-\varphi)^{n+1} & \varphi^{n+1}(\varphi-1)+\varphi(1-\varphi)^{n+1} \\ \varphi^n-(1-\varphi)^n & \varphi^n(\varphi-1)+\varphi(1-\varphi)^n \end{pmatrix}$$

Or, pour tout $n \geqslant 1$, $\begin{pmatrix} x_{n+1} & y_{n+1} \\ x_n & y_n \end{pmatrix} = A^n \begin{pmatrix} x_1 & y_1 \\ x_0 & y_0 \end{pmatrix}$ avec $\begin{pmatrix} x_1 & y_1 \\ x_0 & y_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} x_{n+1} & y_{n+1} \\ x_n & y_n \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} \varphi^{n+1}-(1-\varphi)^{n+1} & \varphi^{n+1}(\varphi-1)+\varphi(1-\varphi)^{n+1} \\ \varphi^n-(1-\varphi)^n & \varphi^n(\varphi-1)+\varphi(1-\varphi)^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x_n = \frac{1}{\sqrt{5}}(2(\varphi^n-(1-\varphi)^n)+\varphi^n(\varphi-1)+\varphi(1-\varphi)^n) \\ y_n = \frac{1}{\sqrt{5}}((\varphi^n-(1-\varphi)^n)+\varphi^n(\varphi-1)+\varphi(1-\varphi)^n) \end{cases}$$

Réduction de x_n : En factorisant φ^n et $(1-\varphi)^n$:

$$x_n = \frac{1}{\sqrt{5}} [\ \varphi^n (2 + \varphi - 1) - (1-\varphi)^n (-2 + \varphi)] = \frac{1}{\sqrt{5}} [\ \varphi^n (1 + \varphi) - (1-\varphi)^n (-2 + \varphi)]$$

Réduction de y_n : En factorisant φ^n et $(1-\varphi)^n$:

$$y_n = \frac{1}{\sqrt{5}} [\ \varphi^n (1 + \varphi - 1) - (1-\varphi)^n (-1 + \varphi)] = \frac{1}{\sqrt{5}} (\ \varphi^{n+1} - (1-\varphi)^{n+1}\ )$$

d) Les dix premières approximations de φ.

Le plus simple est de remarquer que $\begin{pmatrix} x_{n+1} & y_{n+1} \\ x_n & y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_n & y_n \\ x_{n-1} & y_{n-1} \end{pmatrix}$ donne :

$$\begin{cases} x_{n+1} = x_n + x_{n-1} \\ y_{n+1} = y_n + y_{n-1} \end{cases}$$

n	x_n	y_n	$\dfrac{x_n}{y_n}$	Nbre de décimales exactes	Par défaut ou par excès
0	1	1	1	0	par défaut
1	2	1	2	0	par excès
2	3	2	1,5	0	par défaut
3	5	3	1,6666...	1	par excès
4	8	5	1,6	1	par défaut
5	13	8	1,625	1	par excès
6	21	13	1,615385	2	par défaut
7	34	21	1,619048	2	par excès
8	55	34	1,617647	2	par défaut
9	89	55	1,618182	3	par excès

Extrait du tableur avec les formules du B3c)

	A	B	C	D	E	F	G
1	n	x(n)	y(n)	x(n)/y(n)		φ=	1,618033989
2	0	1	1	1			
3	1	2	1	2			
4	2	3	2	1,5			
5	3	5	3	1,666666667			
6	4	8	5	1,6			
7	5	13	8	1,625			
8	6	21	13	1,615384615			
9	7	34	21	1,619047619			
10	8	55	34	1,617647059			
11	9	89	55	1,618181818			
12	10	144	89	1,617977528			
13	11	233	144	1,618055556			
14	12	377	233	1,618025751			
15	13	610	377	1,618037135			
16	14	987	610	1,618032787			
17	15	1597	987	1,618034448			
18	16	2584	1597	1,618033813			
19	17	4181	2584	1,618034056			
20	18	6765	4181	1,618033963			
21	19	10946	6765	1,618033999			
22	20	17711	10946	1,618033985			
23	21	28657	17711	1,61803399			
24	22	46368	28657	1,618033988			

Remarque et complément : Suite de Fibonacci

La suite (u_n) de Fibonacci est définie par : $\begin{cases} u_0=1, u_1=1 \\ u_{n+2}=u_{n+1}+u_n \end{cases}$, $n \in \mathbb{N}$.

