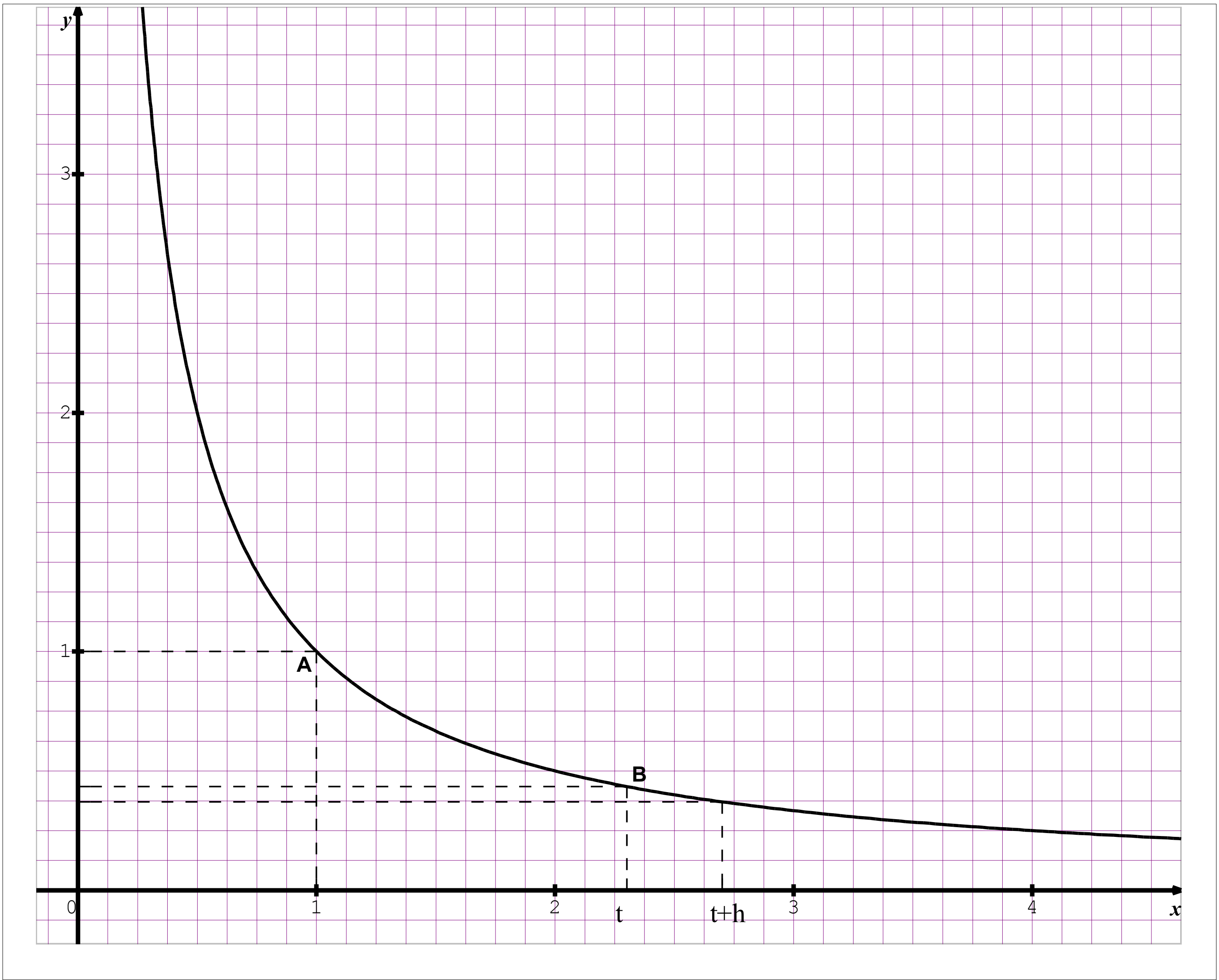
Classe:



On note *C* l'hyperbole d'équation $y=\frac{1}{x}$ *avec* $x>0$

On prend $A(1;1)$ et $B(t;\frac{1}{t})$ avec $t\geq 1$

On note $A(t)$ l'aire sous la courbe limitée par l'axe des abscisses et les droites d'équation $x=1$ et $x=t$

L'unité d'aire est donnée par $\|\vec{i}\|\times\|\vec{j}\|$

I - Observation

1) Calculer $A(1)$

2) Quel est le signe de $A(t)$ pour tout $t>1$

3) Quel est le sens de variations de la fonction *A* sur $[1;+\infty[$

II - Encadrement de A(t)

Soit $t>1$.

