Index

0- Présentation

L'étude des matrices (tableaux de nombres) fait partie d'une branche des mathématiques appelée " algèbre linéaire ".

Les calculs effectués avec les coordonnées de vecteurs dans un repère donnent un exemple de calculs (élémentaires) avec des matrices.

Les matrices permettent de modéliser les réseaux

I- Matrices : définitions et écriture des matrices

I-1- définition

m et *n* étant deux entiers naturels non nuls, on appelle matrice de dimension (*ou taille ou format*) $m \times n$, un tableau de nombres composé de *m* lignes et *n* colonnes.

Exemples :

$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ est une matrice de dimension 2×3.

$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -5 & 3 & 4 \end{pmatrix}$ est une **matrice ligne** (elle est formée d'une seule ligne.

$\begin{pmatrix} 5 \\ -1 \end{pmatrix}$ est une **matrice colonne** (elle est formée d'une seule colonne)

$\begin{pmatrix} -2 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & -4 \\ 5 & 2 & 4 \end{pmatrix}$ est une **matrice carrée d'ordre** 3

I-2- Écriture d'une matrice

Soit une matrice M de dimension $m \times n$.

Les nombres a_{ij} ($1 \leqslant i \leqslant m$ et $1 \leqslant j \leqslant n$) composant cette matrice sont appelés les **coefficients** de la matrice.

Ils sont repérés en indexant par les numéros de ligne et de colonne dans cet ordre.

$$M = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ . & & \dots & . \\ . & & \dots & . \\ . & & \dots & . \\ . & & a_{ij} & . \\ . & & \dots & . \\ . & & \dots & . \\ . & & \dots & . \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

m lignes, n colonnes. On note $M = (a_{ij})_{1 \leqslant i \leqslant m; 1 \leqslant j \leqslant n}$

Coefficient à l'intersection de la i-ième ligne et de la j-ième colonne

Égalité de deux matrices :

Deux matrices sont égales si et seulement si elles sont de même dimension et ont les mêmes coefficients aux mêmes places.

I-3- Matrice carrée, diagonale ; matrice identité ; matrice nulle.

Matrice carrée d'ordre *n*.

Une **matrice carrée d'ordre *n*** est formée de n lignes et n colonnes.

Les coefficients a_{ii} forment la **diagonale** principale de la matrice carrée.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ & & . & \\ & & . & \\ & & . & \\ a_{n1} & & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

diagonale principale d'une matrice carrée

Matrice identité

La matrice identité d'ordre n, notée I_n, est formée par des 1 sur la diagonale et des 0 ailleurs.

On a : pour tout i, $a_{ii} = 1$ et , pour $i \neq j$, $a_{ij} = 0$

$I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $I_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ ....

Matrice nulle

La matrice nulle d'ordre n, notée 0_n, a tous ses coefficients nuls.

On a : pour tout i et pour tout j, $a_{ij} = 0$

II- Opérations sur les matrices

II-1- Addition de deux matrices

La somme de deux matrices A et B **de même dimension** $m\times n$ de coefficients respectifs a_{ij} et b_{ij} est la matrice $C = A + B$ de même dimension $m\times n$ et de coefficients $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$ avec $1 \leqslant i \leqslant m$ et $1 \leqslant j \leqslant n$.

Exemple : $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -5 \\ 2 & -3 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -2 \\ 0 & -2 & 4 \end{pmatrix}$.

II-2- Multiplication d'une matrice par un réel

Soit un réel λ et une matrice A de dimension $m\times n$ et de coefficients a_{ij}.

La matrice λA est la matrice de dimension $m\times n$ et de coefficients b_{ij} où $b_{ij} = \lambda.\, a_{ij}$ avec $1 \leqslant i \leqslant m$ et $1 \leqslant j \leqslant n$.

A et λA ont la même dimension.

Exemple :

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -5 \\ 2 & -3 & 3 \end{pmatrix}$. $B = 5A = \begin{pmatrix} 5 & 10 & -25 \\ 10 & -15 & 15 \end{pmatrix}$, $C = \frac{1}{3}A = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{-5}{3} \\ \frac{2}{3} & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

$D = \frac{5}{3}A = 5\times C = \frac{1}{3}B = \begin{pmatrix} \frac{5}{3} & \frac{10}{3} & \frac{-25}{3} \\ \frac{10}{3} & -5 & 5 \end{pmatrix}$.

différence de deux matrices de même dimension $m\times n$

On peut ainsi définir la différence $A - B$ par $A + (-1)B$.

Exemple : $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -5 \\ 2 & -3 & 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -5 \\ 2 & -3 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 & 1 & -3 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 3 & -8 \\ 4 & -4 & 2 \end{pmatrix}$

La matrice $-B = -1\times B$ est appelée matrice **opposée** de B.

Commentaire sur la notion d'opposé :

Quand a été définie sur un ensemble contenant un élément nul une addition, l'opposé de x est l'élément x' défini par : $x + x' = x' + x = 0$

*La matrice opposée de B est la matrice B' qui ajoutée à B donne la **matrice nulle**.*

Comme $B + (-B) = (-B) + B = 0$, le vocabulaire est cohérent.

II-3- Multiplication de deux matrices

II-3-1- Multiplication d'une matrice ligne par une matrice colonne

Soit A la matrice ligne à n colonnes : $A = (a_{1\mathrm{j}})_{1\leqslant \mathrm{j}\leqslant n}$ et B la matrice colonne à n lignes : $B = (b_{\mathrm{i}1})_{1\leqslant \mathrm{i}\leqslant n}$.

Le produit des deux matrices A et B, noté $A\times B$ ou AB, est le nombre réel défini par la somme :

$$AB = a_{11}\times b_{11} + a_{12}\times b_{21} + \ldots + a_{1\mathrm{j}}\times b_{\mathrm{j}1} + \ldots + a_{1n}\times b_{n1} = \sum_{\mathrm{j}=1}^{\mathrm{j}=n} a_{1\mathrm{j}}\times b_{\mathrm{j}1}$$

Remarque : Voir produit scalaire de deux vecteurs.

Exemple : $A = (1\ ;\ -2\ ;\ 5)$ et $B = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$. Le produit $AB = 1\times4 + (-2)\times1 + 5\times(-3) = -13$

Important : le nombre de colonnes de A est égale au nombre de lignes de B.

II-3-2- Multiplication d'une matrice $m\times n$ par une matrice $n\times p$

Soit A la matrice de dimension $m\times n$: $A = (a_{ij})_{1\leqslant i\leqslant m, 1\leqslant j\leqslant n}$

et B la matrice de dimension $n\times p$: $B = (b_{ij})_{1\leqslant i\leqslant n, 1\leqslant j\leqslant p}$.

Le produit des deux matrices A et B, noté $A\times B$ ou AB, est la matrice de dimension $m\times p$ définie par :

$AB = (c_{ij})_{1\leqslant i\leqslant m, 1\leqslant j\leqslant p}$ où le coefficient c_{ij} est le réel obtenu par le produit de la i-ième ligne de A par la j-ième ligne de B comme défini au paragraphe précédent.

Important : le nombre de colonnes de A est égale au nombre de lignes de B.

Exemple et disposition en pratique :

On dispose les deux matrices à multiplier de façon à avoir au croisement de la ligne n° i de A et de la colonne n° j de B, le nombre c_{ij}.

$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 5 \\ 2 & -1 & -3 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 5 & 1 & -4 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

$$\begin{array}{cc} & \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 5 & 1 & -4 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 1 & -1 & 5 \\ 2 & -1 & -3 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 7 & 1 & 2 & 9 \\ 1 & -6 & -8 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

$2\times1+(-1)\times5+(-3)\times1$

Le produit AB est la matrice $\begin{pmatrix} 7 & 1 & 2 & 9 \\ 1 & -6 & -8 & 1 \end{pmatrix}$.

II-4- Propriétés des opérations : Addition matricielle et multiplication par un réel

II-4-1- Commutativité de l'addition matricielle.

L'addition de deux matrices de même format est commutative :

$A + B = B + A$.

Cette propriété découle de la commutativité de l'addition dans $\mathbb{R}$.

II-4-2- Associativité de l'addition matricielle.

L'addition de matrices de même format est associative :

A, B, C étant des matrices de même format, $(A + B) + C = A + (B + C) = A + B + C$.

