

Quelque soit la série (générale ou technique ou professionnelle), il est nécessaire de comprendre les calculs sur les nombres.

La machine ne peut être utile que lorsque ces calculs ont été bien analysés.

Exemples : 1) Vous êtes encore quelques-uns à faire par exemple l'erreur suivante : $\frac{2x+10}{2} = x+10$ (**Faux**)

2) ou encore : $(3x+2)^2 = 3x^2+4$ **Faux** ou $(3x+2)^2 = 9x^2+4$ **Faux**

Comment comprendre son erreur et retenir la bonne façon d'appliquer les propriétés des calculs... ?

Exemple 1) : Il est d'abord essentiel de comprendre par exemple que 378 divisé par 3 est égal à :

$$100 + 20 + 6 = 126$$

car : $378 = 300 + 60 + 18$ et que $378 = 3 \times 100 + 3 \times 20 + 3 \times 6$

C'est cela qui vous permet après de comprendre la factorisation par 3 et ainsi de suite ...

Autrement dit : $\frac{378}{3} = \frac{300+60+18}{3} = \frac{3(100+20+6)}{3} = 100 + 20 + 6$

et lorsque vous devez réduire $\frac{2x+10}{2}$, la règle n'a pas changé.

$$\frac{2x+10}{2} = \frac{2(x+5)}{2} = x + 5$$

Exemple 2) : Il est d'abord essentiel de bien lire le calcul $(3x+2)^2$

$(3x+2)^2$ est le nombre $(3x+2)$ multiplié par **lui-même**

$$(3x+2)^2 = (3x+2)(3x+2) = (3x)(3x) + 3x \times 2 + 2 \times 3x + 1^2 = 9x^2 + 12x + 4$$

Pour toutes les erreurs de calculs, vous devez commencer par reprendre les propriétés des opérations :
Procédez dans l'ordre suivant :

- décrire les opérations

par exemple : le carré de la somme des termes $3x$ et 2 $(3x+2)^2$
la somme des carrés de $3x$ et de 2 $(3x)^2 + 2^2$
la somme du carré de $3x$ et de 2 $(3x)^2 + 2$

- se souvenir des propriétés des opérations

par exemple : $9 - 5 - 2 = 4 - 2 = 2$
 $9 - (5 - 2) = 9 - 3 = 6$
 $9 - 5 + 2 = 4 + 2 = 6$
 $15/5 \times 3 = 3 \times 3 = 9$
 $15/(5 \times 3) = 15/15 = 1$
 $15/5/3 = 3/3 = 1$
 $15/(5/3) = 15 \times (3/5) = 9$

A. Interpréter les parenthèses

■ **Quelques règles** : $k(a+b) = ka+kb$; $k(a-b) = ka-kb$ (on distribue) ;
 $A-(B+C-D) = A-B-C+D$; $A+(B+C-D) = A+B+C-D$.

⚠ $k(a \times b) = kab$, on ne distribue pas : $3(ab) \neq 3a \times 3b$.

$A(x) = 2x(x+3) - x(3 \times 2x) + (3x-5)$: les parenthèses n'ont pas le même rôle.
 ① ② ③ ④

① Parenthèses de **fonction** :

« A de x » signifiant que l'expression dépend de la variable muette x ; on ne peut jamais enlever de telles parenthèses.

② Parenthèses de multiplication d'une somme par un nombre :

$2x(x+3)$ signifiant $2x$ fois la somme $x+3$;

pour les enlever on distribue : $2x \times x + 2x \times 3 = 2x^2 + 6x$.

③ Parenthèses d'**association d'un produit** : $-x(3 \times 2x)$ signifiant $-x$ fois 3 fois 2x ;

pas de distribution à faire : $-x \times 3 \times 2x = -x \times 6x = -6x^2$.

④ Parenthèses d'**association**, signifiant qu'on ajoute simplement un regroupement ; on peut toujours les enlever, sauf s'il y a un « - » devant.

