Index

Préliminaires:

*** Que signifie pour vous le terme de *conjecture*?
*** Comment démontrer une *implication*: « **SI** (proposition P) **ALORS** (proposition Q) »?
*** Qu'est-ce qu'une *proposition*?
*** Écrire une proposition mathématique toujours vraie.
*** Écrire une proposition mathématique toujours fausse.
*** Écrire une proposition mathématique vraie sur l'intervalle réel [1;5] et fausse sinon.

I- Vers le raisonnement par récurrence

n étant un entier supérieur ou égal à 1, on pose: $u_1=\frac{1}{1\times 2}$, $u_2=\frac{1}{1\times 2}+\frac{1}{2\times 3}$, $u_3=\frac{1}{1\times 2}+\frac{1}{2\times 3}+\frac{1}{3\times 4}$

On poursuit ainsi la construction des termes u_n.

1) Formule explicite: u_n en fonction de n

Écrire u_n en fonction de n. (C'est la définition du terme noté u_n)

Remarque: On peut utiliser le symbole Σ (sigma majuscule) signifiant somme: $u_n=\sum_{i=1}^{i=n}\frac{1}{i\times(i+1)}$

2) Formule par récurrence: u_{n+1} en fonction des termes précédents

Écrire u_{n+1} en fonction de u_n et de n

3) Conjecturer une égalité

Mettre sous forme de fraction irréductible les termes u_1, u_2, u_3, u_4.
Conjecturer une écriture plus simple de u_n (*Ce résultat n'est pas certain*).

4) Hérédité

Soit k **un** entier supérieur ou égal à 1.

En utilisant le 2), montrer que: « **Si** $u_k=\frac{k}{k+1}$ **alors** $u_{k+1}=\frac{k+1}{k+2}$ »

II- A propos de conjecture

On veut comparer n^3 et 2^n à partir de $n = 2$.

Classer les deux nombres pour $n = 2$, $n = 3$, $n = 4$, $n = 5$.
Quelle conjecture faites-vous sur le classement de n^3 et 2^n ?

III- A propos de l'hérédité.

On fait la supposition suivante: Soit k un entier, le nombre $7^k + 1$ est divisible par 6
(Autrement dit: on peut écrire que $7^k + 1 = 6q$ avec q entier).
Montrer que l'on peut en déduire: $7^{k+1} + 1$ est un multiple de 6. *Rappel:* $7^{k+1}=7\times 7^k$

IV- Énoncé de l'axiome de récurrence:

$P(n)$ est une phrase (proposition) relative à un entier n

Dans I-, $P(n)$ *est l'égalité «* $u_n=\dfrac{n}{n+1}$ *pour* $n\geq 1$ *»*

Dans II-, $P(n)$ *est l'inégalité «* $n^3\geq 2^n$ *pour* $n\geq 2$ *»*

Dans III-, $P(n)$ *est la phrase: «* 7^n+1 *est divisible par 6 »*

Pour démontrer par récurrence qu'une proposition $P(n)$ est vraie pour tout entier $n \geqslant n_0$, on doit:
1ère étape: « initialisation »
Démontrer que la propriété est vraie pour le premier entier n_0
2ème étape: « caractère héréditaire » Soit k un entier naturel supérieur ou égal à n_0
Démontrer que « $P(k)$ implique $P(k + 1)$ »
ou encore « Si $P(k)$ est vraie pour **un** entier $k \geqslant n_0$ (*hypothèse de récurrence*), alors $P(k+1)$ est vraie »)
3ème étape: Conclusion
D'après l'axiome de récurrence, on conclut alors que pour tout entier n de $\mathbb{N}$ tel que $n \geqslant n_0$, la propriété $P(n)$ est vraie.

Un exemple de rédaction:

Énoncé: La suite (u_n) est définie par $u_0 = 2$ et $u_{n+1} = 2u_n - 3$
Démontrer que, pour tout entier naturel n, on a $u_n = 3 - 2^n$
Démonstration:
Appelons $P(n)$ l'égalité $u_n = 3 - 2^n$
* ***Initialisation***::
u0 = 2 et $3 - 2^0 = 3 - 1 = 2$. L'égalité est vérifiée au rang $n = 0$ (ou $P(0)$ est vraie)

** ***Caractère héréditaire***
Supposons que pour **un** entier naturel k, on a: $u_k = 3 - 2^k$ (Hypothèse de récurrence $P(k)$)
Par définition de la suite (u_n), $u_{k+1} = 2u_k - 3$
d'où, $u_{k+1} = 2(3 - 2^k) - 3$ d'après l'hypothèse de récurrence
On en déduit: $u_{k+1} = 6 - 2^{k+1} - 3 = 3 - 2^{k+1}$ (P_{k+1} est établie)
On a montré: Si $P(k)$ est vraie alors $P(k+1)$ est vraie
*** ***Conclusion***
D'après l'axiome de récurrence, la propriété $P(n)$ est vraie pour tout entier naturel n.

V- Applications

Dans I-, l'égalité « $u_n=\dfrac{n}{n+1}$ pour $n \geqslant 1$ » est-elle vraie?

Dans II-, l'inégalité « $n^3\geq 2^n$ pour $n \geqslant 2$ » est-elle vraie?

Dans III-, la phrase: « 7^n+1 est divisible par 6 » est-elle vraie?

Un texte pour réfléchir sur ce que signifie "démontrer":

Extraits de l'article AXIOMATIQUE in encyclopédie universalis.

La méthode axiomatique est un mode d'exposition des sciences exactes fondé sur des propositions admises sans démonstration et nettement formulées et des raisonnements rigoureux. [...]
L'axiomatique commence par un inventaire exhaustif de toutes les propositions que l'on admet sans démonstration et qui ne sont pas des définitions ; ces propositions, appelées *axiomes*, ou parfois postulats, constitueront le point de départ de la théorie que l'on se propose d'édifier. Parmi les axiomes d'une théorie figurent des *règles de déduction* (appelées aussi *axiomes de la logique*) qui sont communes à toutes les sciences déductives. À partir de ces données, on s'astreint à démontrer les autres résultats, ou *théorèmes*, de la théorie considérée, en proscrivant toute affirmation non issue des axiomes ; en particulier, tout recours à l'expérience sensible ou au sentiment subjectif est à rejeter.[...]
On doit à G. Peano (1858-1932) et à R. Dedekind (1831-1916) un exposé axiomatique de la théorie des nombres entiers ; désirant caractériser axiomatiquement l'ensemble **N*** des nombres entiers strictement positifs, Peano prend comme concept primitif la fonction S qui, à tout entier, associe son successeur (ainsi $S(n) = n + 1$).
Cette axiomatique choisit quatre signes de base **N***, S, 1 et =, satisfaisant aux propriétés suivantes (nous énonçons ici les cinq axiomes dans le langage mathématique employé de nos jours ; la formulation originale était exprimée en symboles logiques) :

1. **N*** est un ensemble ;
2. 1 appartient à **N*** ;
3. S est une application injective de **N*** dans **N*** ;
4. 1 n'est le successeur d'aucun nombre ;
5. Tout sous-ensemble A de **N*** qui contient 1 et qui contient son image S(A) par S est égal à **N*** tout entier.

L'axiome 5 joue un rôle fondamental : c'est lui qui légitime le raisonnement par récurrence. À partir des cinq axiomes précédents, on définit les opérations de l'arithmétique ; ainsi les signes +, $\times$, $<$ ne sont pas des signes de base de la théorie ; des relations telles que $a + b = b + a$, ou $a + b \geqslant a$ sont des théorèmes de l'axiomatique de Peano et se démontrent à partir des axiomes.