Un terme de la suite se calcule en faisant la somme des deux précédents.

La suite (v_n) définie par le quotient $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$ converge vers le nombre d'or φ.

C- Approximations rationnelles de $\sqrt{2}$.

$(\sqrt{2})^2 = 2$ et $(\sqrt{2})^2 - 1 = (\sqrt{2} - 1)(\sqrt{2} + 1)$. On en déduit :

$\sqrt{2} - 1 = \dfrac{1}{1+\sqrt{2}}$,

puis : $\sqrt{2} = 1 + \dfrac{1}{1+\sqrt{2}}$ en remplaçant $\sqrt{2}$ par $1 + \dfrac{1}{1+\sqrt{2}}$, on obtient :

$\sqrt{2} = 1 + \dfrac{1}{2+\dfrac{1}{1+\sqrt{2}}} = 1 + \dfrac{1}{2+\dfrac{1}{2+\dfrac{1}{1+\sqrt{2}}}} = \ldots$ (le processus ne s'arrête pas puisque $\sqrt{2}$ est irrationnel)

En reprenant les notations du B/, on a :

$\sqrt{2} \approx 1$, $\sqrt{2} \approx 1 + \dfrac{1}{2} = \dfrac{3}{2}$, $\sqrt{2} \approx 1 + \dfrac{1}{2+\dfrac{1}{2}} = 1+\dfrac{2}{5} = \dfrac{7}{5}$

$x_0 = 1$, $y_0 = 1$, $x_1 = 3$, $y_1 = 2$, et, $q_0 = 1$, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $q_n = 2$

Pour calculer les réduites, on a, pour tout $n \geqslant 1$, $\begin{pmatrix} x_{n+1} & y_{n+1} \\ x_n & y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_n & y_n \\ x_{n-1} & y_{n-1} \end{pmatrix}$.

Soit A = $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et B = $\begin{pmatrix} x_1 & y_1 \\ x_0 & y_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

Les valeurs propres de A sont les solutions de $(2 - x)(-x) - 1 = 0$, soit : $x^2 - 2x - 1 = 0$ qui a pour solutions : $1 + \sqrt{2}$ et $1 - \sqrt{2}$.

La matrice D = $\begin{pmatrix} 1+\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 1-\sqrt{2} \end{pmatrix}$.

Le vecteur V associé à $1 + \sqrt{2}$ vérifie AV = $(1 + \sqrt{2})$V, ce qui mène à $\begin{cases} 2x+y=(1+\sqrt{2})x \\ x=(1+\sqrt{2})y \end{cases}$.

On peut prendre : V = $\begin{pmatrix} 1+\sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix}$

Le vecteur W associé à $1 - \sqrt{2}$ vérifie AW = $(1 - \sqrt{2})$W, ce qui mène à $\begin{cases} 2x+y=(1-\sqrt{2})x \\ x=(1-\sqrt{2})y \end{cases}$.

On peut prendre : W = $\begin{pmatrix} 1-\sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix}$.

La matrice P = $\begin{pmatrix} 1+\sqrt{2} & 1-\sqrt{2} \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, et la matrice $P^{-1} = \frac{1}{2\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{2}-1 \\ -1 & 1+\sqrt{2} \end{pmatrix}$

