Index

Questions préliminaires

1) On fait la proposition suivante: x étant un réel strictement positif, l'aire du carré de côté $x+3$ est égale à la somme des aires des deux carrés de côtés respectifs x et 3.

Cette proposition est-elle vraie? est-elle fausse?

2) On fait la proposition suivante: x étant un réel strictement positif, on construit un triangle rectangle tel que les côtés perpendiculaires sont de longueur x et 3.

L'aire du carré construit sur l'hypoténuse est égale à la somme des aires des deux carrés construits sur les côtés perpendiculaires.

Cette proposition est-elle vraie? est-elle fausse?

I- Négation d'une phrase

I-1- Proposition

En mathématiques, une **proposition** est une phrase mathématique.
Une proposition peut être vraie ou fausse.
Dans les phrases qui suivent, la lettre x représente un nombre réel.

	Proposition	*Vrai ou faux*
A1	Le carré d'un nombre réel x est positif	
A2	$x \leqslant 5$	
A3	Il existe des rectangles qui ne sont pas des parallélogrammes	

I-2- Négation d'une proposition

Soit une phrase A.
La phrase B est la négation de la phrase A lorsque:
Si A est vraie alors B est fausse et si A est fausse alors B est vraie.
La négation des phrases du I-1 sont :

	Négation de la proposition A	*Vrai ou faux*
B1	Il existe un réel x qui a un carré strictement négatif.	

B2	$x > 5$	
B3	Tous les rectangles sont des parallélogrammes	

I-3- Exercice:

Écrire la négation des phrases suivantes : (Quand c'est possible, écrire la phrase sous forme affirmative).

	Phrase	***Négation de la phrase***
1)	Dans le plan, les droites D et D' sont parallèles	
2)	$x \neq 1$	
3)	$x \in \mathbb{N}$ ($\mathbb{N}$ est l'ensemble des entiers naturels)	
4)	$x < 3$ ou $x > 7$	
5)	I et J étant deux intervalles, $x \in I \cup J$	

I-4- Bilan

La réunion d'intervalles : $I \cup J$.

Un élément x appartient à la réunion de deux intervalles si et seulement si cet élément x appartient à au moins un des deux intervalles.

$x \in I \cup J \Leftrightarrow x \in I$ OU $x \in J$.

L'intersection d'intervalles : $I \cap J$.

Un élément x appartient à l'intersection de deux intervalles si et seulement si cet élément x appartient à la fois aux deux intervalles.

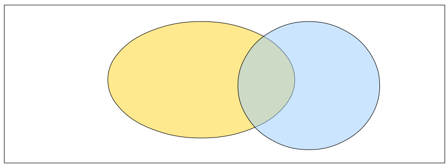
$x \in I \cap J \Leftrightarrow x \in I$ ET $x \in J$.

La négation d'une phrase du type : " Pour tout .....vérifiant (propriété) " est de la forme : " Il existe au moins un ...ne vérifiant pas (propriété) " (et réciproquement).

La négation d'une phrase du type : " l'un OU l'autre " est de la forme : " Ni l'un ET ni l'autre "

La négation d'une phrase du type : " l'un ET l'autre " est de la forme : " Ni l'un OU ni l'autre "

Schéma : (plusieurs schémas seront utiles pour plus de lisibilité).



On peut schématiser

Dans le rectangle, tous les éléments concernés par l'étude.

Dans une des ellipses, les éléments vérifiant une propriété P_1 .

Dans l'autre ellipse, les éléments vérifiant une propriété P_2 .

Indiquer où lire les éléments vérifiant : P_1 ET P_2 , P_1 OU P_2 ,

où lire les éléments ne vérifiant pas : P_1 (négation de P_1), P_2 (négation de P_2), P_1 ET P_2 (négation de P_1 ET P_2), P_1 OU P_2 (négation de P_1 OU P_2).

où lire les éléments ne vérifiant pas ni P_1, ni P_2.

où lire les éléments ne vérifiant pas P_1 ou ne vérifiant pas P_2

II- Implication

II-1- Définition

Une **implication** est une phrase mathématique indiquant qu'une donnée (p) entraîne (ou implique) une conclusion (q).

Elle s'écrit sous la forme: $(p) \Rightarrow (q)$ Le symbole $\Rightarrow$ se lit: « implique »

Dans les théorèmes, elle est utilisée sous la forme: si (p) alors (q)

Une implication est fausse dans le cas où (p) est vraie et (q) est fausse.

Dans tous les autres cas, l'implication est vraie

II-2- Exercice

	Implication	*Vrai ou faux*
I1	$(x = 3) \Rightarrow (x^2 = 9)$	
I2	($ABCD$ rectangle) $\Rightarrow$ ($AC = BD$)	
I3	$[AC] \perp [BD]$ $\Rightarrow$ ($ABCD$ losange)	
I4	($ABCD$ carré) $\Rightarrow$ ($ABCD$ losange)	
I5	(ABC triangle rectangle en A) $\Rightarrow$ ($AB^2 + AC^2 = BC^2$)	

II-3- Vocabulaire: Condition suffisante, condition nécessaire

La condition (p) est une condition ***suffisante*** de (q)
La condition (q) est une condition ***nécessaire*** de (p)
Dans les exemples:
($x = 3$) est une condition suffisante pour que ($x^2 = 9$).
Il suffit d'avoir (x = 3) pour être certain que ($x^2 = 9$)
Cette condition (x=3) n'est pas nécessaire. Il existe au moins un autre réel dont le carré est 9.