Ainsi le développement de l'expression $A(x)$ donne :

$$\begin{aligned} A(x) &= 2x(x+3) - x(3 \times 2x) + 3x - 5 \\ &= 2x^2 + 6x - 6x^2 + 3x - 5 = -4x^2 + 9x - 5. \end{aligned}$$

14 Dans chacune des écritures, indiquer le rôle des parenthèses, puis donner la forme développée :

$$A(x) = 3(x-1) + (x+2) - 4x ;$$

$$B(x) = 2x(-x+2) + (x^2-4) ;$$

$$C(x) = 3(-5x \times x) + 9x - 5(x+4) ;$$

$$D(x) = 2(A(x) + B(x)) - 5x(2x-3).$$

15 Même exercice :

$$A(x) = -3x(x-3) + (4x-1)(x+1) - 2x(x-1) ;$$

$$B(x) = (5x-1)(1-x) - 4x(x+1) + (x^2-1) ;$$

$$C(x) = 2x(2x \times 3) - 4(5x \times 3x) + 3(2x-3) ;$$

$$D(x) = -x(2x+1) + (x^2-3x+2) - (x+1)(1-x) ;$$

$$E(x) = (-3x-1)(-x-3) - (4x-3)(-x-2) - (7x^2-x).$$

16 Développer, réduire et ordonner chacune des expressions suivantes :

$$A(x) = (x-1)(-x+2) + (2x+1)^2 ;$$

$$B(x) = (x-3)^2 - 4x(x-1) ;$$

$$C(x) = (2x+5)^2 - (5x+2)(5x-2) - (1-x)(3+x).$$

17 Réduire au même dénominateur et développer le numérateur :

$$A(x) = \frac{3x-1}{2} - \frac{2x-3}{4} + x - 1 ;$$

$$B(x) = x(x-3) - \frac{x^2-x+2}{3} - 3(2x).$$

18 Développer :

$$A(x) = (3x-1)^2 ; \quad B(x) = (x+2)^2 ;$$

$$C(x) = (4x+7)^2 ; \quad D(x) = (5-x)^2 ;$$

$$E(x) = \left(\frac{x}{2} + 1\right)^2 + \left(\frac{3x}{2} - 1\right)^2.$$

19 Développer :

$$A(x) = (2x-3)(-x-2) + (2x+3)^2 ;$$

$$B(x) = -4x(x+1) - (x+2)^2 ;$$

$$C(x) = \frac{3}{2}x + 4(x-1)^2 - \left(\frac{x}{2} + 1\right)^2.$$

20 Reconnaître les développements de carré.

Dire si les expressions suivantes sont le développement d'un carré.

Si oui, donner la factorisation.

a) $x^2 - 4x + 4$;

b) $25x^2 + 10x - 1$;

c) $4 - 18x + 9x^2$;

d) $x^2 - 2x + 1$;

e) $x^2 + 4$;

f) $-4x^2 + 12x + 9$;

g) $\frac{x^2}{4} - 3x + 9$;

h) $6x + 9 + x^2$.

B. Développer

■ Ne pas oublier le **double produit** dans le développement d'un carré.

$$(A+B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$$

■ Un signe « - » devant une parenthèse : il faut changer tous les signes.

$$-(A+B-C) = -A-B+C$$

■ Un signe « - » devant un trait de fraction, c'est comme un signe « - » devant une parenthèse au numérateur.

$$-\frac{N}{D} = \frac{-N}{D}, \text{ mais } \frac{-N}{-D} = \frac{N}{D}$$

C. Reconnaître les identités remarquables

■ **Développement d'un carré** ■

• $(A+B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$: « le carré d'une somme est égal au carré du premier terme + le double produit + le carré du deuxième terme ».

$$\begin{aligned} \text{Ainsi } (5x+7)^2 &= 25x^2 + 70x + 49 \\ &\quad \uparrow \quad \quad \quad \uparrow \quad \quad \quad \uparrow \\ &\quad \text{carré de } 5x \quad \text{2 fois } 5x \text{ fois } 7 \quad \text{carré de } 7 \end{aligned}$$

• Si on a une expression à trois termes dont deux termes sont des carrés parfaits, et le terme restant est le double produit, alors l'expression est le développement d'un carré :

$$\begin{aligned} 9x^2 + 30x + 25 &= (3x+5)^2 ; & 4x^2 - 4x + 1 &= (2x-1)^2 \\ \uparrow & \quad \quad \quad \uparrow & \quad \quad \quad \uparrow & \quad \quad \quad \uparrow \\ \text{carré de } 3x & & \text{carré de } 2x & & \text{carré de } 1 \\ & \quad \quad \quad \uparrow & & & \\ & \quad \quad \quad 2 \times 3x \times 5 & & & \quad \quad \quad \uparrow \\ & & & & & & \quad \quad \quad 2 \times 2x \times 1 \end{aligned}$$