Cette propriété découle de l'associativité de l'addition dans $\mathbb{R}$.

II-4-3 : Distributivité de la multiplication par un réel sur l'addition matricielle :

λ réel, A et B matrices de même dimension, $\lambda(A + B) = \lambda A + \lambda B$
Cette propriété découle de la distributivité de la multiplication sur l'addition dans $\mathbb{R}$.

II-4-4 Distributivité de la multiplication sur l'addition des réels.

$(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ et A une matrice $\qquad (\lambda + \mu)A = \lambda A + \mu A$.

II-4-5- Autre propriété :

$(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ et A une matrice ...., $\lambda(\mu A) = (\lambda\mu)A = \lambda\mu A$.

À quoi servent ces propriétés ?

Ces propriétés peuvent paraître évidentes, mais ce sont ces propriétés qui justifient par exemple les méthodes usuelles de résolution algébrique des équations.

Un petit exemple :

On cherche une matrice X (inconnue) vérifiant :

$$2\left[X + \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & -2 \end{pmatrix}\right] = 3 \times \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -3 \end{pmatrix} - X.$$

On " développe " le membre de gauche (d'après §II-4-3) et celui de droite.

$$2X + \begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ 4 & 2 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 3 & -3 \\ 0 & 3 & -9 \end{pmatrix} - X.$$

On ajoute X à chaque membre (pour garder l'égalité)

$$2X + \begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ 4 & 2 & -4 \end{pmatrix} + X = \begin{pmatrix} 6 & 3 & -3 \\ 0 & 3 & -9 \end{pmatrix} - X + X.$$

À gauche, d'après la commutativité et l'associativité de l'addition, on a : $2X + X + \begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ 4 & 2 & -4 \end{pmatrix}$

soit d'après le §II-4-4 : $(2 + 1)X + \begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ 4 & 2 & -4 \end{pmatrix}$

Comme $-X + X = 0$, l'équation devient :

$$3X + \begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ 4 & 2 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 3 & -3 \\ 0 & 3 & -9 \end{pmatrix}$$

On ajoute à chaque membre l'opposé de $\begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ 4 & 2 & -4 \end{pmatrix}$, ce qui mène à :

$$3X = \begin{pmatrix} 6 & 3 & -3 \\ 0 & 3 & -9 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ 4 & 2 & -4 \end{pmatrix}$$

On réduit le membre de droite :

$$3X = \begin{pmatrix} 4 & 5 & -3 \\ -4 & 1 & -5 \end{pmatrix}.$$

On multiplie les deux membres par $\frac{1}{3}$.

$$\frac{1}{3}(3X) = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 4 & 5 & -3 \\ -4 & 1 & -5 \end{pmatrix}.$$

D'après le §II-4-5-, on a donc :

$$X = \begin{pmatrix} \frac{4}{3} & \frac{5}{3} & -1 \\ \frac{-4}{3} & \frac{1}{3} & \frac{-5}{3} \end{pmatrix}$$

II-5- Propriété des opérations : multiplication de matrices carrées

A, B, C sont des matrices carrées d'ordre n.

λ est un réel

II-5-1- Associativité de la multiplication matricielle

$A(BC) = (AB)C$. Associativité de la multiplication.

II-5-2- Multiplication par un réel et multiplication matricielle

$\lambda(AB) = (\lambda A)B = A(\lambda B)$.

II-5-3- Distributivité de la multiplication matricielle sur l'addition matricielle

$A(B + C) = AB + AC$.

II-5-4-Élément neutre de la multiplication

Recherche :

Soit A une matrice non nulle carrée d'ordre n . On cherche s'il existe une matrice B telle que $AB = BA = A$.

En prenant $n = 2$, on cherche $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ où les inconnues sont les réels a', b', c', d'.

On obtient les équations suivantes : $\begin{cases} aa'+bc'=a \\ ab'+bb'=b \\ ca'+cc'=c \\ cb'+dd'=d \end{cases}$ qui est équivalent aux deux systèmes : $\begin{cases} aa'+bc'=a \\ ca'+cc'=c \end{cases}$ et $\begin{cases} ab'+bd'=b \\ cb'+dd'=d \end{cases}$.

$\begin{cases} aa'+bc'=a \\ ca'+cc'=c \end{cases}$ équivaut à $\begin{cases} aca'+bcc'=ac \\ aca'+acc'=ac \end{cases}$ Par différence, il vient : $(bc - ac)c' = 0$,

Une solution possible : $c' = 0$, puis : $a' = 1$

$\begin{cases} ab'+bd'=b \\ cb'+dd'=d \end{cases}$ équivaut à $\begin{cases} acb'+bcd'=bc \\ acb'+add'=ad \end{cases}$ Par différence, il vient : $(bc - ad)d' = bc - ad$.

Une solution possible : $d' = 1$, puis : $b' = 0$.

Calculons : $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a\times 1+b\times 0 & a\times 0+b\times 1 \\ c\times 1+d\times 0 & c\times 0+d\times 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

et $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\times a+0\times c & 1\times b+0\times d \\ 0\times a+1\times c & 0\times b+1\times d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

Propriété :

Soit A une matrice carrée d'ordre n et I_n la matrice identité d'ordre n.

On a : $A\times I_n = I_n\times A = A$.

II-5-5- Attention .... Prudence : la multiplication matricielle n'est pas commutative

$AB \neq BA$.

Exercice :

Calculer le produit AB avec $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

III- Inverse d'une matrice carré, résolution de systèmes linéaires

III-1- Présentation de la recherche

Le paragraphe sera illustré avec un système linéaire de trois équations à trois inconnues (x ; y ; z), mais la recherche est placée dans le cadre général.

Un rappel :

$(a, b, c) \neq 0$, $ax + by + cz + d = 0$ est une équation de plan dans l'espace de vecteur normal $\vec{n}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$.

Soit n inconnues notées $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

Un système linéaire de n équations à n inconnues peut s'écrire $\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$ où les coefficients a_{ij} pour $1 \leqslant i \leqslant n$ et $1 \leqslant j \leqslant n$ sont des réels, ainsi que les nombres b_k pour $1 \leqslant k \leqslant n$.

En notant A, X, B les matrices suivantes :

$A = \begin{pmatrix} a_{11} & & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ & & . & \\ & & . & \\ & & . & \\ a_{n1} & & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ . \\ . \\ . \\ x_n \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ . \\ . \\ . \\ b_n \end{pmatrix}$, le système s'écrit : $AX = B$.

Supposons qu'il existe une matrice A' telle que $A' \times A = I_n$ (matrice identité d'ordre n), le système admet une et une seule solution : $A' \times B$.

Exemples :

1) soit le système $\begin{cases} 2x + 3y - z = 1 \\ -x + y + z = -1 \\ 3x - y + 2z = 2 \end{cases}$ $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & 2 \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

À la calculatrice, entrer la matrice A, la matrice B et faire $A^{-1} \times B$ et vérifier que la matrice S obtenue est bien solution du système.

$$S = \begin{pmatrix} \frac{16}{23} \\ -\frac{4}{23} \\ -\frac{3}{23} \end{pmatrix}$$

Vérification : $2 \times \frac{16}{23} + 3 \times \left(\frac{-4}{23}\right) - \left(\frac{-3}{23}\right) = \frac{32 - 12 + 3}{23} = 1$

$-1 \times \frac{16}{23} + 1 \times \left(\frac{-4}{23}\right) + \left(\frac{-3}{23}\right) = \frac{-16 - 4 - 3}{23} = -1$

$$3\times\frac{16}{23}-1\times\left(\frac{-4}{23}\right)+2\left(\frac{-3}{23}\right)=\frac{48+4-6}{23}=2$$

Géométriquement, que représente S ?

2) soit les systèmes : (1) $\begin{cases} x+y-z=1 \\ 2x+2y-2z=2 \\ -x+y+z=1 \end{cases}$ et (2) $\begin{cases} x+y-z=1 \\ 2x+2y-2z=1 \\ x+y+z=1 \end{cases}$.

Écrire les systèmes (1) et (2) sous la forme $A\times X=B$

que se passe-t-il lorsqu'on fait à la calculatrice $A^{-1}\times B$?