Des égalités $A^n = P\,D^n\,P^{-1}$, et, $\begin{pmatrix} x_{n+1} & y_{n+1} \\ x_n & y_n \end{pmatrix} = A^n \begin{pmatrix} x_1 & y_1 \\ x_0 & y_0 \end{pmatrix}$ (voir partie B),

on en déduit : $\begin{pmatrix} x_{n+1} & y_{n+1} \\ x_n & y_n \end{pmatrix} = \frac{1}{2\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1+\sqrt{2} & 1-\sqrt{2} \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (1+\sqrt{2})^n & 0 \\ 0 & (1-\sqrt{2})^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{2}-1 \\ -1 & 1+\sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

$$= \frac{1}{2\sqrt{2}} \begin{pmatrix} (1+\sqrt{2})^{n+1} & (1-\sqrt{2})^{n+1} \\ (1+\sqrt{2})^n & (1-\sqrt{2})^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{2}-1 \\ -1 & 1+\sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{2}} \begin{pmatrix} (1+\sqrt{2})^{n+1}-(1-\sqrt{2})^{n+1} & (1+\sqrt{2})^{n+1}(\sqrt{2}-1)+(1-\sqrt{2})^{n+1}(1+\sqrt{2}) \\ (1+\sqrt{2})^n-(1-\sqrt{2})^n & (1+\sqrt{2})^n(\sqrt{2}-1)+(1-\sqrt{2})^n(1+\sqrt{2}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$x_n = \frac{1}{2\sqrt{2}} \left[\ 3[(1+\sqrt{2})^n-(1-\sqrt{2})^n]\ +\ (1+\sqrt{2})^n(\sqrt{2}-1)+(1-\sqrt{2})^n(1+\sqrt{2})\ \right] =$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{2}} [\ (1+\sqrt{2})^n\,(3+\sqrt{2}-1) + (1-\sqrt{2})^n\,(-3+1+\sqrt{2})]$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{2}} [\ (1+\sqrt{2})^n\,(2+\sqrt{2}) + (1-\sqrt{2})^n\,(\sqrt{2}-2)]$$

$$y_n = \frac{1}{2\sqrt{2}} \left[\ 2[(1+\sqrt{2})^n-(1-\sqrt{2})^n]\ +\ (1+\sqrt{2})^n(\sqrt{2}-1)+(1-\sqrt{2})^n(1+\sqrt{2})\ \right] =$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{2}} [\ (1+\sqrt{2})^n\,(2+\sqrt{2}-1) + (1-\sqrt{2})^n\,(-2+1+\sqrt{2})]$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{2}} [\ (1+\sqrt{2})^{n+1} + (1-\sqrt{2})^{n+1}\ ]$$

Sur le tableur, on obtient :

I	J	K	L	M	N
		√2=	1,414213562		
n	x(n)	y(n)	x(n)/y(n)	défaut-excès	décimales
0	1	1	1	défaut	0
1	3	2	1,5	excès	0
2	7	5	1,4	défaut	1
3	17	12	1,416666667	excès	2
4	41	29	1,413793103	défaut	2
5	99	70	1,414285714	excès	4
6	239	169	1,414201183	défaut	4
7	577	408	1,414215686	excès	5
8	1393	985	1,414213198	défaut	6
9	3363	2378	1,414213625	excès	6

57 page 188 Le modèle de Leslie

Le modèle de Leslie est un modèle qui permet d'étudier l'évolution d'une population en tenant compte des taux de mortalité et de fécondité aux différents âges.

Données et notations :

a_n effectif à l'année *n* des jeunes femelles de moins d'un an

b_n effectif à l'année *n* des jeunes femelles âgées de un an

c_n effectif à l'année des femelles de 2 ans.

$f_n = a_n + b_n + c_n$ effectif total à l'année *n* de la population femelle.

Taux de fécondité : une femelle de 1 an donne naissance à 6 femelles

une femelle de 2 ans donne naissance à 10 femelles

Taux de mortalité : 50 % survivent au-delà de la première année

40 % de ceux qui survivent la première année survivent jusqu'à la troisième année.

$\mathrm{P}_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix}$ et $\mathrm{P}_0 = \begin{pmatrix} 30 \\ 50 \\ 50 \end{pmatrix}$.

1) Soit l'état à l'année *n* : $\mathrm{P}_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix}$

l'année suivante *n* + 1, l'effectif a_{n+1} des femelles jeunes de moins d'un an est dû aux descendances des femelles de 1 an et des femelles de 2ans.

