Index

Commenter les trois exercices

Exercice 1 Où on montre que pour tout entier n, on a : *n* + 1 = *n*

Dans ce tableau les lignes sont équivalentes :

Lignes	Calculs	Commentaires	
1	$(n+1)^2 = n^2 + 2n + 1$	Développement de la somme d'un carré	
2	$(n+1)^2 - (2n+1) = n^2$	On a ajouté $-(2n+1)$ aux deux membres de l'égalité	
3	$(n+1)^2 - (2n+1) - n(2n+1) = n^2 - n(2n+1)$	On a ajouté $-n(2n+1)$ aux deux membres de l'égalité	
4	$(n+1)^2 - (n+1)(2n+1) = n^2 - n(2n+1)$	On a factorisé $2n+1$ dans le membre de gauche	
5	$(n+1)^2 - (n+1)(2n+1) + \frac{(2n+1)^2}{4}$ $= n^2 - n(2n+1) + \frac{(2n+1)^2}{4}$	On a ajouté aux deux membres $\frac{(2n+1)^2}{4}$ afin de faire apparaître le développement de $(a-b)^2$ $a^2 - 2ab + b^2$	
6	$\left[(n+1) - \frac{(2n+1)}{2}\right]^2 = \left[n - \frac{(2n+1)}{2}\right]^2$	On a deux nombres au carré, on prend alors la racine carrée ..	$n+1 > \frac{2n+1}{2} > n$, d'où,
La racine carrée d'un réel A est le réel **positif** a, noté, $\sqrt{A}$, tel que $a^2 = A$. Exemple : $\sqrt{(-3)^2} = \sqrt{9} = 3$ En d'autres termes : $\sqrt{x^2} = \lvert x \rvert = \begin{cases} x & \text{si } x \geqslant 0 \\ -x & \text{si } x \leqslant 0 \end{cases}$			
7	$(n+1) - \frac{2n+1}{2} = -(n - \frac{2n+1}{2})$	En réduisant, on obtient évidemment une égalité	
8	$2n + 1 = 2n + 1$		

Exercice 2 Où l'on prouve que 3 = 0

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $x^2 + x + 1 = 0$

Dans ce tableau les lignes sont équivalentes :

Lignes	Calculs	Commentaires
1	$x^2 + x + 1 = 0$	0 n'est pas solution, on peut donc sans perdre de solutions, résoudre l'équation dans $\mathbb{R}^*$.
2	$x^2 + x = -1$	On a ajouté -1 aux deux membres de l'égalité
3	$x^3 + x^2 + x = 0$	Puisque $x \neq 0$, en multipliant par un réel non nul, on garde l'égalité de la ligne 1.
4	$x^2 + x = -x^3$	On a ajouté $-x^3$ aux deux membres de l'égalité
5	$-1 = -x^3$	Par transitivité de l'égalité (lignes 2 et 4)
Il n'y a pas équivalence, en effet : La ligne 4 revient à multiplier la ligne 2 par x et comparer " lignes 2 et 4 " revient à retrancher les deux lignes. On a donc fait finalement : $x \times L2 - L2 = (x-1)\times L2$ Or $x - 1 = 0$ lorsque $x = 1$ C'est cette solution que l'on trouve et non celle de l'équation (1) qui n'a aucune solution ($\Delta = -3$)		
6	**Cette dernière équation a pour unique solution le réel 1**	

~~Les lignes étant équivalentes~~, ~~l'équation $x^2 + x + 1 = 0$ a pour solution 1, soit : $1^2 + 1 + 1 = 0$~~

Exercice 3 ***Où l'on prouve que la somme de nombres positifs est un nombre négatif.***

Rappel de la méthode :

Pour calculer la somme des termes consécutifs d'une suite géométrique de raison q ($q \neq 1$), on peut faire :

$S = 1 + q + q^2 + ... + q^n$ En multipliant les deux membres par q,

$qS = \quad q + q^2 + q^3 + ... + q^{n+1}$ En faisant la différence des deux égalités : $S - qS = 1 - q^{n+1}$

Ce qui permet de calculer S.

Applications :

1) On considère la suite géométrique de raison $\frac{2}{3}$, et, on appelle S la somme des termes (infinis) ...,

soit : $S_1 = 1 + \frac{2}{3} + \left(\frac{2}{3}\right)^2 + \left(\frac{2}{3}\right)^3 + ...$ (infinité de termes)

$\frac{2}{3} S_1 = \quad \frac{2}{3} + \left(\frac{2}{3}\right)^2 + \left(\frac{2}{3}\right)^3 + \left(\frac{2}{3}\right)^4 + ...$ (on retrouve tous les termes)

Par différence : $\frac{1}{3} S_1 = 1$, d'où, $S_1 = 3$

Cette méthode est justifiée car, $-1 < \frac{2}{3} < 1$, et, par conséquent, la suite géométrique $\left(\frac{2}{3}\right)^n$ converge vers 0.

Or, la somme des termes consécutifs d'une suite géométrique est donnée par : Somme = $\dfrac{1-q^{\text{nombres de termes}}}{1-q}$

$$S_1 = \lim_{n\to+\infty} \frac{1-\left(\frac{2}{3}\right)^n}{1-\frac{2}{3}} = 3$$

S_1 est un réel, et, on fait des opérations valides sur des réels.

2) On considère la suite géométrique de raison $\frac{4}{3}$, et, on appelle S la somme des termes (infinis) ...,

soit : $S_2 = 1 + \frac{4}{3} + \left(\frac{4}{3}\right)^2 + \left(\frac{4}{3}\right)^3 + ...$ (infinité de termes)

$\frac{4}{3}\ S_2 = \frac{4}{3} + \left(\frac{4}{3}\right)^2 + \left(\frac{4}{3}\right)^3 + \left(\frac{4}{3}\right)^4 + ...$ (on retrouve tous les termes)

Par différence : $\frac{1}{3}\ S_2 = -1$, d'où, $S_2 = -3$

Dans le deuxième cas, $\frac{4}{3} > 1$, donc, la suite géométrique ne converge pas (elle diverge vers $+\infty$).

On ne peut donc pas faire des opérations sur " l'infini " comme on fait sur les réels..

$$S_2 = \lim_{n\to+\infty} \frac{1-\left(\frac{4}{3}\right)^n}{1-\frac{4}{3}} = +\infty.$$

S_2 n'est pas un nombre réel.