Index

Petit aperçu sur les structures d'ensembles …

Les ingrédients :

- un ensemble E (*notion plus difficile qu'il n'y paraît …*) : intuitivement " une collection d'objets "

- des éléments *a*, *b*, …. (ce sont les " objets " qui appartiennent à cet ensemble)

ensemble des nombres entiers, ensemble des nombres complexes, ensemble des matrices carrées d'ordre 2, ensemble des fonctions dérivables, ensemble des points de l'espace à 3 dimensions, ensemble des vecteurs du plan, ensemble des classes de congruence modulo 3, ….

- des lois de composition interne : (lci)

on prend un couple d'éléments de E, et par une loi on les compose pour obtenir un élément de E.

Exemples : Par l'addition, on associe au couple d'entiers (5 ; 3) l'entier 8

Par construction du milieu, on associe au couple de points (A,B) le point milieu I de [AB]

Au couple $(\vec{u}, \vec{v})$ de vecteurs de l'espace , on associe un vecteur $\vec{w} = \vec{u} \wedge \vec{v}$ (produit vectoriel à ne pas confondre avec produit scalaire qui n'est pas une lci).

- des lois de composition externe :

Il faut un autre ensemble K, et à un couple de K×E, on associe un élément de E.

Exemple : Multiplication d'un vecteur par un réel (au couple (k, $\vec{u}$) on associe le vecteur $\vec{v} = k\,\vec{u}$.)

Multiplication d'une matrice par un réel …..

Du vocabulaire :

- commutatif : une lci * est commutative lorsque, pour tout a, tout b, $a*b = b*a$

- associatif : une lci * est associative lorsque, pour tout a, tout b, tout c, $(a*b)*c = a*(b*c)$

- élément neutre : une lci * possède un élément neutre e lorsque pour tout a, $a*e = e*a = a$.

(*e ne dépend pas du choix de a*)

- élément symétrique : un élément a possède un élément symétrique pour une lci * possédant un élément neutre lorsqu'il existe un élément b tel que $a*b = b*a = e$

- distributif : une lci * est distributive sur une lci + lorsque $k*(a + b) = k*a + k*b$

Les structures sur un ensemble muni de lci:

groupe

anneau

corps

(ce n'est pas exhaustif ….)

Dans ce tableau, XXXXX signifie que la propriété ne concerne pas la structure …..

On considère systématiquement la distributivité de la deuxième loi sur la première loi

Lorsqu'une loi additive est définie et possède un élément neutre (noté 0 par défaut), cet élément 0 est exclu de l'étude de la loi multiplicative.

structure / propriétés	groupe		anneau			corps		
les lois	une lci		deux lci			deux lci		
			+	×		+	×	
associativité	oui		oui	oui		oui	oui	
élément neutre	oui		oui (0)	oui (1)		oui (0)	oui (1)	
élément symétrique	oui		oui (opposé)	XXXXXX		oui (opposé)	oui (inverse)	
distributivité	XXXXXXXXXXXX		oui			oui		
commutativité	oui groupe commutatif	Non groupe non commutatif	oui	oui anneau commutatif	non anneau non commutatif	oui	oui corps commutatif	non corps non commutatif
Exemples	$(\mathbb{Z}, +)$		$(\mathbb{Z}, +, \times)$			$(\mathbb{Q}, +, \times)$, $(\mathbb{R}, +, \times)$, $(\mathbb{C}, +, \times)$		

Une structure sur un ensemble muni de lci et une lce:

Espace vectoriel E sur un corps K.

Il faut un corps K (voir supra)

une loi * de composition externe à gauche ((K×E) dans E)

une loi + de composition interne dans E telle que (E, +) est un groupe commutatif (voir supra)

(les éléments de K sont appelés scalaires, ceux de E sont appelés vecteurs).

Les propriétés :

Puisque (E, +) est un groupe commutatif, on a : la lci + est commutative, associative, possède un élément neutre, et, pour cette lci tout élément de E possède un opposé.

La lce * est distributive à gauche sur la lci + de E $k*(u + v) = k*u + k\times v$

et la lci * est distributive à droite sur la lci + de K $(k + k')*u = k*u + k'*u$

Il existe une " associativité " mixte, c'est-à-dire la multiplication dans K et la multiplication externe sont compatibles : $(k\times k')*u = k*(k'*u)$

L'élément neutre 1 de K est neutre à gauche pour la lce * : $1*u = u$.

Un exemple : L'ensemble des vecteurs du plan muni de la loi additive des vecteurs (relation de Chasles) et du produit d'un réel par un vceteur.

Quel intérêt ….

Quand on reconnaît la structure d'un ensemble muni d'opérations, on sait " calculer " dans cet ensemble ….