Résoudre " à la main " les systèmes (1) et (2) et les interpréter géométriquement.

III-2- Matrice inverse d'une matrice carrée

III-2-1- Matrice inversible

Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2.

Définition

Une matrice carrée A d'ordre n est dite inversible (ou régulière) lorsqu'il existe une matrice carrée A' d'ordre n telle que $AA'=I_n$ et $A'A=I_n$ où I_n est la matrice identité d'ordre n.

Propriétés (la première est admise)

1) S'il existe une matrice A' telle que l'une des égalités $AA'=I_n$ ou $A'A=I_n$ est vraie alors l'autre est vraie.

(Il suffit donc d'une seule des égalités pour prouver qu'une matrice est inversible.)

2) **unicité de l'inverse**

Si une matrice A est inversible alors la matrice A' telle que $AA'=I_n$ est unique.

Preuve de l'unicité :

A est une matrice carrée d'ordre n.

I_n est la matrice identité d'ordre n.

On suppose qu'il existe deux matrices B et B' d'ordre n telles que $AB=BA=I_n$ et $AB'=B'A=I_n$

Calculons $(B'A)B$ et $B'(AB)$.

$(B'A)B=I_n B=B$ et t $B'(AB)=B'I_n=B'$

Or, d'après l'associativité de la multiplication des matrices : $(B'A)B=B'(AB)$.

Conclusion : $B=B'$

Définition et notation.

Soit A est une matrice carrée d'ordre n inversible.

La matrice A' telle que $AA'=I_n$ est appelée la matrice inverse de A, et est notée A^{-1}.

III-2-2- Matrice inverse d'une matrice carrée d'ordre 2 ; déterminant d'une matrice

La recherche

Soit $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ une matrice carrée d'ordre 2.

On cherche les conditions d'existence et si elle existe comment déterminer une matrice carrée $A'\begin{pmatrix} t & x \\ y & z \end{pmatrix}$ telle que $AA'=I_2$. (1).

Montrer que (1) équivaut au système : $\begin{cases} at+by=1 \\ ax+bz=0 \\ ct+dy=0 \\ cx+dz=1 \end{cases}$

On a alors deux systèmes (l'un d'inconnues t et y, l'autre d'inconnues x et z).

$\begin{cases} at+by=1 \\ ct+dy=0 \end{cases}$ et $\begin{cases} ax+bz=0 \\ cx+dz=1 \end{cases}$

Rappels sur la résolution des systèmes à deux inconnues :

Dans le plan muni d'un repère orthonormal, l'ensemble des points $M(t\,;\,y)$ vérifiant une équation linéaire : $mt + py + q = 0$ est une droite de vecteur directeur $\vec{u}\begin{pmatrix} -p \\ m \end{pmatrix}$ (ou de vecteur normal $\vec{n}\begin{pmatrix} m \\ p \end{pmatrix}$.

L'intersection de deux droites est réduite à un et un seul point (droites sécantes) si et seulement si leurs vecteurs directeurs $\vec{u_1}\begin{pmatrix} -p_1 \\ m_1 \end{pmatrix}$ et $\vec{u_2}\begin{pmatrix} -p_2 \\ m_2 \end{pmatrix}$ (ou leurs vecteurs normaux $\vec{n_1}\begin{pmatrix} m_1 \\ p_1 \end{pmatrix}$ et $\vec{n_2}\begin{pmatrix} m_2 \\ p_2 \end{pmatrix}$) ne sont pas colinéaires.

Cette condition (non colinéarité) est vérifiée lorsque les coordonnées ne sont pas proportionnelles, soit : $m_1 p_2 - p_1 m_2 \neq 0$.

Le nombre $m_1 p_2 - p_1 m_2$ est appelé le déterminant des deux vecteurs.

Conclusion :

Les systèmes $\begin{cases} at+by=1 \\ ct+dy=0 \end{cases}$ et $\begin{cases} ax+bz=0 \\ cx+dz=1 \end{cases}$ ont une et une seule solution si et seulement si le nombre $d_{ét} = ad - bc$ est différent de 0.

Résolution des systèmes :

On multiplie la ligne 1 par d et la ligne 2 par b, et on fait la différence des deux lignes.

$\begin{cases} at+by=1 \\ ct+dy=0 \end{cases}$ et $\begin{cases} ax+bz=0 \\ cx+dz=1 \end{cases}$ sont équivalents à $\begin{cases} at+by=0 \\ adt+bdy-bct-bdy=d \end{cases}$ et $\begin{cases} ax+bz=0 \\ adx+bdz-bcx-bdz=-b \end{cases}$

Ce qui donne : $t = \dfrac{1}{d_{ét}}\, d$; $y = \dfrac{1}{d_{ét}}(-c)$ $\quad x = \dfrac{1}{d_{ét}}(-b)$ et $z = \dfrac{1}{d_{ét}}\, a$.

Propriété :

Une matrice carrée $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ d'ordre 2 est inversible si et seulement si son déterminant $ad - bc$ est différent de 0, et la matrice inverse est : $A^{-1} = \dfrac{1}{d_{ét}}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$

III-3- résolution d'un système linéaire

A étant une matrice carrée d'ordre n inversible.

Le système linéaire dont l'écriture matricielle est $AX = B$ a une et une seule solution $S = A^{-1}B$.

IV- Graphes et matrices

IV-1- Définitions :

Un graphe (non orienté) à n sommets est une suite finie de points distincts (M_1, M_2, …, M_n), appelés sommets, et d'arêtes, dont les extrémités sont des sommets.

Une chaîne de longueur p ⩾ 2 reliant M_i à M_j est une suite de $p + 1$ sommets (S_1 , S_2 , ... S_p, S_{p+1}) telle que S_1= M_i, S_{p+1} = M_j, et que, pour tout entier k compris entre 1 et p, il existe une arête reliant S_k à S_{k+1}.

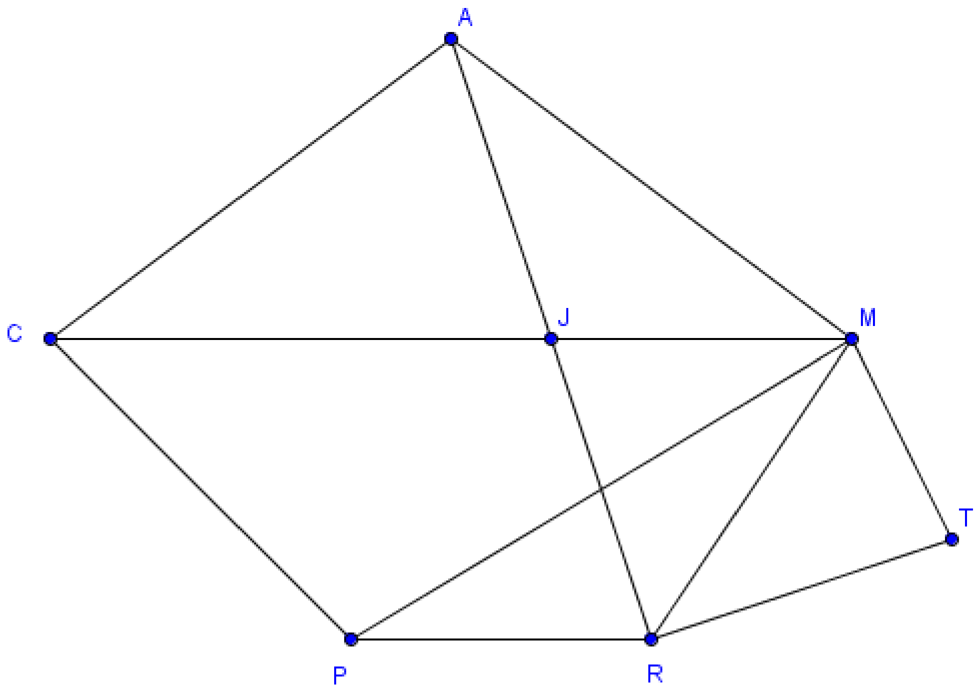
Un graphe est dit **connexe** quand, deux points quelconques étant donnés,il existe une chaîne qui les relie.

IV-2- Nombre de trajets

Dans la ville Touristeville, la société Touristour propose des circuits pour visiter les sept sites importants : l'abbatiale (*A*), la cathédrale (*C*), les jardins (*J*), le musée (*M*), le palais (*P*), les ruines antiques (*R*), la tour (*T*).