Différence de deux carrés

- $A^2 - B^2 = (A + B)(A - B)$: « le premier + le 2^e, **facteur de**, le premier - le 2^e ».
- Si on a une expression à **deux** termes, avec **un seul signe moins** et deux carrés, alors :

$$4x^2 - 9 = (2x+3)(2x-3); \quad -x^2 + 16 = 16 - x^2 = (4+x)(4-x).$$

↑ ↑
↑ ↑

carré de 2x carré de 3
4² x²

Exemples :

- $(x-3)^2 - (2x-1)^2 = (x-3+2x-1)(x-3-2x+1) = (3x-4)(-x-2)$.
Ici $A = x-3$ et $B = 2x-1$.
- $4(x-1)^2 - 5 = (2x-2+\sqrt{5})(2x-2-\sqrt{5})$. Ici $A = 2(x-1) = 2x-2$ et $B = \sqrt{5}$.

D. Des questions à se poser pour factoriser

Une expression est factorisée lorsqu'elle est constituée d'un **produit** de facteurs (sans addition ni soustraction à l'extérieur des parenthèses).

Lorsque l'on a une expression à factoriser, il faut se poser les questions suivantes :

L'expression est-elle déjà factorisée ?

Si oui, vérifier que, même entre parenthèses, c'est factorisé.

Exemple : $A(x) = (5x-1)(x^2-4) = (5x-1)(x+2)(x-2)$.

Dans tous les termes de la somme à factoriser, a-t-on le même facteur commun ?

Si oui, souligner ce facteur commun, puis le mettre en facteur, et écrire **entre crochets** ce qui n'est pas souligné, sans changer les termes de place, en mettant les +, et les - et les parenthèses nécessaires.

Penser que : ... + x - 4, c'est aussi ... + 1(x-4), ou encore ... - 1(-x+4).

Exemple : $C(x) = (2x-1)(x-4) + (x-4)^2 - 2(x-4)(x+3) + x-4$
 $= (x-4)[2x-1+x-4-2(x+3)+1] = (x-4)(2x-1+x-4-2x-6+1)$
 $= (x-4)(x-10)$.

Reconnaît-on une différence de deux carrés ?

Si oui, la factoriser (► technique de base 2 C, p. 298).

Exemple : $B(x) = (5x-2)^2 - 4(x-3)^2 = (5x-2+2(x+3))(5x-2-2(x-3)) = (7x-8)(3x+4)$.

Peut-on faire apparaître dans tous les termes le même facteur commun ?

Si oui, faire une factorisation partielle et mettre le facteur commun en facteur.

Si un seul terme ne présente pas le facteur commun, on ne peut pas factoriser.

Exemple : $D(x) = x^2 - 9 - 3(x-3)(x+2) = (x+3)(x-3) - 3(x-3)(x+2)$
 $= (x-3)[x+3-3(x+2)] = (x-3)(x+3-3x-6) = (x-3)(-2x-3)$.

Si la réponse à chaque question précédente est non

Alors, on **développe** et on réduit ; le polynôme obtenu est peut-être facilement factorisable (► technique de base 2 C, p. 298).

Exemple : $E(x) = (4x-1)^2 - (x+1)(4x+1) = 16x^2 - 8x + 1 - (4x^2 + x + 4x + 1)$
 $= 16x^2 - 8x + 1 - 4x^2 - x - 4x - 1 = 12x^2 - 13x = x(12x-13)$.

Une expression de la forme $ax^2 + bx$ se factorise par x : $ax^2 + bx = x(ax + b)$.

Attention ! Une somme de deux carrés $A^2 + B^2$ ne se factorise pas.

Exemples : $F(x) = x^2 + 4$; $G(x) = 1 + (-x-3)^2$; $H(x) = (x+2)^2 + (5-2x)^2$.

E. Règles pour écrire des égalités

Calculs et transformations d'écritures

Lorsque l'on transforme une expression donnée en effectuant des calculs, en utilisant un développement, une factorisation..., on peut écrire une suite de « = » entre deux écritures.

Exemple :

$E(x) = (3x-2)(2-x) + (x-2)^2 = 6x - 3x^2 - 4 + 2x + x^2 - 4x + 4 = -2x^2 + 4x = x(-2x+4)$.