1) Donner une équation de la droite (AB)

2) Montrer que l'arc $\overset{\frown}{AB}$ de l'hyperbole est sous le segment $[AB]$

3) En considérant un rectangle et un trapèze, montrer que pour $t\geq 1$, on a:

$$\frac{1}{t}(t-1)\leq A(t)\leq\frac{(1+\frac{1}{t})(t-1)}{2} \quad (1)$$

III - Dérivabilité de la fonction A

1) Dérivabilité en 1:

En utilisant cet encadrement (1), montrer que la fonction A est dérivable en 1 et calculer $A'(1)$

2) Dérivabilité en t $(t \geq 1)$.

a) Soit h un réel strictement positif.

Placer le point H sur l'hyperbole C d'abscisse $t+h$

Mettre en évidence sur le graphique la partie du plan d'aire $A(t+h)-A(t)$

En considérant deux rectangles, montrer que $\frac{h}{t+h} \leq A(t+h)-A(t) \leq \frac{h}{t}$ (2)

b) Que devient l'encadrement (2) lorsque $h<0$ et $t+h>1$

c) Montrer que la fonction A est dérivable en t et calculer $A'(t)$

IV - Étude d'une primitive de $x \mapsto \frac{1}{x}$

On vient de montrer l'existence d'une fonction p définie sur $[1 ; +\infty[$ qui a pour dérivée $x \mapsto \frac{1}{x}$

Lorsque $0<x<1$, on prend pour $p(x)$ l'opposé de l'aire définie précédemment.

p est définie par $\begin{cases} p(x)=A(x) & si \quad x \geq 1 \\ p(x)=-A(x) & si \quad 0<x<1 \end{cases}$ où $A(x)$ est l'aire sous l'hyperbole définie précédemment.

On a donc $p(1)=0$

1) Montrer que p est dérivable sur $]0 ; +\infty[$ et que pour tout $x>0, p'(x)=\frac{1}{x}$.

Donner les variations de p sur $]0 ; +\infty[$

Donner le signe de $p(x)$ selon les valeurs de x.

2) Soit a un réel strictement positif.

On pose $g : x \mapsto p(ax)-p(x)-p(a)$

a) Calculer $g'(x)$

b) En déduire que pour tout $x>0$, $g(x)=0$

c) Compléter: pour tout $a>0$ et pour tout $b>0$, $p(a \times b)=$.......

3) On considère la fonction h définie sur $\mathbb{R}$ par $h=p \circ \exp$

a) Montrer que h est dérivable sur $\mathbb{R}$ et calculer $h'(x)$

b) En déduire h

4) On considère la fonction k définie sur $]0 ; +\infty[$ par $k=\exp \circ p$

Montrer que k est dérivable sur $]0 ; +\infty[$ et montre que $\frac{k'(x)}{k(x)}=\frac{1}{x}$ pour tout $x>0$

5) Soit u une fonction définie et dérivable sur un intervalle I telle que $u>0$

On pose $v=p \circ u$

Montrer que v est dérivable sur I et montrer que $v'=\frac{u'}{u}$

I- Observation

1) $A(1)=0$

2) Pour $t>1$, $A(t)>0$

3) La fonction *A* est strictement croissante sur $[1;+\infty[$

II - Encadrement de A(t)

Soit $t>1$.