Le réseau routier est symbolisé par le graphe suivant. Les lieux sont les sommets du graphe et les routes sont les arêtes du graphe. (Il n'y a aucun sens unique).

Une chaîne de longueur *k* reliant deux sommets du graphe est un parcours entre deux monuments utilisant *k* arêtes (répétées ou non).



On associe à ce graphe une matrice carrée d'ordre 7 dont les coefficients indiquent le nombre d'arêtes reliant deux sommets.

Matrice adjacente au graphe :

arrivée départ	A	C	J	M	P	R	T
A	0	1	1	1	0	0	0
C	1	0	1	0	1	0	0
J	1	1	0	1	0	1	0
M	1	0	1	0	1	1	1
P	0	1	0	1	0	1	0
R	0	0	1	1	1	0	1
T	0	0	0	1	0	1	0

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

La matrice M² représente le nombre de chaînes de longueur 2.

Combien peut-on trouver de parcours de longueur 3 allant de T à P ?

Comment peut-on représenter les circuits par une matrice si les liaisons M vers P et T vers M sont à sens unique ?

Nouvelle matrice en cas de sens unique :

$$\begin{array}{c|c}
\text{départ} \backslash \text{arrivée} & \begin{array}{ccccccc} A & C & J & M & P & R & T \end{array} \\
\hline
\begin{array}{c} A \\ C \\ J \\ M \\ P \\ R \\ T \end{array} & \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}
\end{array}$$

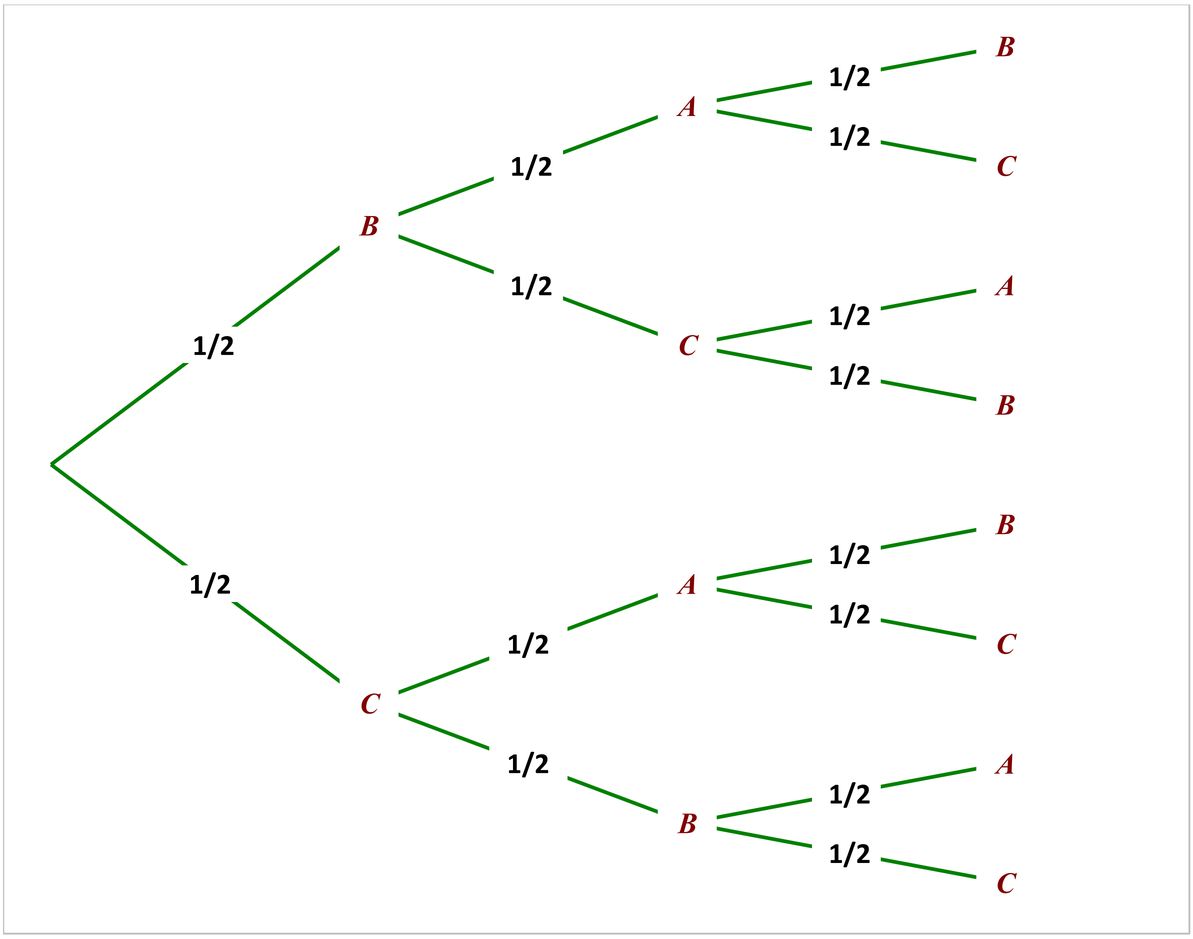
IV- 3- Promenade aléatoire sur un triangle équilatéral

Une fourmi se déplace sur les côtés d'un triangle équilatéral ABC. À chaque sommet, elle va vers l'un des deux autres sommets avec la même probabilité. On suppose que la fourmi part de A et qu'elle met trois secondes pour un trajet entre deux sommets.

Quelle est la probabilité au millième près de revenir en A au bout de 30 secondes ?

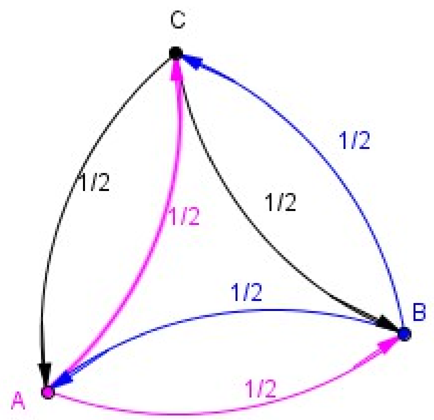
Cette situation peut se représenter par un arbre, par un graphe ou par une matrice.

Arbre (parcours avec trois trajets)



Graphe probabiliste :

Les points A, B et C sont les sommets du graphe et les côtés parcourus dans un sens ou dans l'autre sont les arêtes du graphe. Les probabilités sont inscrites sur l'arête.



Matrice de transition :

Les coefficients de la matrice sont les probabilités inscrites précédemment :

départ ↗ Arrivée	A	B	C
A	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
B	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$
C	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0

$$M = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$$

En numérotant les sommets A, B et C respectivement 1, 2 et 3, un coefficient a_{ij} de la matrice M pour $1 \leqslant i \leqslant 3$ et $1 \leqslant j \leqslant 3$ représente la probabilité d'aller du sommet n°i au sommet n°j.

Soit b_{ij} les coefficients de la matrice M^2.

$b_{ij} = a_{i1} \times a_{1j} + a_{i2} \times a_{2j} + a_{i3} \times a_{3j}$ probabilité d'aller du sommet n°i au sommet n°j en deux trajets.

(***Voir probabilité totale*** :

P(i à j en deux trajets) = P(i à 1)$\times$ P_1 (1 à j) + P(i à 2)$\times$ P_2 (2 à j) + P(i à 3)$\times$ P_3 (3 à j))

Par récurrence, on montre que les coefficients de la matrice M^n sont les probabilités d'aller d'un sommet n°i à un sommet n°j en n trajets.

Calcul de M^{10} : La calculatrice donne $\begin{pmatrix} 0{,}333 & 0{,}33 & 0{,}333 \\ 0{,}333 & 0{,}33 & 0{,}333 \\ 0{,}333 & 0{,}33 & 0{,}333 \end{pmatrix}$.

