À rendre à la fin de l'heure:
Une feuille avec votre nom et le numéro de l'ordinateur (pour retrouver en cas de besoin la figure) sur laquelle vous aurez
- fait la figure (même à main levée).
- noté vos conjectures
- décrit la rotation utile et vos recherches prouvant les conjectures.

Ouvrir GeoGebra

Construire la figure suivante:

ABC triangle direct. *M* milieu de [*BC*]
ACE et *ADB* triangles rectangles isocèles en *A* et directs.

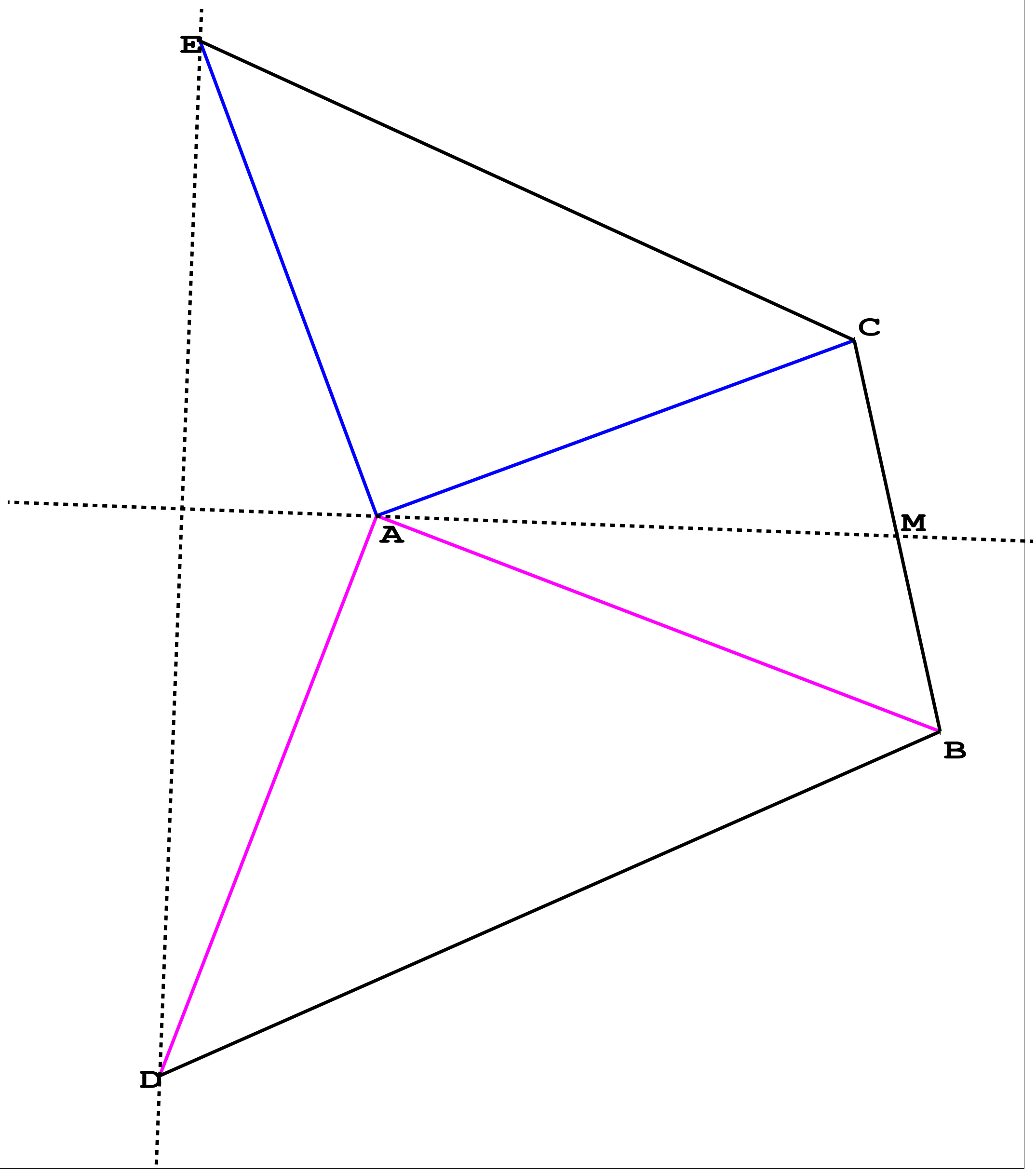
Déplacer les points *A*, *B* ou *C*.

Conjecturer sur les droites (*AM*) et (*ED*) et sur les longueurs des segments [*AM*] et [*ED*].

Démontrer en faisant intervenir une rotation.

Démontrer à l'aide des nombres complexes

Prouver que (AM) et (ED) sont perpendiculaires et que $AM = \dfrac{1}{2} ED$



Démonstration à l'aide d'une transformation:

Soit r la rotation de centre A et d'angle $\dfrac{\pi}{2}$

Déterminer les images des points A, D, C, B et M par r.
Montrer que A est le milieu de $[Dr(B)]$
En déduire la position relative de $(Ar(M)$ et (ED) et comparer les longueurs $Ar(M)$ et ED.
Conclure.