1) $M(x;y)\in(AB)$ équivaut à $\overrightarrow{AM}\begin{pmatrix}x-1\\y-1\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}t-1\\ \frac{1}{t}-1\end{pmatrix}$ sont colinéaires équivaut à

$(x-1)\left(\frac{1}{t}-1\right)=(y-1)(t-1)$

Comme $t>1$ (donc , $t-1\neq 0$) et $\frac{1}{t}-1=\frac{1-t}{t}$, on a: $y=\frac{-1}{t}(x-1)+1$ est une équation de la droite (AB)

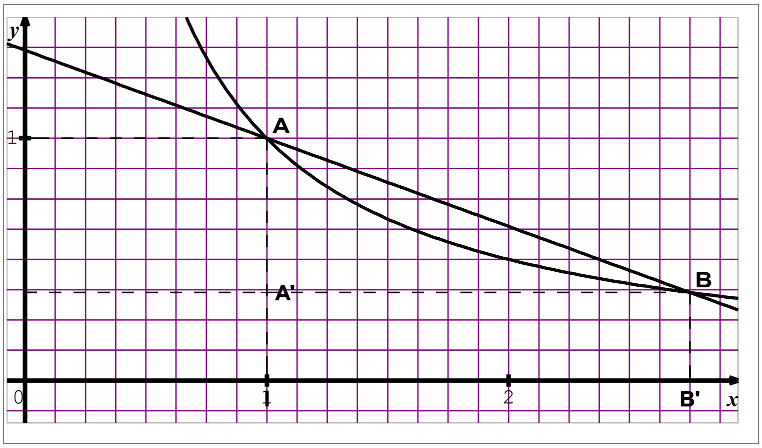
2) Recherche du signe de $d(x)=\frac{1}{x}-\left(\frac{-1}{t}(x-1)+1\right)$ ($t>1$ et $x>0$)

$d(x)=\frac{1}{x}-1+\frac{1}{t}(x-1)=(x-1)\left(\frac{1}{t}-\frac{1}{x}\right)=\frac{(x-1)(x-t)}{tx}$

Ou en développant $d(x)=\frac{x^2-(t+1)x+t}{tx}$. Le calcul donne $\Delta=(t+1)^2-4t=(t-1)^2$ et on trouve deux racines: 1 et *t* d'où la factorisation.

$d(x)<0$ si et seulement si $1<x<t$

L'arc $\overset{\frown}{AB}$ de l'hyperbole est sous le segment $[AB]$



3) Soit $I(1;0)$, $B'(t;0)$, $A'\left(1;\frac{1}{t}\right)$.

Le rectangle $IA'BB'$ a pour aire: $(t-1)\times\frac{1}{t}$ et le trapèze $IABB'$ a pour aire

$(t-1)\times\left(1+\frac{1}{t}\right)\times\frac{1}{2}$

Pour $t\geq 1$, on a:

$\frac{1}{t}(t-1)\leq A(t)\leq\frac{(1+\frac{1}{t})(t-1)}{2}$ (1)

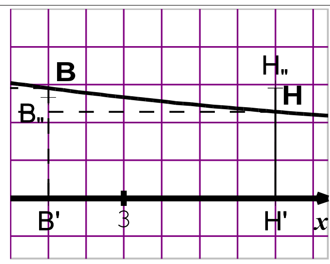
III - Dérivabilité de la fonction A

1) Dérivabilité en 1:

Soit $t>1$, comme $A(1)=0,$ on a d'après (1), $\frac{1}{t}\leqslant\frac{A(t)-A(1)}{t-1}\leqslant\left(1+\frac{1}{t}\right)\times\frac{1}{2}$

$\lim_{t\to 1}\frac{1}{t}=1$ et $\lim_{t\to 1}1+\frac{1}{t}=2$, d'où, d'après le théorème des gendarmes, $\lim_{t\to 1}\frac{A(t)-A(1)}{t-1}=1$

La fonction *A* est dérivable en 1 et calculer $A'(1)=1$



cas où $h>0$

2) Dérivabilité en t $(t\geq 1)$.

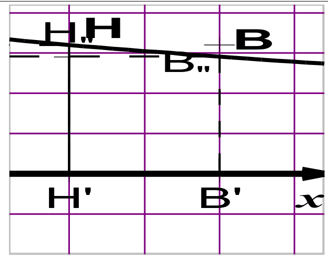
a) Soit *h* un réel strictement positif.