Dans une formule, on peut remplacer une variable par un nombre ou une expression donnée : c'est le **principe de substitution**. On peut alors effectuer les calculs sur une ligne.

Exemple : Soit $-x^2 + 2x - 3$; sachant que $x = 1 + h$, alors :

$-x^2 + 2x - 3 = -(1+h)^2 + 2(1+h) - 3 = -1 - 2h - h^2 + 2 + 2h - 3 = -h^2 - 2$.

21 Reconnaître les différences de deux carrés et donner la factorisation.

- a) $25x^2 - 4$; b) $-x^2 - 4$; c) $x^2 - 121$;
- d) $-4x^2 + 9$; e) $49 - 36x^2$; f) $4x^2 - 1$;
- g) $3 - x^2$; h) $7x^2 - 100$; i) $10 - 9x^2$.

22 Si l'expression est une différence de deux carrés, la factoriser, sinon, la laisser telle quelle.

- a) $(x+1)^2 + 4$; b) $(5x-7)^2 - (x+4)^2$;
- c) $4(x-3)^2 - 9$; d) $-(3x-1)^2 + 25$;
- e) $9(x+1)^2 + 25$; f) $-(x-3)^2 + 4(x+1)^2$.

23 Factoriser les expressions suivantes :

- $f(x) = (2x+1)(2x+3) - (2x+1)(x-3)$;
- $g(x) = (2x-5)(x+6) - 2x - 12$;
- $h(x) = (3x+8)(49-4x^2)$;
- $i(x) = (x-2)(x+3) + x^2 - 4x + 4$;
- $j(x) = 3 - x + (3-x)^2$;
- $k(x) = (x-5)(2x+3) + (4x-5)(5-x)$;
- $l(x) = 4x^2 - 1 - (3x+5)(2x-1)$.

24 Factoriser. (Essayer de faire apparaître des facteurs communs, sinon développer.)

- a) $(x-1)(2x-3) - (1-x)^2 + x - 1$;
- b) $(2x+3)(x-1) + (x+1)(4-5x)$;
- c) $(x-3)(x+2) - (x+2)^2 + 2x^2 + 4x$;
- d) $(x+3)(x+1) - (x-3)(x-1)$;
- e) $2(4x-5)^2 - 5x(5-4x)$;
- f) $(6x-3)(x+1) - (2x-1)(x+1) + (1-2x)^2$.

25 Développer :

- a) $(2x-1)^2 + (x+3)(3-2x) - 3x(x+2)$;
- b) $(1-\frac{1}{3})(2+\frac{1}{3}) + (\frac{2}{3}-1)(2-\frac{4}{3})$;
- c) $6(5-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}) + (\frac{1}{2}+1)(3-\frac{1}{3})$.

26 1° Soit l'expression $f(x) = 2x^2 - 3x + 1$.

- a) Calculer $f(x)$ pour $x = 1$, puis pour $x = -3$.
- b) Remplacer x par $2-h$.
- c) Remplacer x par $1-\sqrt{2}$.

2° Mêmes questions pour l'expression :

$g(x) = -x^2 + x - 4$.

Règles sur les égalités

Une égalité est composée de deux membres : **1^{er} membre = 2nd membre**.
Toute opération effectuée sur un des membres doit s'effectuer sur l'autre membre pour obtenir une égalité équivalente :

- on peut **ajouter ou retrancher** le même nombre à chaque membre.
- Exemple : $2x + 5 = -x + 3$ en ajoutant x équivaut à $2x + 5 + x = -x + 3 + x$ et $3x + 5 = 3$ en retranchant 5 équivaut à $3x + 5 - 5 = 3 - 5$, c'est-à-dire $3x = -2$.
- on peut **multiplier ou diviser** chaque membre par le même nombre non nul.

Exemple : $3x = -2$ en divisant par 3 équivaut à $\frac{3x}{3} = \frac{-2}{3}$, c'est-à-dire $x = -\frac{2}{3}$.

- on peut **prendre l'opposé** de chaque membre, ce qui revient à multiplier par -1 .
- Exemple : $-5x - 2 = x$ en prenant l'opposé équivaut à $5x + 2 = -x$: on **change tous les signes**.
- on peut **ajouter ou retrancher membre à membre** deux égalités, mais on perd des informations, donc il n'y a plus d'équivalence.
- Exemple : si $3x + 2y = 5$ et $5x - 2y = 1$, alors $3x + 2y + 5x - 2y = 5 + 1$, soit $8x = 6$.