La probabilité de revenir en A en 30 secondes est d'environ 0,333

IV-4- Saut de puce : matrice de transition d'une marche aléatoire

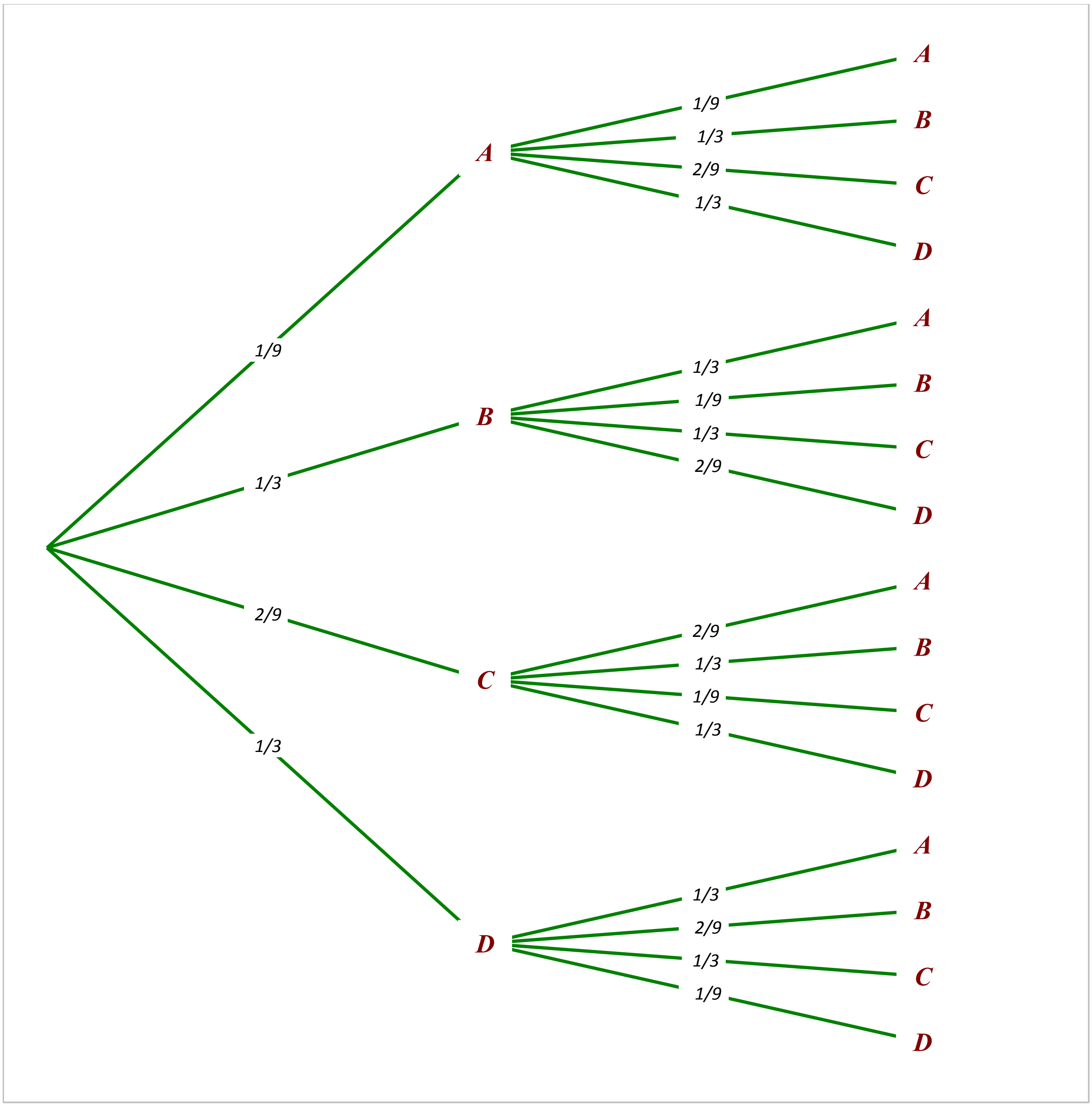
Une puce se déplace de façon aléatoire sur les quatre sommets d'un carré. À partir d'un sommet, elle peut sauter sur un des trois autres sommets suivant les probabilités suivantes : la puce saute sur place avec une probabilité égale à p, si le sommet est le sommet opposé, la probabilité est $2p$, si le sommet est un des sommets consécutifs, la probabilité est $3p$.

Elle part de A. Quelle est la probabilité à 10^{-2} près de revenir en A au bout de 15 sauts ?

On peut représenter cette situation par un arbre de probabilité, par un graphe, ou par une matrice.

On a : $p + 2\times3p + 2p = 1$, d'où, $p = \frac{1}{9}$.

Arbre (deux sauts)



La probabilité $P(A_2)$ d'être en A après deux sauts est :

$$P(A_2) = \frac{1}{9}\times\frac{1}{9} + \frac{1}{3}\times\frac{1}{3} + \frac{2}{9}\times\frac{2}{9} + \frac{1}{3}\times\frac{1}{3} = \frac{1+9+4+9}{81} = \frac{23}{81}.$$

Complément :

Probabilité d'être en B après deux sauts :

$$P(B_2) = \frac{1}{9}\times\frac{1}{3} + \frac{1}{3}\times\frac{1}{9} + \frac{2}{9}\times\frac{1}{3} + \frac{1}{3}\times\frac{2}{9} = \frac{6}{27} = \frac{2}{9}$$

Probabilité d'être en C après deux sauts :

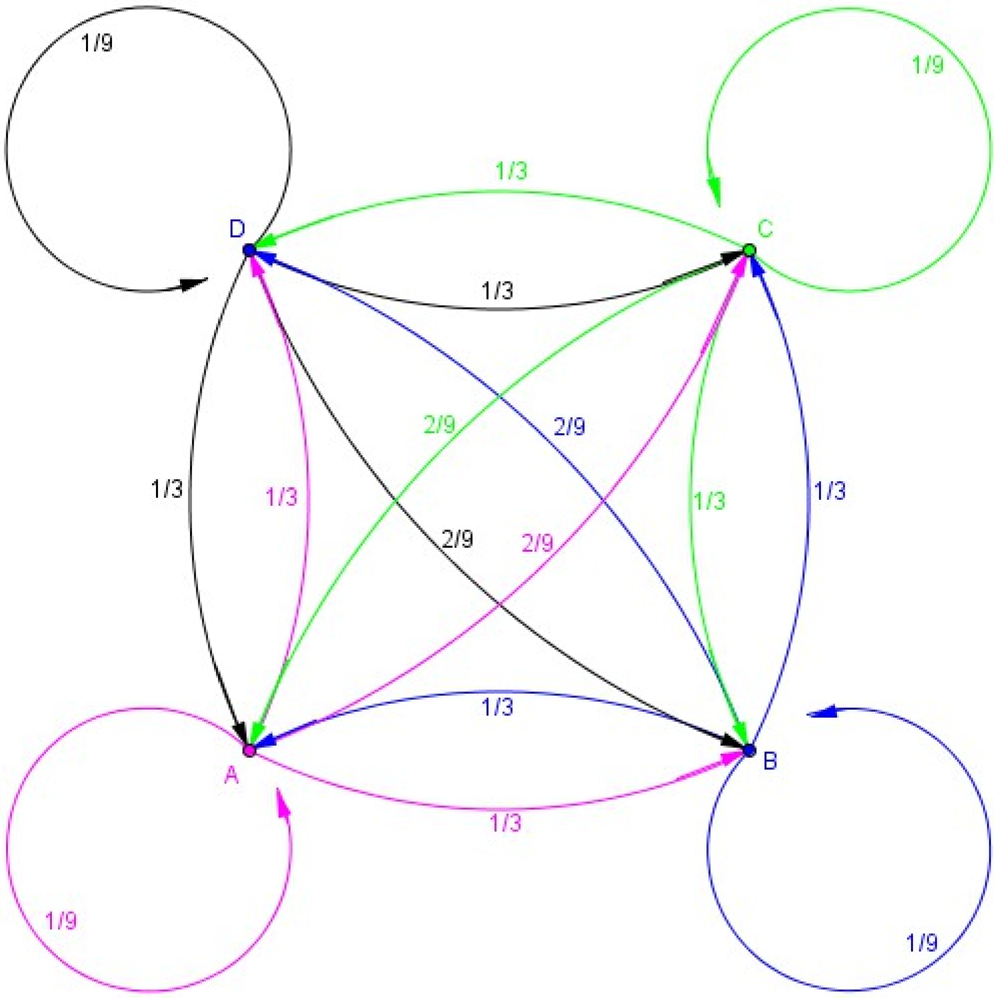
$$P(C_2) = \frac{1}{9}\times\frac{2}{9} + \frac{1}{3}\times\frac{1}{3} + \frac{2}{9}\times\frac{1}{9} + \frac{1}{3}\times\frac{1}{3} = \frac{22}{81}$$