Le point *H* sur l'hyperbole *C* d'abscisse $t+h$ a pour ordonnée $\frac{1}{t+h}$

Puisque $h>0$, $A(t+h)-A(t)>0$

En considérant deux rectangles, montrer que $\frac{h}{t+h}\leq A(t+h)-A(t)\leq\frac{h}{t}$ (2)

b) Que devient l'encadrement (2) lorsque $h<0$ et $t+h>1$



cas où $h<0$

Puisque $h<0$, $A(t)-A(t+h)>0$

L'aire des rectangles est:

pour celui au-dessous de (C), $-h\times\frac{1}{t+h}$ et pour celui au-dessus de (C), $-h\times\frac{1}{t}$

On obtient: $\frac{-h}{t+h}\leqslant A(t)-A(t+h)\leqslant\frac{-h}{t}$

En multipliant par (-1), on obtient: $\frac{h}{t+h}\leq A(t+h)-A(t)\leq\frac{h}{t}$ (3)

c) Lorsque $h>0$, on a d'après (2): $\frac{1}{t+h}\leqslant\frac{A(t+h)-A(t)}{h}\leqslant\frac{1}{t}$ (2')

et lorsque $h<0$, on a d'après (3), $\frac{1}{t+h}\geqslant\frac{A(t+h)-A(t)}{h}\geqslant\frac{1}{t}$ (3')

Comme $\lim_{h\to 0}\frac{1}{t+h}=\frac{1}{t}$, le théorème des gendarmes s'applique à (2') et (3') et pour tout $h\neq 0$, on obtient: $\lim_{h\to 0}\frac{A(t+h)-A(t)}{h}=\frac{1}{t}$

La fonction *A* est dérivable en *t* et $A'(t)=\frac{1}{t}$

IV - Étude d'une primitive de $x\mapsto\frac{1}{x}$

On vient de montrer l'existence d'une fonction *p* définie sur $[1\,;+\infty[$ qui a pour dérivée $x\mapsto\frac{1}{x}$

Lorsque $0<x<1$, on prend pour $p(x)$ l'opposé de l'aire définie précédemment.

p est définie par $\begin{cases} p(x)=A(x) & si \quad x\geq 1 \\ p(x)=-A(x) & si \quad 0<x<1 \end{cases}$ où $A(x)$ est l'aire sous l'hyperbole définie précédemment.

On a donc $p(1)=0$

1) Montrer que *p* est dérivable sur $]0\,;+\infty[$ et que pour tout $x>0, p'(x)=\frac{1}{x}$.

La dérivabilité de p est prouvée sur $]1;+\infty[$ au III-.

Il reste à prouver sur]0;1[et en 1.

On sait déjà, pour $x\geqslant 1$, $\lim_{x\to 1}\frac{p(x)-p(1)}{x-1}=1$

Étude de $\lim_{x\to 1}\frac{p(x)-p(1)}{x-1}$ lorsque $x<1$.

L'étude faite en II- amène lorsque $x<1$, $(1-x)\times 1\leqslant A(x)\leqslant\left(\frac{1}{x}+1\right)\times(1-x)\times\frac{1}{2}$

D'où, $1\leqslant\frac{A(x)-A(1)}{1-x}\leqslant\left(\frac{1}{x}+1\right)\times\frac{1}{2}$. Or, $\frac{p(x)-p(1)}{x-1}=\frac{-A(x)+A(1)}{1-x}=\frac{A(x)-A(1)}{x-1}$

comme $\lim\limits_{x \to 1} \left(\dfrac{1}{x}+1\right) \times \dfrac{1}{2} = 1$, d'après le théorème des gendarmes, pour $x<1$, $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{p(x)-p(1)}{x-1} = 1$

Les limites à droite et à gauche de 1 étant égales, le taux d'accroissement de p en 1 tend vers 1 et par conséquent p est dérivable en 1 et $p'(1)=1$