F. Règles sur les inégalités

Inégalités équivalentes

Toute opération effectuée sur un des membres d'une inégalité doit s'effectuer sur l'autre membre pour obtenir une inégalité équivalente :

- on peut **ajouter ou retrancher** le même nombre à chaque membre d'une inégalité, l'inégalité garde le même sens ;
- on peut **multiplier ou diviser** chaque membre par le même **nombre strictement positif**, l'inégalité ne change pas de sens ;
- on peut **multiplier ou diviser** chaque membre, par le même **nombre strictement négatif**, mais l'inégalité **change de sens**.

Exemple : $3x - 4 < 5x + 1$ on ajoute 4 et on retranche 5x, le sens ne change pas
équivaut à $3x - 5x < 1 + 4$ on réduit chaque membre
c'est-à-dire $-2x < 5$ x est multiplié par -2 , on divise par -2 ,
équivaut à $x > -\frac{5}{2}$ mais l'inégalité change de sens

Remarque : lorsque l'on prend l'opposé d'une inégalité, on **change tous les signes** :
 $-x < 3$ équivaut à $x > -3$; $-4x - 1 \geq 0$ équivaut à $4x + 1 \leq 0$

Règles des signes

• La **somme** de deux nombres positifs est positive, la somme de deux nombres négatifs est négative.

Exemples : $(x + 3)^2 + 4$ est une somme de deux nombres positifs, donc elle est positive.
 x^2 est positif, donc $-x^2$ est négatif ; ainsi $-x^2 - 9$ est une somme de deux nombres négatifs, donc elle est négative.

• Le **produit** de deux nombres positifs est positif, le produit de deux nombres négatifs est positif, mais le produit de deux nombres de signes contraires est négatif :

$$(-A) \times (-B) = A \times B ; - (A \times B) = (-A) \times B = A \times (-B).$$

De même pour le quotient : $\frac{-N}{-D} = \frac{N}{D}$; $-\frac{N}{D} = \frac{-(N)}{D} = \frac{N}{-(D)}$.

Exemples : Si $x \geq 0$, c'est-à-dire x positif (ou nul), alors $-3x$ est négatif ;
si $x \leq 0$, alors $-5x$ est positif.

27 a) Soit l'égalité $3x + 2 = -4x - 5$.
Appliquer successivement :
ajouter 4x, retrancher 2, diviser par 7.

b) Soit l'égalité $\frac{x-3}{2} = x+2$.

Appliquer successivement :
multiplier par 2, retrancher 2x, ajouter 3, prendre l'opposé.

28 a) Soit les égalités $5x + 4y = 2$ et $3x - y = 1$.
Multiplier la seconde par 4, puis ajouter membre à membre les égalités obtenues.

b) Soit les égalités $\frac{3-x}{5} - 2y = 1$ et $6y - 2x = 4$.

Multiplier la première par 5 et diviser la seconde par 2, puis retrancher membre à membre les égalités obtenues.

29 a) Soit l'inégalité $3x - 4 < x + 3$.

Appliquer successivement :
enlever x, ajouter 4, diviser par 2.

b) Soit l'inégalité $x - 3 > 9 + 5x$.
Retrancher 5x, ajouter 3, diviser par -4 .

c) Soit l'inégalité $2(x + 3) - 1 > 4x + 5$.
Réduire le premier membre, retrancher 4x, retrancher 5, diviser par -2 .

30 a) Soit l'inégalité $\frac{x+2}{3} \leq x - \frac{1}{2}$.

Appliquer successivement :
multiplier par 6, retrancher 6x, retrancher 4, prendre l'opposé, diviser par 4.

b) Soit l'inégalité $-\frac{4}{3}x + 2 > 0$.

Retrancher 2, puis multiplier par $-\frac{3}{4}$.

31 Sachant que x est négatif, donner le signe de :
a) $3x$; b) $-5x$; c) $-(x)^2$; d) $-x^2 - 4$; e) $x^2 + 1$.

32 Sachant que $x > 4$, donner le signe de :
a) $x - 4$; b) $-2x + 8$; c) $-3x(x - 4)$.

33 Écrire sans signe $-$ au dénominateur :

a) $\frac{3x-2}{-3}$; b) $\frac{x-1}{-x-3}$;

c) $\frac{2x-1}{-2x} - \frac{x+1}{-2}$.