A la recherche d'une nouvelle fonction

Index

I- Activité 1 page 74.

Cette activité nous amène à la conclusion suivante: un phénomène *N (Remarque: en maths, N est une fonction)*, tel que $\frac{N(t+\Delta t)}{N(t)}$ est constant ou encore la vitesse d'évolution du phénomène est proportionnelle à la population à chaque instant, vérifie l'équation différentielle $N' = kN$.

Cours: Qu'est-ce qu'une équation différentielle

II- Recherche d'une fonction dérivable non nulle sur ℝ transformant une somme en produit.

On cherche donc $\begin{cases} f \text{ dérivable sur } \mathbb{R} \\ f(x+y) = f(x) \times f(y) \qquad (1) \\ f \text{ non nulle sur } \mathbb{R} \end{cases}$

(remarque: sur $\mathbb{Z}$, on connaît des fonctions (non dérivables évidemment) qui vérifient (1): $2^3 \times 2^5 = 2^{3+5}$ de façon générale $n \in \mathbb{Z}$ et $p \in \mathbb{Z}$ et $a \in \mathbb{R}^*$, on a: $a^n \times a^p = a^{n+p}$)

1) *f*(0) = 1

Montrer: $f(0) = 1$ (*Piste: faire y = 0 dans (1)*)

2) *f*(–x) = 1/*f* (x)

Montrer:

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) \neq 0$ et $f(-x) = \frac{1}{f(x)}$ *(Piste: faire y = –x dans (1))*

3) *f* > 0

Montrer:

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) > 0$ (ou encore: $f > 0$ sur ℝ) (*Piste: faire* $x = y = \frac{t}{2}$ *dans (1)*).

Commentaires (méthode): *Lorsqu'une relation est donnée pour toute valeur d'un ensemble numérique, penser à "regarder" quelques cas particuliers:*
notamment, 0 dans le cas d'une somme, 1 dans le cas d'un produit
un nombre et son opposé dans le cas d'une somme, un nombre et son inverse dans le cas d'un produit

A la recherche d'une nouvelle fonction

4) ($f(n)$) une suite géométrique

Soit $n \in \mathbb{N}$, on pose $u_n = f(n)$.
Montrer: la suite (u_n) est une suite géométrique.
Déterminer la raison et exprimer u_n en fonction de n. *(Piste: $u_{n+1} = \ldots$)*
(Cours: suite géométrique à revoir si nécessaire)

5) f est solution de l'équation différentielle $f' = kf$

Soit a un réel fixé.
On pose $g : x \mapsto f(x+a)$ et $h : x \mapsto f(x) \times f(a)$ g et h sont définies sur $\mathbb{R}$.
a) D'après l'égalité (1), que peut-on dire de g et h?
b) Calculer g' et h'. En déduire: $f'(a) = f'(0) \times f(a)$.
Conclusion: f est donc une solution de l'équation différentielle $f' = kf$

I- II- nous amènent donc à rechercher les solutions de cette équation différentielle et leurs propriétés.

III- Recherche d'une solution ϕ de l'équation différentielle $f' = f$ telle que $\phi(0) = 1$

1) Un raisonnement par l'absurde

ϕ n'est pas un polynôme. Pourquoi? (*Piste: comparer les degrés de P et P'*)
ϕ n'est pas une fonction rationnelle. Pourquoi? (*Piste: supposer* $\phi = \frac{P}{Q} \ldots$)
Commentaire: (logique et raisonnement):
Lorsqu'une implication (P) $\Rightarrow$ (Q) est vraie
l'implication **contraposée** (non Q) $\Rightarrow$ (non P) est vraie.
Raisonnement par l'absurde:
Lorsqu'une hypothèse (supposition) (P) amène (par des enchaînements logiques) une conclusion en contradiction avec les données, c'est que l'hypothèse (P) est fausse

2) Une approximation de la fonction

Construction par la méthode d'Euler d'une courbe approchant celle de ϕ sur un intervalle (voir activité au tableur).

3) Retour au II-

a) On pose $\psi(x) = \phi(a+b-x) \times \phi(x)$
Montrer que ψ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et déterminer ψ'.
En déduire que ψ est une fonction constante.
En calculant $\psi(0)$ et $\psi(b)$, conclure
b) En déduire que: $\phi(x) \neq 0$ et $\phi(-x) = \dfrac{1}{\phi(x)}$

Cours:
Les propriétés démontrées en II- et III- font partie du cours.