$a_{n+1} = 6\ b_n + 10\ c_n$

l'effectif b_{n+1} des femelles jeunes de 1 an est dû aux femelles survivantes de moins de 1 an.

$b_{n+1} = \frac{1}{2}\ a_n$

l'effectif c_{n+1} des femelles jeunes de 2 ans est dû aux femelles survivantes de 1 an.

$c_{n+1} = 0{,}4\ b_n$.

On a donc : $\mathrm{P}_{n+1} = \begin{pmatrix} 0 & 6 & 10 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}4 & 0 \end{pmatrix} \mathrm{P}_n$

On note A = $\begin{pmatrix} 0 & 6 & 10 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}4 & 0 \end{pmatrix}$.

On en déduit : $\mathrm{P}_n = \mathrm{A}^n\ \mathrm{P}_0$ (récurrence évidente)

2) Calculs avec Xcas.

P0:=[[30],[50],[50]]

$$\begin{pmatrix} 30 \\ 50 \\ 50 \end{pmatrix}$$

A:=[[0,6,10],[0.5,0,0],[0,0.4,0]]

$$\begin{pmatrix} 0 & 6 & 10 \\ 0.5 & 0 & 0 \\ 0 & 0.4 & 0 \end{pmatrix}$$

P5:=A^5*P0

$$\begin{pmatrix} 7960.0 \\ 1235.0 \\ 492.0 \end{pmatrix}$$

P10:=A^10*P0

$$\begin{pmatrix} 216370.0 \\ 55560.0 \\ 10582.0 \end{pmatrix}$$

P20:=A^20*P0

$$\begin{pmatrix} 223692230.0 \\ 55925950.0 \\ 11184090.0 \end{pmatrix}$$

P30:=A^30*P0

$$\begin{pmatrix} 229064916570 \\ 57266233460 \\ 11453245022 \end{pmatrix}$$

P40:=A^40*P0

$$\begin{pmatrix} 2.34562480584e+14 \\ 5.86406201518e+13 \\ 1.17281240281e+13 \end{pmatrix}$$

f5:=P5[0,0]+P5[1,0]+P5[2,0]

9687.0

f10:=P10[0,0]+P10[1,0]+P10[2,0]

282512.0

f20:=P20[0,0]+P20[1,0]+P20[2,0]

290802270.0

f30:=P30[0,0]+P30[1,0]+P30[2,0]

297784395052

f40:=P40[0,0]+P40[1,0]+P40[2,0]

3.04931224764e+14

P6:=A^6*P0

$$\begin{pmatrix} 12330.0 \\ 3980.0 \\ 494.0 \end{pmatrix}$$

f6:=P6[0,0]+P6[1,0]+P6[2,0]

16804.0

q6:=f6/f5

1.73469598431

P11:=A^11*P0

$$\begin{pmatrix} 439180.0 \\ 108185.0 \\ 22224.0 \end{pmatrix}$$

f11:=P11[0,0]+P11[1,0]+P11[2,0]

569589.0

q11:=f11/f10

2.01615860565

P21:=A^21*P0

$$\begin{pmatrix} 447396600.0 \\ 111846115.0 \\ 22370380.0 \end{pmatrix}$$

f21:=P21[0,0]+P21[1,0]+P21[2,0]

581613095.0

q21:=f21/f20

2.00002941861

P31:=A^31*P0

$$\begin{pmatrix} 458129850980 \\ 114532458285 \\ 22906493384 \end{pmatrix}$$

f31:=P31[0,0]+P31[1,0]+P31[2,0]

595568802649

q31:=f31/f30

2.00000004213

P41:=A^41*P0

$$\begin{pmatrix} 4.69124961192e+14 \\ 1.17281240292e+14 \\ 2.34562480607e+13 \end{pmatrix}$$

f41:=P41[0,0]+P41[1,0]+P41[2,0]