Probabilité d'être en D après deux sauts :

$\mathrm{P}(D_2) = \frac{1}{9}\times\frac{1}{3} + \frac{1}{3}\times\frac{2}{9} + \frac{2}{9}\times\frac{1}{3} + \frac{1}{3}\times\frac{1}{9} = \frac{6}{27} = \frac{2}{9}$

On a bien : $\frac{23}{81} + \frac{2}{9} + \frac{22}{81} + \frac{2}{9} = \frac{23+18+22+18}{81} = \frac{81}{81} = 1$

Graphe probabiliste :



Matrice de transition :

$$\begin{array}{c|c} \text{départ} \nearrow \text{arrivée} & \begin{matrix} \text{A} & \text{B} & \text{C} & \text{D} \end{matrix} \\ \hline \begin{matrix} \text{A} \\ \text{B} \\ \text{C} \\ \text{D} \end{matrix} & \begin{pmatrix} \frac{1}{9} & \frac{1}{3} & \frac{2}{9} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{9} & \frac{1}{3} & \frac{2}{9} \\ \frac{2}{9} & \frac{1}{3} & \frac{1}{9} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{9} & \frac{1}{3} & \frac{1}{9} \end{pmatrix} \end{array}$$

$$M = \begin{pmatrix} \frac{1}{9} & \frac{1}{3} & \frac{2}{9} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{9} & \frac{1}{3} & \frac{2}{9} \\ \frac{2}{9} & \frac{1}{3} & \frac{1}{9} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{9} & \frac{1}{3} & \frac{1}{9} \end{pmatrix}$$

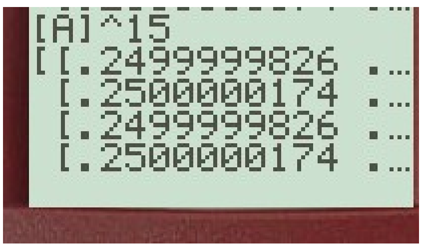
La matrice M^2 donne la probabilité d'être en un des sommets après deux sauts à partir d'un des sommets

À la calculatrice : $M^2 = \begin{pmatrix} \frac{23}{81} & \frac{2}{9} & \frac{22}{81} & \frac{2}{9} \\ \frac{2}{9} & \frac{23}{81} & \frac{2}{9} & \frac{22}{81} \\ \frac{22}{81} & \frac{2}{9} & \frac{23}{81} & \frac{2}{9} \\ \frac{2}{9} & \frac{22}{81} & \frac{2}{9} & \frac{23}{81} \end{pmatrix}$

Après deux sauts

$$\begin{array}{c|c} \text{départ} \nearrow \text{arrivée} & \begin{matrix} \text{A} & \text{B} & \text{C} & \text{D} \end{matrix} \\ \hline \begin{matrix} \text{A} \\ \text{B} \\ \text{C} \\ \text{D} \end{matrix} & \begin{pmatrix} \frac{23}{81} & \frac{2}{9} & \frac{22}{81} & \frac{2}{9} \\ \frac{2}{9} & \frac{23}{81} & \frac{2}{9} & \frac{22}{81} \\ \frac{22}{81} & \frac{2}{9} & \frac{23}{81} & \frac{2}{9} \\ \frac{2}{9} & \frac{22}{81} & \frac{2}{9} & \frac{23}{81} \end{pmatrix} \end{array}$$

Après 15 sauts, en calculant M^{15} :



La probabilité à 10^{-2} près est 0,25 de se retrouver en A pour la puce.

V- Puissances d'une matrice

Comme nous venons de voir dans le paragraphe précédent, certaines situations nous amènent à calculer des puissances de matrices.

Pour calculer les puissances, certaines formes de matrices (matrice diagonale, matrice triangulaire, ...) permettent des calculs plus avantageux ;

V-1- Matrices diagonales

Une matrice diagonale D est une **matrice carrée** dont tous les coefficients en dehors de la diagonale principale sont nuls.

Exemple : $D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ est une matrice diagonale d'ordre 4.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la matrice D^n s'obtient en élevant les éléments de la diagonale à la puissance n.

Exemple : $D^n = \begin{pmatrix} 2^n & 0 & 0 & 0 \\ 0 & (-1)^n & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3^n \end{pmatrix}$

Preuve : (par récurrence)

$$D = \begin{pmatrix} a_{11} & & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & \dots & 0 \\ & & . & \\ & & . & \\ & & . & \\ 0 & & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Un élément d_{ij} de D^2 est de la forme $\sum_{k=1}^{k=n} a_{ik} \times a_{kj}$ avec $a_{ik} = 0$ et $a_{kj} = 0$ lorsque $i \neq k$ et $j \neq k$.

Les éléments non nuls sont les éléments $d_{ii} = a_{ii} \times a_{ii} = a_{ii}^2$.

Soit un entier k tel que $D^k = \begin{pmatrix} a_{11}^k & & \dots & 0 \\ 0 & a_{22}^k & \dots & 0 \\ & & . & \\ & & . & \\ & & . & \\ 0 & & \dots & a_{nn}^k \end{pmatrix}$,

les éléments p_{ij} de $D^{k+1} = D^k \times D$ sont de la forme $\sum_{l=1}^{l=n} a_{il}^k \times a_{lj}$ avec $a_{il} = 0$ et $a_{lj} = 0$ lorsque $i \neq l$ et $j \neq l$.

Les éléments non nuls sont les éléments $p_{ii} = a_{ii}^k \times a_{ii} = a_{ii}^{k+1}$.

V-2- Matrices triangulaires

Une matrice triangulaire supérieure T (resp. inférieure) est une **matrice carrée** dont tous les termes en-dessous (resp. au-dessus) de la diagonale sont nulles.

Elle est dite strictement triangulaire lorsque les termes de la diagonale sont nulles.

Exemples : $T_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ est une matrice triangulaire supérieure d'ordre 4

$T_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ est une matrice triangulaire strictement supérieure d'ordre 4.

La puissance n-ième d'une matrice triangulaire est une matrice triangulaire.

Propriété :

Si T est une matrice strictement triangulaire d'ordre n alors toutes ses puissances à partir de n sont nulles.

Exemple : $T_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$,

$$T_2^2 = \begin{pmatrix} 0\times0+1\times0-2\times0+1\times0 & 0\times1+1\times0-2\times0+1\times0 & 0\times(-2)+1\times(-1)-2\times0+1\times0 & 0\times1+1\times3-2\times3+1\times0 \\ 0\times0+0\times0-1\times0+3\times0 & 0\times1+0\times0-1\times0+3\times0 & 0\times(-2)+0\times(-1)-1\times0+3\times0 & 0\times1+0\times3-1\times3+3\times0 \\ 0\times0+0\times0+0\times0+3\times0 & 0\times1+0\times0+0\times0+3\times0 & 0\times(-2)+0\times(-1)+0\times0+3\times0 & 0\times1+0\times3+0\times3+3\times0 \\ 0\times0+0\times0+0\times0+0\times0 & 0\times1+0\times0+0\times0+0\times0 & 0\times(-2)+0\times(-1)+0\times0+0\times0 & 0\times1+0\times3+0\times3+0\times0 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$T_2^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } T_2^4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 0_4$$

V-3- Les matrices « creuses » ; calculs par blocs

D'une façon générale, les matrices « creuses», celles dont beaucoup de coefficients sont nuls, sont recherchées, car cette particularité permet de gagner du temps de calcul machine. Ce gain de temps est aussi dû à la possibilité de réaliser des produits de matrices « par blocs ».

