I- Symétrie par rapport à la droite d'équation $y = x$ dans un repère orthonormal

On se place dans un repère orthonormal $(O;\vec{i},\vec{j})$.

Soit Δ la droite d'équation $y = x$.

Soit M un point de coordonnées $(x; y)$ n'appartenant pas à Δ.

Soit M' le symétrique de M par rapport à Δ. On note (x', y') ses coordonnées.

1) Écrire les relations géométriques permettant de définir M' en fonction de M.

Δ est la médiatrice de $[MM']$ ce qui est équivalent à Δ coupe $[MM']$ en son milieu I et est perpendiculaire à $[MM']$.

On a alors: I étant le milieu de $[MM']$ et $\vec{u}$ un vecteur directeur de Δ,

$$\begin{cases} I\in\Delta \\ \vec{u}.\overrightarrow{MM'}=0 \end{cases}$$

2) a) Traduire ces relations en géométrie analytique.

Un vecteur directeur de Δ est $\vec{i}+\vec{j}$, d'où, $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{MM'}\begin{pmatrix}x'-x\\y'-y\end{pmatrix}$

$$\begin{cases} x_I=\dfrac{x+x'}{2} \text{ et } y_I=\dfrac{y+y'}{2} \\ y_I=x_I \\ (x'-x)\times1+(y'-y)\times1=0 \end{cases}$$

b) En déduire que $\begin{cases} x'=y \\ y'=x \end{cases}$.

On a le système $\begin{cases} x+x'=y+y' \\ x'-x+y'-y=0 \end{cases}$, d'où, $\begin{cases} x'=y \\ y'=x \end{cases}$ 5résolution du système en ne perdant pas de vue qu'on doit exprimer x' et y' en fonction de x et y.

Le système est-il valide lorsque $M\in\Delta$? Oui, car, en ce cas, $y = x = x' = y'$

3) Réciproquement: Soient deux points $M(x;y)$ et $M'(x', y')$ tels que $\begin{cases} x'=y \\ y'=x \end{cases}$

Montrer que M et M' sont symétriques par rapport à Δ.

Le milieu de [MM'] a pour abscisse $x_I=\dfrac{x+x'}{2}$ et pour ordonnée $y_I=\dfrac{y+y'}{2}$, or, les égalités $x' = y$ et $y' = x$ donnent $y_I = x_I$ ce qui prouve que $I\in\Delta$.

D'autre part, $\overrightarrow{MM'}\begin{pmatrix}x'-x\\y'-y\end{pmatrix}$, d'où, $(x'-x)\times1+(y'-y)\times1 = y-x-x+y = 0$, ce qui prouve que $\vec{u}$ et $\overrightarrow{MM'}$ sont orthogonaux.

Δ est la médiatrice de $[MM']$ et M' est le symétrique de M par rapport à Δ

Approfondissement (à faire à la maison): Montrer que M et M' sont symétriques par rapport à Δ_1 d'équation $y = 2x$ si et seulement si $\begin{cases} x'=\dfrac{-3}{5}x+\dfrac{4}{5}y \\ y'=\dfrac{4}{5}x+\dfrac{3}{5}y \end{cases}$

II- Application:

1) Soit f une bijection d'un intervalle I sur un intervalle J.

On note f^{-1} la bijection réciproque de J sur I.

Rappel: Pour tout $x \in I$ et $y \in J$, $y = f(x)$ *équivaut à* $x = f^{-1}(y)$.

Montrer que C_f et $C_{f^{-1}}$ courbes représentatives de f et f^{-1} sont symétriques par rapport à Δ d'équation $y = x$.

Soit $M(x, f(x))$ un point de C_f et $M'(f(x); x)$. Comme $f^{-1}(f(x)) = x$, le point M' est un point de $C_{f^{-1}}$

D'après I- M et M' sont symétriques par rapport à Δ d'équation $y = x$.

2) Soit f définie sur $[-1; 5]$ par $f(x) = \dfrac{2x^3+3x^2+6x-20}{5}$.

Montrer que f est une bijection de $[-1;5]$ sur un intervalle à déterminer.

f étant une fonction polynôme est dérivable sur $[-1; 5]$, donc, f est continue sur cet intervalle.