6.09862449545e+14

q41:=f41/f40

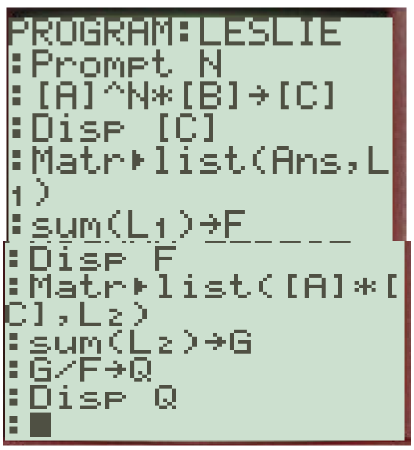
2.00000000005

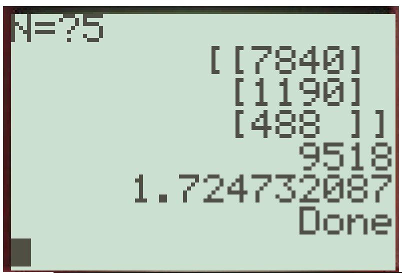
Le quotient $q_{n+1} = \dfrac{f_{n+1}}{f_n}$ semble tendre vers 2.

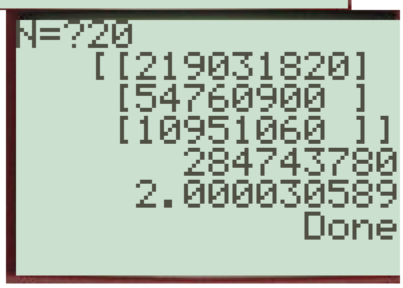
La suite (f_n) se comporte comme une suite géométrique de raison 2

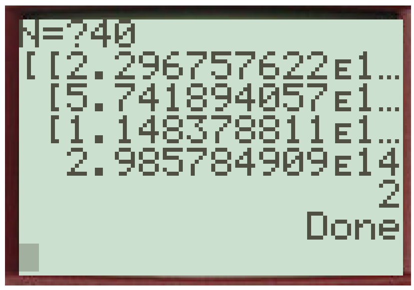
(Croissance exponentielle de la population).

Petit programme à la TI82 (améliorable sans doute)









Réinitialiser les listes avant de lancer le programme

A contient la matrice A

B contient la matrice P_0

C contient la matrice P_n

Matr>List (Ans, L1) met la première colonne de la matrice C dans la liste L1, ce qui permet d'utiliser Sum(L1) pour calculer f_n (dans F).

G contient f_{n+1} et Q contient $\dfrac{f_{n+1}}{f_n}$.

3. détermination de T^n .

a) T = $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ et P = $\begin{pmatrix} 4 & 10 & -20 \\ 1 & -5 & 5 \\ \frac{1}{5} & 2 & 0 \end{pmatrix}$

Calculs à faire avec la calculatrice : A = PT P^{-1} (La matrice A est triangularisée)

(En algèbre linéaire, trigonaliser (on dit aussi triangulariser) une matrice consiste à réduire celle-ci sous la forme d'une matrice triangulaire supérieure, ou inférieure. Ceci n'est possible que sous certaines conditions.

Une matrice pouvant se réduire sous cette forme est dite trigonalisable (ou triangularisable).)

b) Calculs de T^2, T^3 ,T^4 .

On émet la conjecture suivante : b. $T^2 = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $T^3 = \begin{pmatrix} 8 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$, $T^4 = \begin{pmatrix} 16 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

On conjecture : $\mathrm{T}^n = \begin{pmatrix} 2^n & 0 & 0 \\ 0 & (-1)^n & (-1)^{n+1} n \\ 0 & 0 & (-1)^n \end{pmatrix}$

c) on écrit T = D + J où D est une matrice diagonale et J une matrice triangulaire supérieure stricte.

D = $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ et J = $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$\mathrm{D}^n = \begin{pmatrix} 2^n & 0 & 0 \\ 0 & (-1)^n & 0 \\ 0 & 0 & (-1)^n \end{pmatrix}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$,

d)e) $J^2 = 0_3$ et JD = DJ = –J (calculs immédiats)

Les récurrences sont immédiates, pour tout $n \geqslant 1$, on a : $\mathrm{D}^n \mathrm{J} = (-1)^n \mathrm{J}$

et $\mathrm{T}^n = \mathrm{D}^n + (-1)^n n\mathrm{J}$.