Considérons les matrices : $A = \begin{pmatrix} 2 & 7 & 8 & -4 \\ 11 & 0 & -5 & 0 \\ 0 & 4 & 3 & 9 \\ -1 & 7 & 2 & -8 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 7 & 8 & 3 \\ 0 & -2 & -5 & 0 \\ 0 & 4 & 2 & 11 \\ 1 & -5 & 7 & 2 \end{pmatrix}$

Les blocs de couleur font apparaître des matrices :

$$A_{11} = \begin{pmatrix} 2 & 7 \\ 11 & 0 \end{pmatrix},\ A_{12} = \begin{pmatrix} 8 & -4 \\ -5 & 0 \end{pmatrix},\ A_{21} = \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ -1 & 7 \end{pmatrix},\ A_{22} = \begin{pmatrix} 3 & 9 \\ 2 & -8 \end{pmatrix}$$

et $B_{11} = \begin{pmatrix} 1 & 7 \\ 0 & -2 \end{pmatrix},\ B_{12} = \begin{pmatrix} 8 & 3 \\ -5 & 0 \end{pmatrix},\ B_{21} = \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 1 & -5 \end{pmatrix},\ B_{22} = \begin{pmatrix} 2 & 11 \\ 7 & 2 \end{pmatrix}$

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{pmatrix}$$

Les produits envisagés ayant tous un sens (il y a compatibilité entre les tailles des matrices à multiplier à chaque étape), on souhaite écrire que :

$$AB = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{11}\times B_{11} + A_{12}\times B_{21} & A_{11}\times B_{12} + A_{12}\times B_{22} \\ A_{21}\times B_{11} + A_{22}\times B_{21} & A_{21}\times B_{12} + A_{22}\times B_{22} \end{pmatrix}$$

Et, constatant que les sommes de produits de matrices sont elles aussi réalisables :

$$AB = \begin{pmatrix} -2 & 52 & -31 & 86 \\ 11 & 57 & 78 & -22 \\ 9 & -41 & 49 & 51 \\ -9 & 27 & -95 & 3 \end{pmatrix}$$

Applications :

En écrivant une matrice comme somme d'une matrice diagonale et d'une matrice triangulaire, il est possible d'avoir un gain de calculs ...

Exemple sans intérêt particulier si ce n'est de réfléchir aux calculs non commutatifs.

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = D + T \text{ avec } D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \text{ et } T = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$M^2 = (D + T)(D + T) = D^2 + DT + TD + T^2$ (Attention : $DT \neq TD$)

$$D^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix},\ DT = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},\ TD = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},\ T^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$M^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 & 5 \\ 0 & 4 & 4 & -3 \\ 0 & 0 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

$M^3 = (D + T)^2(D + T) = (D^2 + DT + TD + T^2)(D + T) = D^3 + D^2T + DTD + DT^2 + TD^2 + TDT + T^2D + T^3$

$D^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 8 \end{pmatrix}$, $D^2T = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 4 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $DTD = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 4 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $DT^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$TD^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -4 & 8 \\ 0 & 0 & 4 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $TDT = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $T^2D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $T^3 = 0_4$

$M^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -7 & 9 \\ 0 & 8 & 12 & -6 \\ 0 & 0 & 8 & 12 \\ 0 & 0 & 0 & 8 \end{pmatrix}$

V-4- Diagonalisation éventuelle d'une matrice carrée d'ordre 2

Définition :

On dit qu'une **matrice carrée** A est diagonalisable s'il existe une matrice carrée P inversible et une matrice diagonale D telles que : $A = P \times D \times P^{-1}$

Conséquence :

$A^2 = (P \times D \times P^{-1})(P \times D \times P^{-1}) = P \times D^2 \times P^{-1}$

et par récurrence : $A^n = P \times D^n \times P^{-1}$

Comme D est une matrice diagonale, la puissance n-ième de D s'obtient en élevant les éléments de la diagonale à la puissance n. *(ce qui facilite considérablement les calculs).*

Recherche d'une condition nécessaire et suffisante pour que la matrice A d'ordre 2 soit diagonalisable.

On note : $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$, $P = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}$

P étant inversible, on sait $ad - bc \neq 0$.

L'égalité $A = P \times D \times P^{-1}$ est équivalente à l'égalité $A \times P = P \times D$ qui donne:

$$\begin{pmatrix} a_{11} \times a + a_{12} \times c & a_{11} \times b + a_{12} \times d \\ a_{21} \times a + a_{22} \times c & a_{21} \times b + a_{22} \times d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a\alpha & b\beta \\ c\alpha & d\beta \end{pmatrix}$$

$\begin{pmatrix} a\alpha & b\beta \\ c\alpha & d\beta \end{pmatrix}$ peut s'écrire sous la forme $\alpha \begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix}$

Considérons les deux vecteurs (matrices colonnes) $V \begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix}$ et $W \begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix}$.

Ces deux vecteurs ne sont pas colinéaires puisque le déterminant $ad - bc \neq 0$.
Leurs coordonnées ne sont pas proportionnelles.

$AV = \begin{pmatrix} a_{11} \times a + a_{12} \times c \\ a_{21} \times a + a_{22} \times c \end{pmatrix}$ et $AW = \begin{pmatrix} a_{11} \times b + a_{12} \times d \\ a_{21} \times b + a_{22} \times d \end{pmatrix}$.

Finalement : l'égalité $A \times P = P \times D$ est équivalente à $\begin{cases} AV = \alpha V \\ AW = \beta W \end{cases}$

En conclusion, on peut énoncer la condition nécessaire et suffisante suivante :

Une matrice carrée A d'ordre 2 (à coefficients réels) est diagonalisable si et seulement s'il existe deux réels α et β et deux matrices colonnes à coefficients réels non proportionnelles V et W telles que $AV = \alpha V$ et $AW = \beta W$.

Les réels α et β(s'ils existent) s'appellent **les valeurs propres** de la matrice A.

Remarque :

Petit exercice de calcul :

Diagonaliser la matrice $M = \begin{pmatrix} 5 & -3 \\ 6 & -4 \end{pmatrix}$

On cherche α (et en même temps β car les systèmes mènent aux mêmes équations du second degré)

On a : $\begin{cases} 5a-3c=\alpha a \\ 6a-4c=\alpha c \end{cases}$ équivaut à $\begin{cases} (5-\alpha)a-3c=0 \\ 6a+(-4-\alpha)c=0 \end{cases}$ (Ce qui revient à $M - \alpha I_2 = 0$)

En multipliant la première ligne par 6 et la seconde par $(5 - \alpha)$ et en faisant la différence, on obtient :

$\begin{cases} 6(5-\alpha)a-18c=0 \\ 6(5-\alpha)+(-4-\alpha)(5-\alpha)c=0 \end{cases}$, puis : $\alpha^2 - \alpha - 2 = 0$ (Ce qui revient au déterminant de $M - \alpha I_2$)

La résolution de cette équation donne deux valeurs propres $\alpha = -1$ et $\beta = 2$.

On a donc : $6a - 3c = 0$. Prenons $a = 1$ et $c = 2$

Pour b et d, on a : $\begin{cases} 5b-3d=\beta b \\ 6b-4d=\beta d \end{cases}$ avec $\beta = 2$, il vient : $3b - 3d = 0$ Prenons $b = 1$ et $d = 1$

$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ On peut vérifier : $PDP^{-1} = M$.

Les matrices carrées d'ordre 2 ne sont pas toutes diagonalisables.

$J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ n'est pas diagonalisable.

L'équation du second degré est : $\text{dét}(J - \alpha I_2) = 0$, soit : $\alpha^2 + 1 = 0$ qui n'a aucune solution réelle.

$K = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -4 & 2 \end{pmatrix}$ n'est pas diagonalisable.

L'équation du second degré est $\text{dét}(K - \alpha I_2) = 0$, soit : $(-2 - \alpha)((2 - \alpha) + 4 = 0$, d'où, $\alpha^2 = 0$.

(Si $\alpha = \beta = 0$ alors $K = 0$ (contradiction))

VI-Graphes probabilistes et matrices de transition

VI-1- Définitions :

VI-1-1- Graphe probabiliste

Un graphe probabiliste est une graphe orienté pondéré tel que la somme des poids des arêtes issues de chaque sommet vaut 1

Voir exemples au §IV/

VI-1-2 Matrice de transition

La matrice associé à ce graphe est la matrice de transition.

Le coefficient a_{ij} est égal à la probabilité d'arriver au sommet *j* sachant qu'on part de *i*.

Tous les coefficients sont compris entre 0 et 1.

la somme des coefficients d'une ligne vaut 1.

