Index

Soit un nombre entier naturel N . On pose : $N = 10d + u$

Que représente u pour N ?

d est appelé le résidu dans la suite de l'activité.

I- Critères de divisibilité par 7

Un critère

Multiplier u par 5 et ajouter le résultat au résidu d. On obtient un nombre N_1 .

Réitérer le procédé et démontrer que N est un multiple de 7 si et seulement si N_1 est un multiple de 7.

Exemples :

$4\,438 = N$ $\quad$ $4\,438 = 10\times443 + 8$ $\quad$ $d = 443$ et $u = 8$

$N_1 = 443 + 40 = 483 = 48\times10 + 3$, d'où, $N_1 = 48 + 15 = 63$ donc 7 divise 4 438

$6\,373 = N$

$N_1 = 637 + 15 = 652$ $\quad$ $N_1 = 65 + 10 = 75$ $\quad$ $N_1 = 7 + 25 = 32$ $\quad$ $N_1 = 13$

6 373 n'est pas divisible par 7.

Autres critères

1) Montrer que N est un multiple de 7 si et seulement si $d - 2u$ est un multiple de 7.

2) En remarquant que $10^3 \equiv -1$ (7), on a un autre critère de divisibilité :

Il suffit de séparer ce nombre par tranche de 3 chiffres en partant des unités et d'insérer alternativement des - et des + entre les tranches à partir du début du nombre en commençant par un -. On effectue l'opération ainsi écrite et si le résultat est divisible par 7, alors le nombre considéré est divisible par 7. Bien sûr pour voir si le résultat de l'opération précédente est divisible par 7, on peut utiliser les autres critères de divisibilité par 7.

II- Critères de divisibilité par 13

1) Le nombre N est divisible par 13 si et seulement si $d + 4u$ est divisible par 13.

Exemples :

$N = 7631$

$7631 = 763\times10 + 1$ $\quad$ $N_1 = 763 + 4 = 767 = 76\times10 + 7$ $\quad$ $N_1 = 76 + 28 = 104$ $\quad$ $N_1 = 10 + 16 = 26$

7631 est divisible par 13

$N = 87543$

$N_1 = 8754 + 12 = 8766$ $N_1 = 876 + 24 = 900$ $N_1 = 90 + 0 = 90$ $N_1 = 9 + 0$

87543 n'est pas divisible par 13

2) Justifier le procédé suivant :

" Pour savoir si un nombre contenant un grand nombre de chiffres est divisible par 13, il suffit de séparer ce nombre par tranche de 3 chiffres en partant des unités et d'insérer alternativement des – et des + entre les tranches à partir du début du nombre en commençant par un –.

On effectue l'opération ainsi écrite et si le résultat est divisible par 13, alors le grand nombre considéré est divisible par 13.

Pour voir si le résultat de l'opération est divisible par 13, on peut utiliser le critère précédent de divisibilité par 13. "

III- Critères de divisibilité par 17

1) Démontrer que le nombre N est divisible par 17 si et seulement si $d - 5u$ est divisible par 17.

(Tester sur deux nombres : l'un multiple de 17, l'autre non)

2) Justifier le procédé suivant :

" Pour savoir si un nombre contenant un très grand nombre de chiffres est divisible par 17, il suffit de séparer ce nombre par tranche de 8 chiffres en partant des unités et d'insérer alternativement des – et des + entre les tranches à partir du début du nombre en commençant par un –.

On effectue l'opération ainsi écrite et si le résultat est divisible par 17, alors le grand nombre considéré est divisible par 17.

Pour voir si le résultat de l'opération est divisible par 17, on peut utiliser le critère précédent de divisibilité par 17.

Preuve s:

Divisibilité par 7

1) $N = 10d + u$ et $N_1 = d + 5u$.

$5N - N_1 = 49d$

$5N - N_1 \equiv 0\ (7)$

Or N est un multiple de 7 si et seulement si 5N est un multiple de 7.

5N et N_1 ont le même reste dans la division euclidienne par 7.

2) comme $2N + (d - 2u) = 21d$, on a la même démarche ...

Divisibilité par 13

$4N - N_1 = 39d$

Divisibilité par 17

$5N + N_1 = 51d$