(Attention à bien faire les distinctions entre produit à gauche et produit à droite dans les produits de matrices)

f) En faisant la somme des résultats précédents, on démontre la conjecture $\mathrm{T}^n = \begin{pmatrix} 2^n & 0 & 0 \\ 0 & (-1)^n & (-1)^{n+1} n \\ 0 & 0 & (-1)^n \end{pmatrix}$.

4 a) D'après la copie d'écran , on a :

$a_n = -190n\ (-1)^n - \frac{550}{3}\ (-1)^n + \frac{640}{3}\ 2^n.$

$b_n = 95n\ (-1)^n - \frac{10}{3}\ (-1)^n + \frac{160}{3}\ 2^n.$

$c_n = -38n\ (-1)^n + \frac{118}{3}\ (-1)^n + \frac{32}{3}\ 2^n.$

la somme donne

$f_n = -133n\ (-1)^n - \frac{442}{3}\ (-1)^n + \frac{832}{3}\ 2^n.$

b) Le quotient $\frac{f_{n+1}}{f_n} = \frac{-133.(n+1)(-1)^{n+1} - \frac{443}{3}.(-1)^{n+1} + \frac{832}{3}2^{n+1}}{-133.n(-1)^n - \frac{443}{3}.(-1)^n + \frac{832}{3}2^n}$

on reconnaît pour l'étude de la limite, les **croissances comparées** entre les fonctions exponentielles et les fonctions puissances …

Méthode : On factorise au numérateur et au dénominateur les termes " les plus forts " ...

$$\frac{f_{n+1}}{f_n} = \frac{2^{n+1}\left[\frac{-133.(n+1)(-1)^{n+1}}{2^{n+1}} - \frac{\frac{443}{3}.(-1)^{n+1}}{2^{n+1}} + \frac{832}{3}\right]}{2^n\left[\frac{-133.n(-1)^n}{2^n} - \frac{\frac{443}{3}.(-1)^n}{2^n} + \frac{832}{3}\right]} = \frac{2\left[\frac{-133.(n+1)(-1)^{n+1}}{2^{n+1}} - \frac{\frac{443}{3}.(-1)^{n+1}}{2^{n+1}} + \frac{832}{3}\right]}{\frac{-133.n(-1)^n}{2^n} - \frac{\frac{443}{3}.(-1)^n}{2^n} + \frac{832}{3}}$$

Il s'agit d'étudier le comportement en $+\infty$ de $\frac{x}{2^x}$.

$2^x = \mathrm{e}^{x\ln 2}$, d'où $\frac{x}{2^x} = \frac{1}{\ln 2}\ \frac{x\ln 2}{\mathrm{e}^{x\ln 2}}$, la limite en $+\infty$ de $\frac{x}{2^x}$ est donc la limite en $+\infty$ de $\frac{1}{\ln 2}\ \frac{x\ln 2}{\mathrm{e}^{x\ln 2}}$ et, comme $\ln 2 > 0$, la limite en $+\infty$ de $x\ln 2$ est $+\infty$.

$\frac{x\ln 2}{\mathrm{e}^{x\ln 2}}$ se comporte donc en $+\infty$ comme $\frac{x}{\mathrm{e}^x}$.

Or, $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x}{\mathrm{e}^x} = 0$ (croissance comparée), on en déduit que $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{n}{2^n} = 0$.

On a aussi : $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{(-1)^n}{2^n} = 0$

Le numérateur tend donc vers $2\times\frac{832}{3}$ et le dénominateur vers $\frac{832}{3}$.

Conclusion : $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{f_{n+1}}{f_n} = 2$.

b) la population suit un modèle de croissance exponentielle (ce qui pose un réel problème!)

c) Le rapport $\frac{a_n}{f_n}$ tend vers $\frac{640}{832} = \frac{10}{13}$

$\frac{b_n}{f_n}$ tend vers $\frac{160}{832} = \frac{5}{26}$.

$\frac{c_n}{f_n}$ tend vers $\frac{32}{832} = \frac{1}{26}$.