(Poids de l'arête $i \rightarrow j$) (Si l'arête ($i \rightarrow j$) n'existe pas, $a_{ij} = 0$).

Voir exemples au §IV/

VI-2- Propriétés :

VI-2-1- État probabiliste.

Soit M la matrice de transition d'un graphe probabiliste.

P_n est la matrice ligne décrivant l'état probabiliste à l'étape *n*.

P_0 est la matrice ligne décrivant l'état initial.

On a alors $P_n = P_0 \times M^n$

La démonstration se fait par récurrence (voir les exercices et activités)

VI-2-2- État stable .

VI-2-2-1- Définition

L'état stable est une matrice P à coefficients positifs dont la somme vaut 1 et vérifiant $P = P \times M$.

VI-2-2-2- Propriété.

Soit une matrice de transition M d'ordre 2 telle qu'aucun de ses coefficients n'est nul.

$M = \begin{pmatrix} 1-p & p \\ q & 1-q \end{pmatrix}$ avec $(p\ ;\ q) \neq (0\ ;\ 0)$ et $(p\ ;\ q) \neq (1\ ;\ 1)$

1) Il existe un état stable et un seul $P = \left(\dfrac{q}{p+q} \quad \dfrac{p}{p+q} \right)$.

2) Quel que soit l'état initial P_0, la suite (P_n) converge vers P.

Voir exercices et activités :

Ne pas oublier qu'on est amené à résoudre l'équation matricielle $X \times M = X$

En posant $X = (x \quad y)$, on a : $(1-p)x + qy = x$ et $px + (1-q)y = y$ qui sont deux équations équivalentes.

Elles se ramènent à $px - qy = 0$.

On a donc : $\begin{cases} px - qy = 0 \\ x + y = 1 \end{cases}$ qui équivaut à l'équation matricielle $X \times A = B$ avec $A = \begin{pmatrix} p & 1 \\ -q & 1 \end{pmatrix}$ et $B = (0 \quad 1)$

D'après les hypothèses, le dét(A) $= p + q$ est non nul et la solution unique $P = B \times A^{-1}$

$A^{-1} = \dfrac{1}{p+q} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ q & p \end{pmatrix}$ et $P = \dfrac{1}{p+q} (0 \quad 1) \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ q & p \end{pmatrix} = \dfrac{1}{p+q} (q \quad p) = \left(\dfrac{q}{p+q} \quad \dfrac{p}{p+q} \right)$.

VII- Suite de matrices : $U_{n+1} = AU_n + B$

VII-1- Conditions et méthode

Les données

$U_{n+1} = AU_n + B$ où (U_n) est une suite de matrices colonnes (format : $p\times1$), A est une matrice carrée (format $p\times p$) et B une matrice colonne (format : $p\times1$).

$$U_n = \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \\ \cdots \\ z_n \end{pmatrix} \ (p \text{ lignes}), \qquad A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2p} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{p1} & a_{p2} & \cdots & a_{pp} \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \cdots \\ b_p \end{pmatrix}$$

$U_0 = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ \cdots \\ z_0 \end{pmatrix}$ est donnée et la matrice $I_p - A$ est inversible.

On traduit ainsi, en écriture matricielle, un système où apparaissent p suites … (voir les exercices traités)

le traitement

* Soit C l'unique solution de l'équation $C = AC + B$
L'existence et l'unicité de C est assurée car $I_p - A$ est inversible.
$C = AC + B \Leftrightarrow (I_p - A)C = B \Leftrightarrow C = (I_p - A)^{-1}B$.
** On pose $X_n = U_n - C$.
On montre alors que, pour tout $n\in\mathbb{N}$, $X_{n+1} = A X_n$, puis, $X_n = A^n X_0$.

Preuve :
$X_{n+1} = U_{n+1} - C = AU_n + B - C$ Or, $U_n = X_n + C$, d'où, $X_{n+1} = A(X_n + C) + B - C$
En développant, et, en se rappelant que C vérifie l'égalité $C = AC + B$,
on a : $X_{n+1} = A(X_n + C) - B - C = A X_n + AC + B - C = A X_n$ puisque $AC + B - C = 0_p$ (matrice nulle)

Par récurrence, il vient de façon évidente : $X_n = A^n X_0$.
*** Finalement :
Comme $U_n = X_n + C$ et $X_n = A^n X_0$,
$U_n = A^n X_0 + C$ avec $X_0 = U_0 - C$.

Remarques :
1) Si (U_n) est une suite de matrices lignes de format $1\times p$, la démarche est identique avec $U_{n+1} = U_n A + B$
$C = CA + B$ et $U_n = X_0 A^n + C$.
2) Pour l'étude de A^n voir les § précédents et les activités.

VII-2- Convergence

La suite (U_n) de format $p\times1$ converge vers une matrice L de format $p\times1$ signifie que les suites formées par chaque coefficient de (U_n) convergent vers les coefficients de même rang de la matrice L.

Exemple :

$$U_n = \begin{pmatrix} 3\times\left(\frac{1}{2}\right)^n \\ 5-(0{,}2)^n \\ \ln\left(\frac{n}{n+1}\right) \end{pmatrix}.$$

Comme $0 < \frac{1}{2} < 1$ et $0 < 0{,}2 < 1$, les suites géométriques $\left(\frac{1}{2}\right)^n$ et $(0{,}2)^n$ convergent vers 0.

Comme $\frac{n}{n+1} = \frac{1}{1+\frac{1}{n}}$ tend vers 1 en $+\infty$ et que la fonctin ln est continue en 1, on a : $\lim\limits_{n\to+\infty} \ln\frac{n}{n+1} = \ln(1) = 0$

La suite (U_n) converge vers $\mathrm{L} = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix}$.

VII-3 Un exemple où (U_n) ne converge pas.

On donne $\mathrm{U}_{n+1} = \mathrm{A}\ \mathrm{U}_n + \mathrm{B}$ et I – A n'est pas inversible.

$\mathrm{U}_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \end{pmatrix}$, $\mathrm{U}_{n+1} = \mathrm{A}\ \mathrm{U}_n + \mathrm{B}$ où $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ et $\mathrm{B} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix}$

Calculs des premiers termes

$$\mathrm{U}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ -4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -8 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \end{pmatrix}.$$

$$\mathrm{U}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 \\ -3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Étude de I – A

$\mathrm{I} - \mathrm{A} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$. Comme le déterminant de I – A est : dét(I – A) = $0\times(-1) - 0\times0 = 0$, la matrice (I – A) n'est pas inversible.

Conséquence, l'équation X = AX + B n'a pas de solution.

Posons $\mathrm{X} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$, on veut : $\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix}$, ce qui donne : $\begin{cases} \alpha = \alpha + 3 \\ \beta = 2\beta + 5 \end{cases}$

Comme 0 = 3 est faux, il n'y a pas de solution.

Extraction des deux suites formées par les coefficients de (U_n).

Posons $\mathrm{U}_n = \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}$.

De l'égalité : $\mathrm{U}_{n+1} = \mathrm{A}\ \mathrm{U}_n + \mathrm{B}$, on tire $\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_n + 3 \\ 2y_n + 5 \end{pmatrix}$

La suite (x_n) définie par : $x_{n+1} = x_n + 3$ et $x_0 = 1$ est une suite arithmétique de raison 3, on a donc : $x_n = 1 + 3n$

La suite (y_n) définie par : $y_{n+1} = 2\ y_n + 5$ est une suite arithmético-géométrique …

Recherche de la solution de l'équation : $y = 2y + 5$, on trouve $y = -5$.

On pose $w_n = y_n - (-5) = y_n + 5$

la suite (w_n) est une suite géométrique :

$w_{n+1} = y_{n+1} + 5 = 2\ y_n + 5 + 5 = 2(\ y_n + 5) = 2\ w_n$,

d'où (w_n) est la suite géométrique de premier terme $w_0 = -4 + 5 = 1$ et de raison 2, d'où, $w_n = 1\times2^n = 2^n$

et $y_n = w_n - 5 = 2^n - 5$

Finalement : $\mathrm{U}_n = \begin{pmatrix} 1+3n \\ 2^n - 5 \end{pmatrix}$ La suite (U_n) ne converge pas.