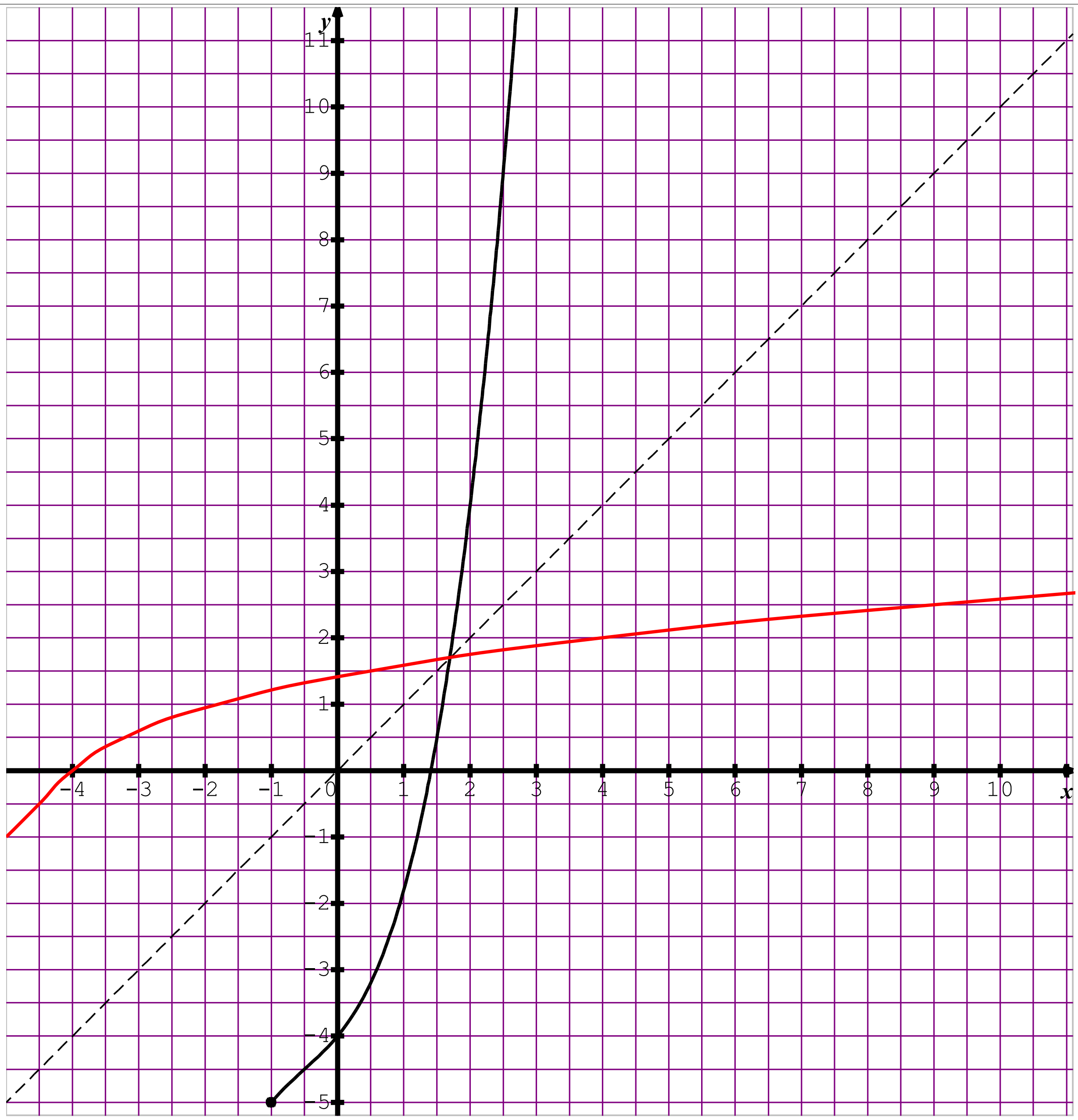
Pour tout x de $[-1; 5]$, $f'(x) = \dfrac{6x^2+6x+6}{5} = \dfrac{6}{5}(x^2+x+1)$,

or, comme $\Delta = -3$, x^2+x+1 est du signe du coefficient de x^2.

On en déduit, $f'(x) > 0$ et f strictement croissante sur $[-1; 5]$.

$\begin{cases} f & \text{est continue sur } [-1,5] \\ f & \text{strictement croissante sur } [-1,5] \end{cases}$, donc, f réalise une bijection de $[-1; 5]$ sur $[f(-1); f(5)] = [-5; 47]$

Construire C_f et $C_{f^{-1}}$



y
11
10
9
8
7
6
5
4
3
2
1
−1
−2
−3
−4
−5
−4
−3
−2
−1
0
1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
x