Si ($x = 3$) alors, nécessairement, $x^2 = 9$

$[AC] \perp [BD]$ n'est pas une condition suffisante pour que $ABCD$ soit un losange.
On peut construire deux segments perpendiculaires sans obtenir un losange
Il ne suffit pas d'avoir $[AC] \perp [BD]$ pour affirmer que $ABCD$ est un losange.

II-4- Énoncés de théorèmes

Donner quelques énoncés de théorèmes vus au collège ou en seconde en mettant en évidence la condition suffisante et la condition nécessaire.

III- Équivalence

III-1- *Définition:*

Dans certains cas lorsque l'implication (p) $\Rightarrow$ (q) est vraie, l'implication (q) $\Rightarrow$ (p) est également vraie.
On dit que les propositions (p) et (q) sont ***équivalentes***.
On note (p) $\Leftrightarrow$ (q). Le symbole $\Leftrightarrow$ se lit: « équivaut à »
On énonce le théorème sous la forme: (p) si et seulement si (q).
Une équivalence est vraie lorsque (p) et (q) sont vraies en même temps et lorsque (p) et (q) sont fausses en même temps.
Une équivalence est fausse lorsque l'une des conditions est vraie et l'autre fausse.III-2- ***Vocabulaire***
(q) $\Rightarrow$ (p) est la ***réciproque*** de (p) $\Rightarrow$ (q)
Lorsque (p) $\Leftrightarrow$ (q): (p) est une **condition nécessaire et suffisante** de (q)

III-3- Exercice

Voici les énoncés des implications réciproques de I1, I2, I3 et I4 des exemples du II-2

	Énoncé de la réciproque	*Vrai ou faux*
RI1	$(x^2 = 9) \Rightarrow (x = 3)$	
RI2	($AC = BD$) $\Rightarrow$ ($ABCD$ rectangle)	
RI3	($ABCD$ losange) $\Rightarrow$ $[AC] \perp [BD]$	
RI4	($ABCD$ losange) $\Rightarrow$ ($ABCD$ carré)	
RI5	($AB^2 + AC^2 = BC^2$) $\Rightarrow$ (ABC triangle rectangle en A)	

III-4- Quelques équivalences.

1) Peut-on à partir des implications I1, I2, I3 et I4 et de leurs réciproques énoncer des équivalences ?

2) Donner une équivalence concernant le parallélogramme.

3) Donner une équivalence concernant le rectangle.

4) Donner une équivalence concernant le losange.

5) Donner une équivalence concernant le carré.

IV- Exercices

Étudier (et retenir) à partir des exercices faits et corrigés du livre depuis le début d'année.

IV-1 Rôle du contre-exemple

Pages 44 et 89 du livre de seconde (Pixel) : **rôle du contre-exemple.**
Quand une propriété est fausse, il suffit de donner un exemple qui contredit la proposition. (Voir les exemples déjà traités)

IV-2- Définition de la contraposée

Page 65 du livre de seconde (Pixel) : **définition de la contraposée.**
Quand une implication est donnée sous la forme (Si (p) alors (q) ", on construit la contraposée en faisant :
Si (non q) alors (non p).
Exemple :
La contraposée de la l'implication " Si $ABCD$ est un losange alors les diagonales [AC] et [BD] sont perpendiculaires " est : " Si les diagonales [AC] et [BD] ne sont pas perpendiculaires alors $ABCD$ n'est pas un losange "
Quand une implication est vraie, sa contraposée est vraie.

V- En pratique: un exemple commenté (Travail personnel)

Dans une démonstration pour prouver la conclusion (q), on doit vérifier la condition suffisante (p). On cherche alors à démontrer (p) pour amener la conclusion (q).

Énoncé: Dans un triangle ABC, on sait: $AB = 6$, $AC = 8$ et $BC = 10$. I est le milieu de [BC]. Calculer AI.

Recherche (brouillon) : une construction suggère que le triangle ABC est rectangle en A et on connaît des propriétés sur la médiane issue du sommet A.
Les propriétés utiles: ***(et pour les reconnaître, il faut d'abord les connaître)***
celles qui permettent de montrer que le triangle est rectangle et celles qui permettent de calculer la longueur de [AI]
(P1): Si $AB^2 + AC^2 = BC^2$ alors ABC est un triangle rectangle en A
(P2): Si ABC est un triangle rectangle en A alors le centre du cercle circonscrit est le milieu de l'hypoténuse.
Pour appliquer (P2), il faut montrer que ABC est rectangle en A
Pour appliquer (P1), il faut vérifier que $AB^2 + AC^2 = BC^2$

Rédaction de la démonstration.
$AB^2 = 36$, $AC^2 = 64$ et $BC^2 = 100$
Comme 36 + 64 = 100, on a: $AB^2 + AC^2 = BC^2$
D'après (P1): « Si $AB^2 + AC^2 = BC^2$ alors ABC est un triangle rectangle en A »
on obtient la conclusion: le triangle ABC est rectangle en A.

D'après (P2): « Si ABC est un triangle rectangle en A alors le centre du cercle circonscrit est le milieu de l'hypoténuse ».
on obtient la conclusion: le milieu I de [BC] est le centre du cercle circonscrit à ABC

On en déduit: $AI = IB = IC = \dfrac{BC}{2}$ et comme $BC = 10$

Conclusion: $AI = 5$