Étude pour $0<x<1$ et $0<x+h<1$ de $\dfrac{p(x+h)-p(x)}{h}$

Pour tout *h*, $p(x+h)-p(x) = -A(x+h)+A(x) = A(x)-A(x+h)$

Deux cas,

si $h>0$, $A(x)-A(x+h)>0$ et une étude avec les aires des rectangles donne: $h \times \dfrac{1}{x+h} \leqslant A(x)-A(x+h) \leqslant h \times \dfrac{1}{x}$ (4)

si $h<0$, $A(x+h)-A(x)>0$ et une étude avec les aires des rectangles donne: $-h \times \dfrac{1}{x} \leqslant A(x+h)-A(x) \leqslant -h \times \dfrac{1}{x+h}$ (5)

De (4), il vient, puisque $h>0$, $\dfrac{1}{x+h} \leq \dfrac{p(x+h)-p(x)}{h} \leqslant \dfrac{1}{x}$ (4')

De (5), il vient, puisque $-h>0$, $\dfrac{1}{x} \leqslant \dfrac{p(x+h)-p(x)}{h} \leqslant \dfrac{1}{x+h}$ (5')

Lorsque *h* tend vers 0, dans les deux cas, on a: $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{p(x+h)-p(x)}{h} = \dfrac{1}{x}$

conclusion: p est dérivable sur $]0;+\infty[$, et, pour tout $x>0$, $p'(x) = \dfrac{1}{x}$

Donner les variations de *p* sur $]0;+\infty[$

Donner le signe de $p(x)$ selon les valeurs de *x*.

puisque $x>0$, $\dfrac{1}{x}>0$ et p est strictement croissante sur $]0;+\infty[$

d'autre part, si $0<x<1$, alors, $p(x)<p(1)$ et si $x>1$, $p(x)>p(1)$. (Rappel: $p(1)=0$)

On a donc: $p(x)<0$ sur]0;1[et $p(x)>0$ sur $]1;+\infty[$

2) Soit *a* un réel strictement positif.

On pose $g: x \mapsto p(ax)-p(x)-p(a)$

a) Calculer $g'(x)$

$x \mapsto ax \mapsto p(ax)$ a pour dérivée $x \mapsto ap'(ax) = \dfrac{a}{ax} = \dfrac{1}{x}$

d'où, $g'(x) = \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{x} - 0 = 0$

b) En déduire que pour tout $x>0$, $g(x)=0$

g est une fonction constante et comme $g(1)=p(a)-p(1)-p(a)=0$, on a: pour tout $x>0$, $g(x)=0$

c) Compléter: pour tout $a>0$ et pour tout $b>0$, $p(a \times b) = p(a)+p(b)$

3) On considère la fonction *h* définie sur $\mathbb{R}$ par $h = p \circ \exp$

a) Montrer que *h* est dérivable sur $\mathbb{R}$ et calculer $h'(x)$

Comme exp est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $]0;+\infty[$ et que p est définie et dérivable sur $]0;+\infty[$, h est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ et $h' = (\exp)' \times p' \circ \exp$

on a donc, pour tout *x* réel, $h'(x) = \dfrac{\exp(x)}{\exp(x)} = 1$

b) En déduire *h*

On en déduit $h(x)=x+k$ avec $k\in\mathbb{R}$ et comme $h(0)=p(\exp(0))=p(1)=0$, il vient: $k=0$
Pour tout *x* réel, $h(x)=x$
4) On considère la fonction *k* définie sur $]0;+\infty[$ par $k=\exp\circ p$
p est définie et dérivable sur $]0;+\infty[$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ et exp est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$, d'où, k est définie et dérivable sur $]0;+\infty[$, et, $k'=p'\times\exp'\circ p$
On a donc pour tout $x>0$, $k'(x)=\frac{1}{x}\times\exp\circ p(x)=\frac{1}{x}\times k(x)$,
comme $k(x)\neq 0$ (exp ne s'annule pas), on a: $\frac{k'(x)}{k(x)}=\frac{1}{x}$ pour tout $x>0$

5) Soit *u* une fonction définie et dérivable sur un intervalle I telle que $u>0$
On pose $v=p\circ u$
Si *u* est définie et dérivable sur un intervalle I avec $u>0$, on peut appliquer la fonction p et, la composée $p\circ u$ est définie et dérivable sur I.
On a: $v'=u'\times p'\circ u=\frac{u'}{u}$