***p* et *q* sont deux entiers premiers entre eux.**

x est un entier.

On sait : $x \equiv r \pmod{p}$ et $x \equiv r \pmod{q}$
Autrement dit : le reste de *x* dans la division euclidienne par *p* et par *q* est le même.

Ou encore :
x – *r* est un multiple de *p*, et, est un multiple de *q*.

Conclusion : $x \equiv r \pmod{pq}$

Illustration :
***Un exemple* :**
p = 15 et *q* = 22

15 et 22 sont premiers entre eux $15 = 3\times5$ et $22 = 2\times11$ (aucun facteur premier commun aux deux décompositions).

PGCD(15 ; 22) = 1

x = 12 893
12 883 = 15× 858 + 13 $12\,883 \equiv 13 \pmod{15}$
12 883 = 22× 585 + 13 $12\,883 \equiv 13 \pmod{22}$

Ou encore : 12 883 – 13 = 12 870 = 15×858 = 22×585
Comme 15 et 22 sont premiers entre eux, on est certain (d'après Gauss) que 15 divise 585 et que 22 divise 858, et que les quotients de 585 par 15 et de 858 par 22 sont égaux.
585 = 15× 39 et 858 = 22× 39

On obtient : 12 883 – 13 = 12 870 = 15×22×39
Conclusion : $12\,883 \equiv 13 \pmod{15\times22}$

***Un contre-exemple* :**
p = 6 et *q* = 14 PGCD(6 ; 14) = 2
213 = 6×35 + 3 $213 \equiv 3 \pmod{6}$
213 = 14×15 + 3 $213 \equiv 3 \pmod{14}$

213 – 3 = 210 = 6×35 = 14×15
Or, 6×14 = 84
On ne peut pas décomposer 35 (ou 15) de façon à faire apparaître 84
6×5×7 = 14×3×5
213 = 84×2 + 45 $213 \equiv 45 \pmod{6\times14}$

Démonstration :
D'après les données : $x - r \equiv 0\ (p)$ et $x - r \equiv 0\ (q)$.
il existe donc deux entiers *k* et *k′* tels que $x - r = pk = qk'$ (1)
$pk = qk'$ et *p* et *q* premiers entre eux implique qu'il existe un entier *k″* tel que $k' = pk''$ et $k = qk''$ (Gauss)
En remplaçant dans (1) : $x - r = pqk''$ Conclusion : $x \equiv r\ (pq)$