Démonstration à l'aide des nombres complexes:

Le plan est muni d'un repère orthonormal direct centré en A
On note b, c, d, e et m les affixes respectives des points B, C, D, E et M.

Justifier les égalités suivantes: $\left|\dfrac{e}{c}\right| = 1$ et $\arg\left(\dfrac{e}{c}\right) = \dfrac{\pi}{2} \; [2\pi]$

En déduire e en fonction de c.
Exprimer d et m en fonction de b et c.
Établir une relation entre les affixes des vecteurs $\overrightarrow{ED}$ et $\overrightarrow{AM}$ et conclure.

Démonstration à l'aide d'une transformation:
$r(A) = A$ car, A le centre de rotation est invariant par r

$r(D) = B$, car, $AD = AB$ et $(\widehat{\overrightarrow{AD};\overrightarrow{AB}}) = \dfrac{\pi}{2}$ (ADB isocèle rectangle en A et direct)

$r(C) = E$, car, $AC = AE$ et $(\widehat{\overrightarrow{AC};\overrightarrow{AE}}) = \dfrac{\pi}{2}$ (ACE isocèle rectangle en A et direct)

$r(B) = B'$, avec $AB' = AB$ et $(\widehat{\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AB'}}) = \dfrac{\pi}{2}$ on obtient: ABB' isocèle rectangle en A et direct

$r(M) = M'$, avec $AM' = AM$ et $(\widehat{\overrightarrow{AM};\overrightarrow{AM'}}) = \dfrac{\pi}{2}$ on obtient: AMM' isocèle rectangle en A et direct

On a alors: $AD = AB = AB'$ et $(\widehat{\overrightarrow{AD};\overrightarrow{AB'}}) = (\widehat{\overrightarrow{AD};\overrightarrow{AB}}) + (\widehat{\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AB'}}) = \pi$
Donc, A est le milieu de $[DB']$

Comme M est le milieu de $[BC]$, alors, M' est le milieu de $[B'C']$ (conservation du barycentre par une isométrie)

Théorème des milieux: $\overrightarrow{AM'} = \dfrac{1}{2}\overrightarrow{DE}$

(AM') est parallèle à (DE) et $AM' = \dfrac{1}{2}DE$

Or, $AM' = AM$ et $(\widehat{\overrightarrow{AM};\overrightarrow{AM'}}) = \dfrac{\pi}{2}$

d'où, la conclusion: (AM) et (ED) sont perpendiculaires et que $AM = \dfrac{1}{2}ED$

Démonstration à l'aide des nombres complexes:
Le plan est muni d'un repère orthonormal direct centré en A
On note b, c, d, e et m les affixes respectives des points B, C, D, E et M.

ACE isocèle rectangle en A et direct équivaut à $AC = AE$ et $(\widehat{\overrightarrow{AC};\overrightarrow{AE}}) = \dfrac{\pi}{2}$

d'où les égalités suivantes: $|c| = |e|$ et $(\widehat{\vec{u};\overrightarrow{AE}}) - (\widehat{\vec{u};\overrightarrow{AC}}) = \dfrac{\pi}{2}\ [2\pi]$

On a alors: $\left|\dfrac{e}{c}\right| = 1$ et $\arg(e) - \arg(c) = \dfrac{\pi}{2}\ [2\pi]$

Comme $\left|\dfrac{e}{c}\right| = 1$ et $\arg\left(\dfrac{e}{c}\right) = \dfrac{\pi}{2}\ [2\pi]$, $\dfrac{e}{c}$ est le nombre complexe de module 1 et d'argument $\dfrac{\pi}{2}$:

$\dfrac{e}{c} = \mathrm{i}$ $e = \mathrm{i}c$

le même raisonnement mène à $b = \mathrm{i}d$ ou encore $d = -\mathrm{i}b$

$m = \dfrac{b+c}{2}$ car M est le milieu de $[BC]$

L'affixe de $\overrightarrow{ED}$ est $d - e = -\mathrm{i}(b + c)$

Celle de $\overrightarrow{AM}$ est $\dfrac{b+c}{2}$

On a alors: $AM = \left|\dfrac{b+c}{2}\right| = \dfrac{1}{2}|b+c|$ et $ED = |-\mathrm{i}(b+c)| = |b+c|$

$AM = \dfrac{1}{2}ED$

D'autre part: $\widehat{(\overrightarrow{AM}\,;\overrightarrow{ED})} = \arg\left(\dfrac{z_{\overrightarrow{ED}}}{z_{\overrightarrow{AM}}}\right) = \arg(-2\mathrm{i}) = -\dfrac{\pi}{2}$

Ce qui prouve le résultat demandé.